第 15 卷第 3 期
1998 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 3
Jun., 1998

关联大系统的强稳定跟踪*

胡寿松　曹　坚　何亚群

(南京航空航天大学自动控制系·南京,210016)

摘要：本文在强稳定条件下,对关联大系统的跟踪问题进行了讨论,采用 H_∞ 方法设计了比例-积分控制器,可使故障大系统不仅分散强稳定,且能渐近跟踪常值参考输人信号.

关键词：关联大系统；强稳定性；跟踪系统

1　引　　言

在许多工业应用领域,跟踪问题的研究得到了许多学者的广泛重视.对于大系统跟踪问题的研究,Davision 等在考虑了系统各种误差的情况下,提出了伺服补偿和镇定补偿的控制器设计方法[1];Iftar 等则是利用线性最优控制理论对分散控制器进行设计[2];Mahalanabis 等考虑的是最优模型伺服问题,并且把 LQR 理论作为一种解的方法而提出[3].但对于关联大系统强稳定跟踪问题的研究,目前还鲜见于文献报导.

2　问题描述

考虑如下可控且可观子系统

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + D_i w_i + \sum_{j=1(j\neq i)}^{N} H_{ij} x_j,$$
$$y_i = C_i x_i. \tag{1}$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $y_i \in \mathbb{R}^{k_i}$, $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $w_i \in \mathbb{R}^{l_i}$. 其相应的大系统方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw, \quad y = Cx. \tag{2}$$

在式(1)中, $D_i w_i$ 项可以是模型误差或慢变扰动.设 y_i 跟踪常值输入 y_{ri}, 且定义

$$\dot{e}_i = y_{ri} - y_i. \tag{3}$$

将式(1)与式(3)增广：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_i\\ \dot{e}_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_i & 0\\ -C_i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_i\\ e_i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_i\\ 0\end{bmatrix}u_i + \begin{bmatrix}D_i\\ 0\end{bmatrix}w_i + \begin{bmatrix}0\\ I_i\end{bmatrix}y_{ri} + \sum_{j=1(j\neq i)}^{N}\begin{bmatrix}H_{ij} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_j\\ 0\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}y_i\\ e_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_i & 0\\ 0 & I_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_i\\ e_i\end{bmatrix}. \tag{4}$$

则增广子系统可表示为

$$\dot{\bar{x}}_i = \bar{A}_i \bar{x}_i + \bar{B}_i u_i + \bar{D}_i w_i + \bar{T}_i y_{ri} + \sum_{j=1(j\neq i)}^{N} \bar{H}_{ij}\bar{x}_j,$$
$$\bar{y}_i = \bar{C}_i \bar{x}_i. \tag{5}$$

其相应的增广大系统为

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u + \bar{D}w + \bar{T}y_r, \quad \bar{y} = \bar{C}\bar{x}. \tag{6}$$

关联大系统的强稳定跟踪问题是：要求确定分散控制律 u,使系统(2)在第 m 个子系统的

* 江苏省自然科学基金资助项目(BK97227).
本文于 1996 年 1 月 2 日收到. 1997 年 5 月 13 日收到修改稿.

传感器完全失效时,不但渐定稳定,且可使输出 y 渐近跟踪参考输入 y_r.

3 关联大系统的强稳定跟踪器设计

定理 1 增广系统(6)可控的充要条件为系统(2)可控,且

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = n + k.$$

证 略.

对增广系统(6)求导,则其第 i 个子系统为

$$\ddot{\bar{x}}_i = \bar{A}_i \dot{\bar{x}}_i + \bar{B}_i \dot{u}_i. \tag{7}$$

取性能指标

$$J_i = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\|\dot{\bar{x}}_i\|^2 Q_i + \|\dot{u}_i\|^2 R_i)\mathrm{d}t.$$

则由 LQR 理论知,最优控制律

$$u = -R^{-1}\bar{B}^{\mathrm{T}}P\bar{x} = K_1 x + K_2\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

其中 P 为某一矩阵 Riccati 方程的对称正定解.

当系统(2)的第 m 个子系统的所有传感器均完全失效时,其闭环增广系统形式为

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{A}_1 + \bar{B}K_f K)\bar{x} + \bar{D}w + \bar{T}y_r,\quad \bar{A}_1 = \bar{A} + \bar{H}. \tag{8}$$

其中 $K_f = \operatorname{diag}(I, I, \cdots, 0, I, \cdots, I)$. 对于增广系统(8),令 $\tilde{B} = \bar{B}K_f$,通过奇异值分解,使 $\bar{A} = \operatorname{diag}(A_{k1}, A_{k2})$,将 $\tilde{B}, \bar{C}, \bar{D}$ 及 $\bar{Q}$ 写为:$\tilde{B} = \operatorname{diag}(\tilde{B}_{k1}, \tilde{B}_{k2})$,$\bar{C} = \operatorname{diag}(\bar{C}_{k1}, \bar{C}_{k2})$,$\bar{D} = \operatorname{diag}(\bar{D}_{k1}, \bar{D}_{k2})$,$\bar{Q} = \operatorname{diag}(\bar{Q}_{k1}, \bar{Q}_{k2})$.

定理 2 对于故障闭环系统(8),已知阵对 (A, B) 可控,y_r 为常值参考输入.若存在正标量 $\varepsilon \geqslant 0.5$,$\gamma$ 和 δ,且矩阵 $\bar{Q} > 0$ 和 $\bar{R} = \operatorname{diag}(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \cdots, \bar{R}_{N+k}) > 0$,使下述 Riccati 方程

$$P\bar{A} + \bar{A}^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N+k-1}(PH_iH_i^{\mathrm{T}}P + G_iG_i^{\mathrm{T}}) + P(\delta\gamma^{-1}\bar{D}\,\bar{D}^{\mathrm{T}} - \varepsilon^{-1}\tilde{B}\bar{R}^{-1}\tilde{B}^{\mathrm{T}})P$$
$$+ (\delta\gamma)^{-1}\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} + \bar{Q} = 0. \tag{9}$$

存在正定解 $P = \operatorname{diag}(P_1, P_2)$,则分散控制律

$$u = K_1 x + K_2\int_0^t (y_r - Cx)\mathrm{d}\tau$$

可使系统(2)分散强稳定,且系统输出 $y(t)$ 渐近跟踪常值输入 y_r. 其中 $K_1 = -\bar{R}^{-1}\tilde{B}_{k1}^{\mathrm{T}}P_1$,$K_2 = -\bar{R}^{-1}\tilde{B}_{k2}P_2$,而 P_1, P_2 分别满足如下 Riccati 方程:

$$P_1\bar{A}_{k1} + \bar{A}_{k1}^{\mathrm{T}}P_1 + \sum_{i=1}^{N-1}(P_1H_iH_i^{\mathrm{T}}P_1 + G_iG_i^{\mathrm{T}}) + P_1(\delta\gamma^{-1}\bar{D}_{k1}\bar{D}_{k1}^{\mathrm{T}}$$
$$- \varepsilon^{-1}\tilde{B}_{k1}\bar{R}^{-1}\tilde{B}_{k1}^{\mathrm{T}})P_1 + (\delta\gamma)^{-1}\bar{C}_{k1}^{\mathrm{T}}\bar{C}_{k1} + \bar{Q}_{k1} = 0,$$

$$P_2\bar{A}_{k2} + \bar{A}_{k2}^{\mathrm{T}}P_2 + \sum_{i=N}^{N+k-1}(P_2H_iH_i^{\mathrm{T}}P_2 + G_iG_i^{\mathrm{T}}) + P_2(\delta\gamma^{-1}\bar{D}_{k2}\bar{D}_{k2}^{\mathrm{T}}$$
$$- \varepsilon^{-1}\tilde{B}_{k2}\bar{R}^{-1}\tilde{B}_{k2}^{\mathrm{T}})P_2 + (\delta\gamma)^{-1}\bar{C}_{k2}^{\mathrm{T}}\bar{C}_{k2} + \bar{Q}_{k2} = 0.$$

证 由定理 1 知,增广系统(6)可控.由文[4]引理 2 知,若存在正定对称阵 P,使

$$P\bar{A}_c + \bar{A}_c^{\mathrm{T}}P + \delta\gamma^{-1}P\bar{D}\,\bar{D}^{\mathrm{T}}P + (\delta\gamma)^{-1}\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} < 0.$$

则故障闭环系统(8)渐近稳定,其闭环系统阵

$$\overline{A}_c = \overline{A} + \overline{H} + \widetilde{B}\overline{R}^{-1}\widetilde{B}^{\mathrm{T}}P, \quad \overline{H} = \sum_{i=1}^{N+k-1} H_i G_i^{\mathrm{T}}.$$

其中 $H_iH_i^{\mathrm{T}}$ 及 $G_iG_i^{\mathrm{T}}$ 为块对角阵. 令

$$\begin{aligned}\Pi &= -(P\overline{A}_c + \overline{A}_c^{\mathrm{T}}P + \delta\gamma^{-1}P\overline{D}\,\overline{D}^{\mathrm{T}}P + (\delta\gamma)^{-1}\overline{C}^{\mathrm{T}}\overline{C}) \\ &= -(P\overline{A} + \overline{A}^{\mathrm{T}}P + \delta\gamma^{-1}P\overline{D}\,\overline{D}^{\mathrm{T}}P + (\delta\gamma)^{-1}\overline{C}^{\mathrm{T}}\overline{C}) + 2P\widetilde{B}\overline{R}^{-1}\widetilde{B}^{\mathrm{T}}P \\ &\quad -(P\sum_{i=1}^{N+k-1} H_iG_i^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{N+k-1} G_iH_i^{\mathrm{T}}P).\end{aligned}$$

当存在正标量 $\delta,\gamma,\varepsilon \geqslant 0.5$ 及正定 $\overline{Q}$ 与 $\overline{R}$,使式(9)有正定解 P 时,P 必为块对角阵,且

$$\begin{aligned}\Pi =& \sum_{i=1}^{N+k-1}(PH_iH_i^{\mathrm{T}}P + G_iG_i^{\mathrm{T}}) + \overline{Q} - \varepsilon^{-1}P\widetilde{B}\overline{R}^{-1}\widetilde{B}^{\mathrm{T}}P \\ &+ 2P\widetilde{B}\overline{R}^{-1}\widetilde{B}^{\mathrm{T}}P - (P\sum_{i=1}^{N+k-1}H_iG_i^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{N+k-1}G_iH_i^{\mathrm{T}}P) \\ &\geqslant (2-\varepsilon^{-1})P\widetilde{B}\overline{R}^{-1}\widetilde{B}^{\mathrm{T}}P + \overline{Q} \geqslant \overline{Q} > 0.\end{aligned}$$

故系统(8)渐近稳定,系统(2)分散强稳定,必有

$$\lim_{t\to\infty}\dot{e}(t) = y_r - y(\infty) = 0.$$

推论 1 对于故障闭环增广系统(8),已知 (A_i, B_i) 可控,y_{ri} 为常值参考输入. 若存在正标量 $\varepsilon \geqslant 0.5$,$\gamma$ 和 δ,矩阵 $\overline{Q}_i > 0$ 及 $\overline{R}_i > 0$,使下列 Riccati 方程

$$\begin{aligned}P_i\overline{A}_i + \overline{A}_i^{\mathrm{T}}P_i + \sum_{j=1}^{N+k-1}(P_iH_{ji}P_i + G_{ji}) + P_i(\delta\gamma^{-1}\overline{D}_i\overline{D}_i^{\mathrm{T}} \\ - \varepsilon^{-1}\widetilde{B}_i\overline{R}_i^{-1}\widetilde{B}_i^{\mathrm{T}})P_i + (\delta\gamma)^{-1}\overline{C}_i^{\mathrm{T}}\overline{C}_i + \overline{Q}_i = 0\end{aligned}$$

存在对称正定解 P_i,则分散控制律

$$u_i = K_{1i}x_i + K_{2i}\int_0^t (y_{ri} - C_ix_i)\mathrm{d}\tau$$

可使系统(1)分散强稳定,且 $y_i(t)$ 渐近跟踪 y_{ri}. 其中 $K_{1i} = -\overline{R}_i^{-1}\widetilde{B}_{k1i}^{\mathrm{T}}P_{1i}$,$K_{2i} = -\overline{R}_i^{-1}\widetilde{B}_{k2i}^{\mathrm{T}}P_{2i}$,而 P_{1i} 和 P_{2i} 分别为如下 Riccati 方程的正定解:

$$\begin{aligned}&P_{1i}\overline{A}_{k1i} + \overline{A}_{k1i}^{\mathrm{T}}P_{1i} + \sum_{j=1}^{N-1}(P_{1i}H_{ji}P_{1i} + G_{ji}) + P_{1i}(\delta\gamma^{-1}\overline{D}_{k1i}\overline{D}_{k1i}^{\mathrm{T}} \\ &\quad - \varepsilon^{-1}\widetilde{B}_{k1i}\overline{R}_i^{-1}\widetilde{B}_{k1i}^{\mathrm{T}})P_{1i} + (\delta\gamma)^{-1}\overline{C}_{k1i}^{\mathrm{T}}\overline{C}_{k1i} + \overline{Q}_{k1i} = 0, \\ &P_{2i}\overline{A}_{k2i} + \overline{A}_{k2i}^{\mathrm{T}}P_{2i} + \sum_{j=N}^{N+k-1}(P_{2i}H_{ji}P_{2i} + G_{ji}) + P_{2i}(\delta\gamma^{-1}\overline{D}_{k2i}\overline{D}_{k2i}^{\mathrm{T}} \\ &\quad - \varepsilon^{-1}\widetilde{B}_{k2i}\overline{R}_i^{-1}\widetilde{B}_{k2i}^{\mathrm{T}})P_{2i} + (\delta\gamma)^{-1}\overline{C}_{k2i}^{\mathrm{T}}\overline{C}_{k2i} + \overline{Q}_{k2i} = 0.\end{aligned}$$

由于大系统比较复杂,常采用降阶模型来研究大系统的控制问题,以减少分析和设计的工作量. 考虑系统(7)的 l 阶降阶模型($n < l < n+k$):

$$\dot{\tilde{x}}_i = \widetilde{A}_i\tilde{x}_i + \widetilde{B}_i\tilde{u}_i. \tag{10}$$

其中 $\widetilde{A}_i$ 的 l 个特征值包含在 $\overline{A}_i$ 之中. 设 $l\times(n+k)$ 变换阵 $\varGamma$ 行满秩,取 $\varGamma = [I \quad 0]M^{-1}$,其中 M 为 $\overline{A}_i$ 的模态矩阵,则有 $\widetilde{A}_i = \varGamma\,\overline{A}_i\varGamma^{+}$,$\widetilde{B}_i = \varGamma\overline{B}_i$. 而 $\varGamma^{+}$ 表示 Moore-Penrose 广义逆.

设$\widetilde{Q}=(MM^{\mathrm{T}})^{-1}-\widetilde{K}^{\mathrm{T}}R\widetilde{K}$，则当第 m 个子系统的传感器完全失效时，降阶故障闭环增广系统

$$\dot{\tilde{x}}=(\widetilde{A}+\widetilde{B}\widetilde{K})\tilde{x}+\widetilde{D}w,\quad \tilde{y}=\widetilde{C}\tilde{x}. \tag{11}$$

其中 $\widetilde{A}=\hat{A}+\hat{H}$，$\widetilde{B}=\Gamma\widetilde{B}K_f$，$\widetilde{K}=-R^{-1}\hat{B}^{\mathrm{T}}P$. $\hat{A}$ 为块对角阵. 对 $\hat{H}$ 进行奇异值分解，有 $\hat{H}=\sum\limits_{i=1}^{l-1}H_iG_i^{\mathrm{T}}$，而 $H_iH_i^{\mathrm{T}}$ 和 $G_iG_i^{\mathrm{T}}$ 均为块对角阵. 令 $\hat{B}=\mathrm{diag}(\hat{B}_c,\hat{B}_l)$，则如下定理成立.

定理 3 对于故障系统(11)，已知(A,B)可控，y_r 为常值参考输入. 若存在正标量δ,γ和$\varepsilon\geqslant 0.5$，矩阵 $\widetilde{Q}=\mathrm{diag}(\widetilde{Q}_1,\widetilde{Q}_2,\cdots,\widetilde{Q}_l)>0$ 及 $R=\mathrm{diag}(R_1,R_2,\cdots,R_l)>0$，使下列 Riccati 方程

$$P\hat{A}+\hat{A}^{\mathrm{T}}P+\sum_{i=1}^{l-1}(PH_iH_i^{\mathrm{T}}P+G_iG_i^{\mathrm{T}})+P(\delta\gamma^{-1}\widetilde{D}\widetilde{D}^{\mathrm{T}}$$
$$-\varepsilon^{-1}\hat{B}R^{-1}\hat{B}^{\mathrm{T}})P+(\delta\gamma)^{-1}\widetilde{C}^{\mathrm{T}}\widetilde{C}+\widetilde{Q}=0. \tag{12}$$

存在对称正定解 $P=\mathrm{diag}(P_1,P_2)$，则分散控制律

$$u=K_1x+K_2\int_0^t(y_r-Cx)\mathrm{d}\tau.$$

可使系统(11)渐近稳定，且可渐近跟踪 y_r. 其中 $K_1=-R^{-1}\hat{B}_c^{\mathrm{T}}P_1$，$K_2=-R^{-1}\hat{B}_l^{\mathrm{T}}P_2$.

证 类似于定理 2 的证明，令

$$\Pi=-(P\widetilde{A}_c+\widetilde{A}_c^{\mathrm{T}}P+\delta\gamma^{-1}P\widetilde{D}\widetilde{D}^{\mathrm{T}}P+(\delta\gamma)^{-1}\widetilde{C}^{\mathrm{T}}\widetilde{C}.$$

因 $\widetilde{A}_c=\hat{A}+\hat{H}-\hat{B}R^{-1}\hat{B}^{\mathrm{T}}P$，$\hat{H}=\sum\limits_{i=1}^{l-1}H_iG_i^{\mathrm{T}}$，且当定理假设条件成立时有

$$-(P\hat{A}+\hat{A}^{\mathrm{T}}P+\delta\gamma^{-1}P\widetilde{D}\widetilde{D}^{\mathrm{T}}P+(\delta\gamma)^{-1}\widetilde{C}^{\mathrm{T}}\widetilde{C})$$
$$=\sum_{i=1}^{l-1}(PH_iH_i^{\mathrm{T}}P+G_iG_i^{\mathrm{T}})+\widetilde{Q}-\varepsilon^{-1}P\hat{B}R^{-1}\hat{B}^{\mathrm{T}}P.$$

故有

$$\Pi=\sum_{i=1}^{l-1}(PH_iH_i^{\mathrm{T}}P+G_iG_i^{\mathrm{T}})+\widetilde{Q}-\varepsilon^{-1}P\hat{B}R^{-1}\hat{B}^{\mathrm{T}}P+2P\hat{B}R^{-1}\hat{B}^{\mathrm{T}}P$$
$$-(P\sum_{i=1}^{l-1}H_iG_i^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{l-1}G_iH_i^{\mathrm{T}}P)$$
$$\geqslant(2-\varepsilon^{-1})P\hat{B}R^{-1}\hat{B}^{\mathrm{T}}P+\widetilde{Q}\geqslant\widetilde{Q}>0.$$

4 两地区间电网系统的分散强稳定跟踪

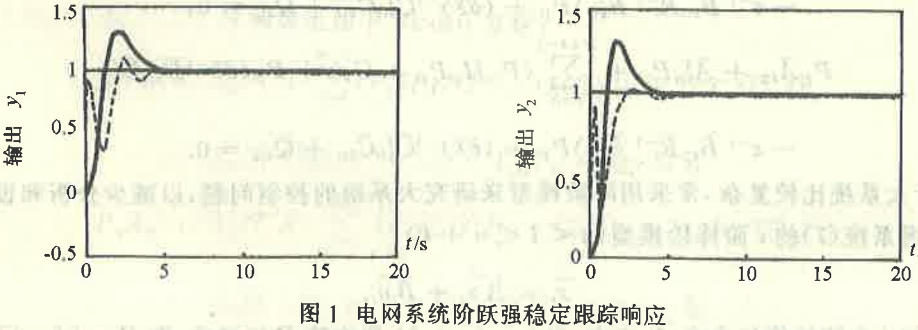

图 1 电网系统阶跃强稳定跟踪响应

设两地区间电网系统方程如文[4]所示. 当第 1 子系统传感器全部失效，且参考输入为单位阶跃信号时，利用本文结果可求出分散反馈增益阵为

$$K_1=[0.2519\quad -0.9429\quad 0.9379\quad 2.3362\quad 0.8704],$$

$$K_2=[0.1452\quad -0.2257\quad -0.1826\quad 0.1765\quad 3.5355].$$

两地区间电网系统阶跃强稳定跟踪响应曲线如图 1 所示. 图中,实线表示故障系统的跟踪响应,虚线表示正常系统的跟踪响应.

参 考 文 献

1 Davision, E. J. and Scherzinger, B. M.. Perfect control of the robust servomechanism problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32(8): 689-702

2 Iftar, A. and Ozguner, U.. An optimal control approach to decentralized robust servomechanism problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34(12): 1268-1271

3 Mahalanabis, A. K. and Pal, J. K.. Optimal regulator design of linear multivariable systems with preseribed pole locations in presence of system disturbances. IEE Proc. -D., 1985, 132(5): 231-236

4 胡寿松等. 关联大系统的分散强稳定控制. 控制理论与应用, 1996, 13(3): 282-287

Strong Stability Track for Large Scale Interconnected Systems

HU Shousong,　CAO Jian　and　HE Yaqun

(Department of Automatic Control, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics · Nanjing, 210016, PRC)

Abstract: In this paper, the track of the large scale intreconnected systems is discussed by the H_∞ method, and a proportional-integral controller is designed so that the failure large scale system can track a constant reference inputs asymptotically, and is decentralized strong stable.

Key words: large-scale interconnected system; strong stability; tracking system

本文作者简介

胡寿松　1937 年生. 1960 年毕业于北京航空航天大学. 现为南京航空航天大学教授, 博士生导师, 中国自动化学会理事. 近期研究方向为大系统 H_∞ 分散鲁棒控制, 非线性系统自修复控制及智能控制.

曹　坚　1966 年生. 1995 年于南京航空航天大学硕士研究生毕业. 工学硕士. 现为南京理工大学讲师. 感兴趣的研究方向为计算机控制及大系统分散控制.

何亚群　1962 年生. 1989 年于南京航空航天大学硕士研究生毕业. 工学硕士. 现为空军后勤学院副教授. 中校军衔. 主要研究方向为运筹学及自修复控制.