非线性系统开闭环PI型迭代学习控制律及其收敛性

皮道映　孙优贤

(浙江大学工业控制技术研究所·工业控制技术国家重点实验室·杭州,310027)

摘要：对于一类参数未知的非线性系统在有限时域上的精确轨迹跟踪问题，提出了一种开闭环 PI 型迭代学习控制策略，给出了其收敛的充要条件. 分析表明：所给出的收敛条件推广了现有结果.

关键词：收敛性；迭代方法；非线性控制系统；开闭环 PI 型学习

1 引　言

自从 Arimoto[1]等人提出迭代学习控制的概念以来，人们对它进行了大量的研究[2~4]. 常规的开环迭代律和闭环迭代律在利用系统运行信息上存在不足[4]，基于与文[4]同样的思路，本文研究如下一类具有重复运动性质的连续非线性时变系统

$$\begin{cases} x_k(t) = f(t, x_k(t), u_k(t)), \\ y_k(t) = g(t, x_k(t)) + D(t)u_k(t). \end{cases} \tag{1}$$

式中 $t \in [0,T]$，k 表示迭代次数，$x_k(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，$y_k(t) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$，$u_k(t) \in \mathbb{R}^{r\times 1}$，$f, g, D$ 为适当维数的向量或矩阵. 所提出的开闭环 PI 型迭代学习控制律为

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) = {} & u_k(t) + \alpha L_p(t)e_k(t) + \alpha L_I(t)\int_0^t e_k(s)\mathrm{d}s \\ & + (1-\alpha)L_p(t)e_{k+1}(t) + (1-\alpha)L_I(t)\int_0^t e_{k+1}(s)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2}$$

式中 α 为常数，$L_p(t), L_I(t) \in \mathbb{R}^{r\times m}$ 分别为 P 型、I 型学习系数矩阵且有界，$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 为跟踪误差，$y_d(t)$ 为期望输出. 显然根据 α 的取值情况，式(2)可变为开环、闭环或开闭环 PI 型迭代学习控制律. 本文研究系统(1)(2)的收敛性问题，文中谱半径 $\rho(\cdot)$ 的定义见文[3].

2 开闭环 PI 型迭代学习控制律的收敛性

定理　设由(1)(2)描述的非线性系统在 $t \in [0,T]$ 上满足

① $\forall\, t, u_1, u_2, x_1, x_2$ 有：$\| f(t,x_1,u_1) - f(t,x_2,u_2) \| \leqslant M(\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|)$，

② $\forall\, t, x_1, x_2$ 有：$\| g(t,x_1) - g(t,x_2) \| \leqslant M\|x_1 - x_2\|$，

③ 存在唯一的理想控制 $u_d(t)$ 使系统的状态和输出为期望值 $x_d(t), y_d(t)$，

④ 初始状态序列 $\{x_k(0)\}_{k\geqslant 1}$ 满足：$\lim\limits_{k\to\infty} x_k(0) = x_d(0)$，

⑤ 矩阵 $[I + (1-\alpha)L_p(t)D(t)]$ 的逆存在(I 为适当维数的单位阵).

其中 M 为正常数. 对于任给的初始控制 $u_0(t)$，系统(1)(2)在 $[0,T]$ 上一致收敛的充分条件为

$$\rho([I + (1-\alpha)L_p(t)D(t)]^{-1}[I - \alpha L_p(t)D(t)]) < 1, \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{3}$$

而必要条件为

$$\rho([I + (1-\alpha)L_p(0)D(0)]^{-1}[I - \alpha L_p(0)D(0)]) < 1. \tag{4}$$

证　令

$$\begin{cases} \delta x_k(t) = x_d(t) - x_k(t), \\ \delta y_k(t) = y_d(t) - y_k(t), \\ \delta u_k(t) = u_d(t) - u_k(t). \end{cases} \tag{5}$$

本文于 1996 年 6 月 3 日收到. 1997 年 4 月 29 日收到修改稿.

定义[3]
$$\begin{cases} f_1(t,x,u) = f(t,x_d(t),u_d(t)) - f(t,x_d(t)-x,u_d(t)-u), \\ g_1(t,x) = g(t,x_d(t)) - g(t,x_d(t)-x). \end{cases} \tag{6}$$
则由条件①、②有：
$$\begin{cases} \| f_1(t,x,u) \| \leqslant M(\|x\| + \|u\|), \\ \| g_1(t,x) \| \leqslant M\|x\|, \\ \| f_1(t,x_1,u_1) - f_1(t,x_2,u_2) \| \leqslant M(\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|), \\ \| g_1(t,x_1) - g_1(t,x_2) \| \leqslant M\|x_1 - x_2\|. \end{cases} \tag{7}$$
由式(1)、(2)、(5)、(6)可得
$$\begin{cases} \delta\dot{x}_k(t) = f_1(t,\delta x_k(t),\delta u_k(t)), \\ \delta x_k(0) = x_d(0) - x_k(0), \\ \delta y_k(t) = g_1(t,\delta x_k(t)) + D(t)\delta u_k(t). \end{cases} \tag{8}$$
由式(2)、(5)、(6)、(8)和条件⑤可得
$$\begin{aligned} &\delta u_{k+1}(t) + [I + (1-\alpha)L_p(t)D(t)]^{-1}(1-\alpha)L_p(t)g_1(t,\delta x_{k+1}(t)) \\ &\quad + [I + (1-\alpha)L_p(t)D(t)]^{-1}(1-\alpha)L_I(t)\int_0^t [D(s)\delta u_{k+1}(s) + g_1(s,\delta x_{k+1}(s))]\mathrm{d}s \\ &= [I + (1-\alpha)L_p(t)D(t)]^{-1}[I - \alpha L_p(t)D(t)]\delta u_k(t) \\ &\quad - [I + (1-\alpha)L_p(t)D(t)]^{-1}\alpha L_p(t)g_1(t,\delta x_k(t)) \\ &\quad - [I + (1-\alpha)L_p(t)D(t)]^{-1}\alpha L_I(t)\int_0^t [D(s)\delta u_k(s) + g_1(s,\delta x_k(s))]\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{9}$$
定义算子 $G_k: C_r[0,T] \to C_r[0,T]$ 为
$$G_k(u)(t) = L_p(t)g_1(t,x(t)) + L_I(t)\int_0^t [D(s)u(s) + g_1(s,x(s))]\mathrm{d}s. \tag{10}$$
其中 $x(t)$ 满足
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(t,x(t),u(t)), \\ x(0) = x_d(0) - x_k(0). \end{cases} \tag{11}$$
可证 G_k 满足文[3]引理中算子 Q 的条件(见附录1). 定义算子 $P_k, Q_{k+1}: C_r[0,T] \to C_r[0,T]$ 为
$$P_k(u)(t) = -[I + (1-\alpha)L_p(t)D(t)]^{-1}\alpha G_k(u)(t), \tag{12}$$
$$Q_{k+1}(u)(t) = [I + (1-\alpha)L_p(t)D(t)]^{-1}(1-\alpha)G_{k+1}(u)(t). \tag{13}$$
不难验证算子 P_k, Q_{k+1} 也满足文[3]引理中算子 Q 的条件，即存在 $M_p, M_Q \geqslant 0$ 使得
$$\| P_k(\delta u_k)(t) \| \leqslant M_p(\|\delta x_k(0)\| + \int_0^t \|\delta u_k(s)\|\mathrm{d}s), \tag{14}$$
$$\| Q_{k+1}(\delta u_{k+1}(t) \| \leqslant M_Q(\|\delta x_{k+1}(0)\| + \int_0^t \|\delta u_{k+1}(s)\|\mathrm{d}s). \tag{15}$$
定义算子 $S, V_k: C_r[0,T] \to C_r[0,T]$ 为
$$S(u)(t) = [I + (1-\alpha)L_p(t)D(t)]^{-1}[I - \alpha L_p(t)D(t)]u(t), \tag{16}$$
$$V_k(u)(t) = (S + P_k)(u)(t). \tag{17}$$
则式(9)可写成
$$\delta u_{k+1}(t) + Q_{k+1}(\delta u_{k+1})(t) = V_k(\delta u_k)(t). \tag{18}$$
由式(14)、(16)、(17)可证
$$\int_0^t \| V_k(\delta u_k)(s) \| \mathrm{d}s \leqslant M_V(\|\delta x_k(0)\| + \int_0^t \|\delta u_k(s)\|\mathrm{d}s). \tag{19}$$
其中 $M_V = \sup_{s\in[0,T]} \| [I + (1-\alpha)L_p(s)D(s)]^{-1}[I - \alpha L_p(s)D(s)] \| + M_pT$. 根据文[3]的引

理，定义算子 $\overline{Q}_{k+1}:C_r[0,T]\to C_r[0,T]$ 为

$$\overline{Q}_{k+1}(y)(t)=Q_{k+1}(u)(t),\quad \forall\ y(t)\in C_r[0,T]. \tag{20}$$

其中 $u(t)$ 由 $u(t)+Q_{k+1}(u)(t)=y(t)$ 唯一确定. 对照式(18)可知：算子 $\overline{Q}_{k+1}$ 使得 $Q_{k+1}(\delta u_{k+1})(t)$ 可用 $V_k(\delta u_k)(t)$ 表示. 定义算子 $W_{k+1}:C_r[0,T]\to C_r[0,T]$ 为

$$W_{k+1}(u)(t)=-\overline{Q}_{k+1}(V_k(u))(t), \tag{21}$$

则式(18)可进一步写成

$$\delta u_{k+1}(t)=V_k(\delta u_k)(t)+W_{k+1}(\delta u_k)(t)=(S+P_k+W_{k+1})(\delta u_k)(t). \tag{22}$$

由式(15)、(20)和文[3]引理的结论 b)可知，存在 $M_{\overline{Q}}>0$ 使得

$$\|\overline{Q}_{k+1}(V_k(\delta u_k))(t)\|\leqslant M_{\overline{Q}}(\|\delta x_{k+1}(0)\|+\int_0^t\|V_k(\delta u_k)(s)\|\,\mathrm{d}s). \tag{23}$$

由式(19)、(21)、(23)可知

$$\|W_{k+1}(\delta u_k)(t)\|\leqslant M_{\overline{Q}}\max(M_V,1)(\|\delta x_k(0)\|+\|\delta x_{k+1}(0)\|+\int_0^t\|\delta u_k(s)\|\,\mathrm{d}s). \tag{24}$$

定义算子 $U_k:C_r[0,T]\to C_r[0,T]$ 为

$$U_k(u)(t)=(P_k+W_{k+1})(u)(t). \tag{25}$$

则由式(14)与(24)可知

$$\begin{aligned}\|U_k(\delta u_k)(t)\|&\leqslant\|P_k(\delta u_k)(t)\|+\|W_{k+1}(\delta u_k)(t)\|\\&\leqslant\max(1,M_p+M_{\overline{Q}}\max(M_V,1))(\|\delta x_k(0)\|\\&\quad+\|\delta x_{k+1}(0)\|+\int_0^t\|\delta u_k(s)\|\,\mathrm{d}s).\end{aligned} \tag{26}$$

式(22)可写为

$$\begin{aligned}\delta u_{k+1}(t)&=(S+U_k)(\delta u_k)(t)\\&=(S+U_k)(S+U_{k-1})\cdots(S+U_0)(\delta u_0)(t).\end{aligned} \tag{27}$$

由式(16)、(26)、(27)、条件④和文[2]的引理4可知，若式(3)成立，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\delta u_{k+1}(t)=0$ 在$[0,T]$上一致地成立. 由 $u_d(t)$ 的唯一性(条件③)可知，此时$\lim\limits_{k\to\infty}\delta x_{k+1}(t)=0$，$\lim\limits_{k\to\infty}\delta y_{k+1}(t)=0$也在$[0,T]$上一致地成立. 充分性于是得证.

下面用反证法证明收敛的必要条件成立. 设系统(1)(2)收敛并且式(4)不成立. 由条件④，取学习控制的理想初态情况 $x_k(0)=x_d(0)(\forall\ k\geqslant 1)$，则由式(26)可知 $\|U_k(\delta u_k)(0)\|\leqslant 0$，即 $U_k(\delta u_k)(0)=0$. 由式(27)和 S 的定义可知

$$\delta u_{k+1}(0)=([I+(1-\alpha)L_p(0)D(0)]^{-1}[I-\alpha L_p(0)D(0)])^{k+1}\delta u_0(0). \tag{28}$$

由上式可知：式(4)不成立时，只要 $\delta u_0(0)\neq 0$，必有 $\delta u_{k+1}(0)\neq 0(k=0,1,2.\cdots)$，这与系统(1)(2)收敛的假设矛盾. 故式(4)为系统(1)(2)收敛的必要条件.

3 结　　论

对于由(1)式描述的非线性系统，本文提出了一种能更多地利用系统运行信息的PI型迭代学习控制律. 所给出的学习收敛条件与状态方程中函数 $f(t,x,u)$ 的具体形式无关；在 $L_I(t)$ 有界的前提下，学习收敛与否同 $L_I(t)$ 的选取无关. 由于新的学习律可变为单纯的开环和闭环PI型迭代学习控制律〔根据 α 的取值情况〕，因此本文的定理可同时用于判定开环和闭环PI型迭代学习控制的收敛性. 不难看出，文[3]关于非线性系统闭环P型学习控制收敛性的定理为本文定理的特例.

参　考　文　献

1 Arimoto, S., Kawamura, S. and Miyazaki, F.. Bettering operation of robots by learning. J. Robot. Systems, 1984, 1(2): 123－140

2 林辉，王林，戴冠中. 迭代学习控制中的初始状态问题. 第一届全球华人智能控制与智能自动化大会论文集(下)，北京：科学出版社，1993，2269－2273

3 林辉，王林. 非线性系统闭环P型迭代学习控制的收敛性. 控制理论与应用，1995，12(6)：742－746

4 皮道映，孙优贤. 离散非线性系统开闭环P型迭代学习控制律及其收敛性. 控制理论与应用，1997，14(2)：157－161

附录 1　证明"算子 G_k 满足文[3]引理中算子 Q 的条件".

证　由式(7)、(11)和Bellman-Gronwall引理可证

$$\|x(t)\| \leqslant \max(M,1)\mathrm{e}^{Mt}\left(\|x(0)\| + \int_0^t \|u(s)\|\mathrm{d}s\right). \tag{A1}$$

由式(7)、(10)及(A1)可证：$\|G_k(u)(t)\| \leqslant M_G\left(\|x(0)\| + \int_0^t \|u(s)\|\mathrm{d}s\right).$ (A2)

其中 $M_G = \sup\limits_{t\in[0,T]}\left[\|L_p(t)\| M\max(M,1)\mathrm{e}^{Mt} + \|L_I(t)\|\left(\sup\limits_{s\in[0,T]}\|D(s)\| + M\max(M,1)\mathrm{e}^{Mt}t\right)\right]$.

由式(10)、(11)可知，$\forall\, u_w, u_v \in C_r[0,T]$ 有

$$\begin{aligned}\|G_k(u_w)(t) - G_k(u_v)(t)\| \leqslant{}& \|L_p(t)\|\,\|g_1(t,x_w(t)) - g_1(t,x_v(t))\| \\ &+ \|L_I(t)\|\,\Big\|\int_0^t [D(s)(u_w(s) - u_v(s)) \\ &+ g_1(s,x_w(s)) - g_1(s,x_v(s))]\mathrm{d}s\Big\|.\end{aligned} \tag{A3}$$

其中 $x_w(t)$，$x_v(t)$ 分别为式(11)中 $u = u_w$ 和 $u = u_v$ 时 $x(t)$ 的解，故有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x_w(t) - x_v(t)] = f_1(t,x_w(t),u_w(t)) - f_1(t,x_v(t),u_v(t)), \\ x_w(0) - x_v(0) = 0.\end{cases} \tag{A4}$$

由式(7)、(A4)及Bellman-Gronwall引理可证

$$\|x_w(t) - x_v(t)\| \leqslant M\,\mathrm{e}^{Mt}\int_0^t \|u_w(s) - u_v(s)\|\mathrm{d}s. \tag{A5}$$

由式(7)、(A3)、(A5)可证：

$$\|G_k(u_w)(t) - G_k(u_v)(t)\| \leqslant M_G\left(\int_0^t \|u_w(s) - u_v(s)\|\mathrm{d}s\right). \tag{A6}$$

由式(A2)和(A6)可知算子 G_k 满足文[3]引理中算子 Q 的条件.

An Open-Closed-Loop PI-Type Iterative Learning Control Scheme for Nonlinear Systems and Its Convergence

PI Daoying　and　SUN Youxian

(Institute of Industrial Process Control, National Key Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University · Hangzhou, 310027, PRC)

Abstract: For precise tracking control of a class of nonlinear systems with unknown parameters over a finite time interval, an open-closed-loop PI-type iterative learning control scheme is proposed. Sufficient and necessary conditions for the convergence of the proposed learning scheme are given. The conditions are more general than the known results.

Key words: convergence; iterative method; nonlinear control system; open-closed loop PI-type

本文作者简介

皮道映　1965年生. 1985年和1988年分别获得东北大学理学学士和工学硕士学位，1995年获浙江大学工学博士学位，后留校任教. 1996年任副教授. 研究领域为多模型控制，学习控制等.

孙优贤　见本刊1998年第1期第108页.