第 15 卷第 3 期
1998 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 3
Jun., 1998

# 2-D 线性离散系统一般模型的最优状态估计*

杜春玲　杨成梧
（南京理工大学动力工程学院·南京，210094）

**摘要**：本文利用最优状态估计理论，讨论了二维线性离散系统一般模型(2-D General Model，简称 2-D GM)最优状态估计问题. 基于 2-D GM 的变结构 1-D 表示，导出了表现为 1-D 形式的 2-D GM 的最优状态估计器. 文中还直接由 2-D GM 出发，将 1-D 最优状态估计的思想推广到 2-D 情形，提出了 2-D 状态估计器的设计方法.

**关键词**：二维系统；线性离散系统；状态估计

## 1 引　　言

自美国学者 Givone 和 Roesser 在研究多维线性滤波网络时提出著名的 2-D Givone-Roesser(通常称 2-D G-R 或 2-D Roesser)模型以来，二维状态空间理论不断得到发展和完善. 然而 2-D 状态空间模型的估计问题一直未得以很好解决，有关的研究成果尚不多见. 文[1]对一类特殊的 2-D 状态空间模型讨论了 Bayesian 估计问题，[2]为 2-D G-R 模型提出了设计最优状态估计器的方法. 相比之下，在频域下研究 2-D 数字滤波则一直很受关注[3,4]. 本文主要通过两种途径来研究 2-D GM 的状态估计问题，其一是在 2-D GM 的 1-D 变结构表示下[5]进行研究，尽管此时模型的阶数和系数均为时变的，但可直接借助于相对成熟的 1-D 系统理论来研究 2-D 系统；其二是直接由 2-D GM 出发将 1-D 状态估计理论推广到 2-D 情形.

## 2 2-D GM 的 1-D 状态估计

考虑 2-D GM：

$$\begin{aligned} x(i+1,j+1) = {} & A_0x(i,j) + A_1x(i+1,j) + A_2x(i,j+1) \\ & + B_0u(i,j) + B_1u(i+1,j) + B_2u(i,j+1), \end{aligned} \tag{1}$$

$$y(i,j) = Cx(i,j) + Du(i,j). \tag{2}$$

边界条件为

$$x(i,0) = x_{i0}, \quad x(0,j) = x_{0j}, \quad (i,j) \geqslant (0,0). \tag{3}$$

这里 $i,j$ 为二元整值坐标，$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^l$ 分别为状态向量，输入和输出向量. $A_i, B_i(i = 0,1,2)$，$C$ 和 $D$ 分别为各具适当维数的常值实矩阵.

已经知道，2-D GM(1)～(3)的变结构 1-D 表示为[5]：

$$\begin{aligned} \theta(k+1) = {} & F_1(k)\theta(k) + F_2(k-1)\theta(k-1) + G_1(k)u(k) \\ & + G_2(k-1)u(k-1) + H_1(k)\theta_0(k) + H_2(k-1)\theta_0(k-1), \end{aligned} \tag{4}$$

$$y(k) = C(k)\theta(k) + D(k)u(k) + \eta(k). \tag{5}$$

这里

$$\theta_0(0) = x(0,0), \quad \theta_0(k) = \begin{bmatrix} x(k,0) \\ x(0,k) \end{bmatrix}, \quad k = 1,2\cdots, \tag{6}$$

---

* 国家自然科学基金资助项目(69474001).

本文于 1996 年 7 月 29 日收到. 1997 年 8 月 5 日收到修改稿.

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(1) = 0, \tag{7}$$

$$\theta(k) = [x(k-1,1)\ x(k-2,2) \cdots x(k-s,s) \cdots x(1,k-1)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{(k-1)n}, \tag{8}$$

$$u(k) = [u(k,0)\ u(k-1,1) \cdots u(k-s,s) \cdots u(0,k)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{(k+1)m}, \tag{9}$$

$$y(k) = [y(k-1,1)\ y(k-2,2) \cdots y(k-s,s) \cdots y(1,k-1)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{(k-1)l}. \tag{10}$$

$F_1(k), F_2(k-1), G_1(k), G_2(k-1), H_1(k), H_2(k-1), C(k), D(k)$ 见文[5]. $u, x_0, \eta$ 均为零均值的随机序列. $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵$(\cdot)$的转置. 不失一般性, 设 $D=0$.

由 1-D 系统的状态估计理论, 定义系统(4)(5)的线性估计器的形式为

$$\hat{\theta}(k+1) = F_1'(k)\hat{\theta}(k) + F_2'(k-1)\hat{\theta}(k-1) + K(k)y(k). \tag{11}$$

为使估计无偏, 必须有

$$\mathrm{E}\{\hat{\theta}(k)\} = \mathrm{E}\{\theta(k)\} = \bar{\theta}(k). \tag{12}$$

这里 E 表示数学期望. 从而得无偏估计系统:

$$\hat{\theta}(k+1) = F_1(k)\hat{\theta}(k) + F_2(k-1)\hat{\theta}(k-1) + K(k)(y(k) - C(k)\hat{\theta}(k)). \tag{13}$$

记估计误差

$$\tilde{\theta}(k) \triangleq \theta(k) - \hat{\theta}(k). \tag{14}$$

并且

$$Q_{\tilde{\theta}(k)} = \mathrm{cov}\{\tilde{\theta}(k)\}, \quad Q_{u(k)} = \mathrm{cov}\{u(k)\}, \tag{15}$$

$$Q_{\theta_0(k)} = \mathrm{cov}\{\theta_0(k)\}, \quad Q_{\eta(k)} = \mathrm{cov}\{\eta(k)\}, \tag{16}$$

$$M(k) = F_1(k) - K(k)C(k). \tag{17}$$

现在, 设法通过确定 $K(k)$ 使估计误差方差为最小以实现最优估计[2], 即寻求 $K(k)$, 以使下式极小:

$$J(K(k)) = \mathrm{tr}[Q_{\tilde{\theta}(k+1)}]. \tag{18}$$

由(4)和(11)得

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(k+1) = {} & (F_1(k) - K(k)C(k))\tilde{\theta}(k) + F_2(k-1)\tilde{\theta}(k-1) + G_1(k)u(k) \\ & + G_2(k-1)u(k-1) + H_1(k)\theta_0(k) \\ & + H_2(k-1)\theta_0(k-1) - K(k)\eta(k).\end{aligned} \tag{19}$$

设 $\tilde{\theta}, u, \theta_0$ 和 $\eta$ 之间相互独立, 且

$$\mathrm{E}\{\tilde{\theta}(k)\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}(k-1)\} = 0. \tag{20}$$

对(19)取协方差有

$$\begin{aligned}Q_{\tilde{\theta}(k+1)} = {} & M(k)Q_{\tilde{\theta}(k)}M^{\mathrm{T}}(k) + F_2(k-1)Q_{\tilde{\theta}(k-1)}F_2^{\mathrm{T}}(k-1) + G_1(k)Q_{u(k)}G_1^{\mathrm{T}}(k) \\ & + G_2(k-1)Q_{u(k-1)}G_2^{\mathrm{T}}(k-1) + H_1(k)Q_{\theta_0(k)}H_1^{\mathrm{T}}(k) \\ & + H_2(k-1)Q_{\theta_0(k-1)}H_2^{\mathrm{T}}(k-1) + K(k)Q_{\eta(k)}K^{\mathrm{T}}(k).\end{aligned} \tag{21}$$

于是对(18)式用变分法[6], 且只取一次变分, 有

$$\delta J = \mathrm{tr}\{[-2M(k)Q_{\tilde{\theta}(k)}C^{\mathrm{T}}(k) + 2K(k)Q_{\eta(k)}]\delta K^{\mathrm{T}}(k)\}. \tag{22}$$

将(17)式代入上式:

$$\delta J = 2\mathrm{tr}\{[K(k)(C(k)Q_{\tilde{\theta}(k)}C^{\mathrm{T}}(k) + Q_{\eta(k)}) - F_1(k)Q_{\tilde{\theta}(k)}C^{\mathrm{T}}(k)]\delta K^{\mathrm{T}}(k)\}. \tag{23}$$

由于对任何 $\delta K^{\mathrm{T}}(k)$, $\delta J = 0$, 有

$$K(k) = F_1(k)Q_{\tilde{\theta}(k)}C^{\mathrm{T}}(k)(C(k)Q_{\tilde{\theta}(k)}C^{\mathrm{T}}(k) + Q_{\eta(k)})^{-1}. \tag{24}$$

将(24)式代入(21)式, 并整理得

$$Q_{\tilde{\theta}(k+1)} = F_1(k)Q_{\tilde{\theta}(k)}F_1^{\mathrm{T}}(k) + F_2(k-1)Q_{\tilde{\theta}(k-1)}F_2^{\mathrm{T}}(k-1)$$

$$+ G_1(k)Q_{u(k)}G_1^{\mathrm{T}}(k) + G_2(k-1)Q_{u(k-1)}G_2^{\mathrm{T}}(k-1)$$
$$+ H_1(k)Q_{\theta_0(k)}H_1^{\mathrm{T}}(k) + H_2(k-1)Q_{\theta_0(k-1)}H_2^{\mathrm{T}}(k-1)$$
$$- F_1(k)Q_{\tilde{\theta}(k)}C^{\mathrm{T}}(k)(Q_{\eta(k)} + C(k)Q_{\tilde{\theta}(k)}C^{\mathrm{T}}(k))^{-1}C(k)Q_{\tilde{\theta}(k)}F_1^{\mathrm{T}}(k). \tag{25}$$

至此,由(13),(24)和(25)构成的系统即为2-D GM(1)(2)(3)的最优估计.

对于系统(4)(5),引入另外一种形式的估计器:

$$\hat{\theta}(k+1) = F_1'(k)\hat{\theta}(k) + F_2'(k-1)\hat{\theta}(k-1) + K_1(k)y(k) + K_2(k-1)y(k-1). \tag{26}$$

用同样的方法可得到最优估计系统为

$$\hat{\theta}(k+1) = F_1(k)\hat{\theta}(k) + F_2(k-1)\hat{\theta}(k-1) + K_1(k)(y(k) - C(k)\hat{\theta}(k))$$
$$+ K_2(k-1)(y(k-1) - C(k-1)\hat{\theta}(k-1)), \tag{27}$$

$$K_1(k) = F_1(k)Q_{\tilde{\theta}(k)}C^{\mathrm{T}}(k)(Q_{\eta(k)} + C(k)Q_{\tilde{\theta}(k)}C^{\mathrm{T}}(k))^{-1}, \tag{28}$$

$$K_2(k-1) = F_2(k-1)Q_{\tilde{\theta}(k-1)}C^{\mathrm{T}}(k-1)(Q_{\eta(k-1)} + C(k-1)Q_{\tilde{\theta}(k-1)}C^{\mathrm{T}}(k-1))^{-1}, \tag{29}$$

$$Q_{\tilde{\theta}(i+1)} = F_1(k)Q_{\tilde{\theta}(k)}F_1^{\mathrm{T}}(k) + F_2(k-1)Q_{\tilde{\theta}(k-1)}F_2^{\mathrm{T}}(k-1)$$
$$+ G_1(k)Q_{u(k)}G_1^{\mathrm{T}}(k) + G_2(k-1)Q_{u(k-1)}G_2^{\mathrm{T}}(k-1)$$
$$+ H_1(k)Q_{\theta_0(k)}H_1^{\mathrm{T}}(k) + H_2(k-1)Q_{\theta_0(k-1)}H_2^{\mathrm{T}}(k-1)$$
$$- F_1(k)Q_{\tilde{\theta}(i)}C^{\mathrm{T}}(k)(Q_{\eta(k)} + C(k)Q_{\tilde{\theta}(k)}C^{\mathrm{T}}(k))^{-1}C(k)Q_{\tilde{\theta}(k)}F_1^{\mathrm{T}}(k)$$
$$- F_2(k-1)Q_{\tilde{\theta}(k-1)}C^{\mathrm{T}}(k-1)(Q_{\eta(k-1)} + C(k-1)Q_{\tilde{\theta}(k-1)}C^{\mathrm{T}}(k-1))^{-1}$$
$$\cdot C(k-1)Q_{\tilde{\theta}(k-1)}F_2^{\mathrm{T}}(k-1). \tag{30}$$

显然 $K_2(k) = 0$ 时,即为前一种形式的估计.

另外,很明显,系统(4)(5)等价于下列系统:

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ F_2(k-1) & F_1(k) \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G_2(k-1) & G_1(k-1) \end{bmatrix} U(k), \tag{31}$$

$$y(k) = [0 \quad C(k)]X(k) + \eta(k). \tag{32}$$

式中

$$X(k) = \begin{bmatrix} \theta(k-1) \\ \theta(k) \end{bmatrix}, \quad U(k) = \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k) \end{bmatrix}. \tag{33}$$

由1-D预测估计理论[7],很容易由系统(31)(32)求得2-D GM的另一种最优状态估计器.

## 3 2-D GM 的 2-D 状态估计

上一部分提出的2-D GM的最优估计系统,因其都是建立在2-D GM的1-D变结构表示基础上,均表现为1-D的形式,而这里将直接由2-D GM出发,解其最优估计问题.

考虑如下2-D GM

$$x(i+1,j+1) = A_0x(i,j) + A_1x(i+1,j) + A_2x(i,j+1)$$
$$+ B_0u(i,j) + B_1u(i+1,j) + B_2u(i,j+1) + w(i,j), \tag{34}$$

$$y(i,j) = Cx(i,j) + v(i,j). \tag{35}$$

其中 $w(i,j), v(i,j)$ 均为零均值的高斯白噪声序列,由预测估计理论[7],设(34)(35)的无偏估计系统为

$$\hat{x}(i+1,j+1) = A_0\hat{x}(i,j) + A_1\hat{x}(i+1,j) + A_2\hat{x}(i,j+1)$$
$$+ K_0(i,j)(y(i,j) - C\hat{x}(i,j)) + K_1(i+1,j)(y(i+1,j)$$
$$- C\hat{x}(i+1,j)) + K_2(i,j+1)(y(i,j+1) - C\hat{x}(i,j+1)). \tag{36}$$

记

$$\tilde{x}(i,j) = x(i,j) - \hat{x}(i,j) \tag{37}$$

为估计误差.

由(34)～(36)得：

$$\begin{aligned}\tilde{x}(i+1,j+1) =& (A_0 + K_0(i,j)C)\tilde{x}(i,j) + (A_1 - K_1(i+1,j)C)\tilde{x}(i+1,j) \\ &+ (A_2 - K_2(i,j+1)C)\tilde{x}(i,j+1) - K_0(i,j)v(i,j) - K_1(i+1,j) \\ &\cdot v(i+1,j) - K_2(i,j+1)v(i,j+1) + w(i,j) + B_0u(i,j) \\ &+ B_1u(i+1,j) + B_2u(i,j+1).\end{aligned} \tag{38}$$

令

$$P(i,j) = E(\tilde{x}(i,j)\tilde{x}^{\mathrm{T}}(i,j)), \quad R(i,j) = E(v(i,j)v^{\mathrm{T}}(i,j)), \tag{39}$$

$$Q(i,j) = E(w(i,j)w^{\mathrm{T}}(i,j)), \quad Q_u(i,j) = E(u(i,j)u^{\mathrm{T}}(i,j)). \tag{40}$$

则对(38)取协方差，并考虑到 $\tilde{x},u,v,w$ 之间相互独立且

$$E(\tilde{x}(i,j)\tilde{x}^{\mathrm{T}}(i+1,j)) = 0, \quad E(\tilde{x}(i,j)\tilde{x}^{\mathrm{T}}(i,j+1)) = 0, \tag{41}$$

$$E(x(i+1,j)x^{\mathrm{T}}(i,j+1)) = 0. \tag{42}$$

得

$$\begin{aligned}&P(i+1,j+1) \\ &= (A_0 - K_0(i,j)C)P(i,j)(A_0 - K_0(i,j)C)^{\mathrm{T}} \\ &+ (A_1 - K_1(i+1,j)C)P(i+1,j)(A_1 - K_1(i+1,j)C)^{\mathrm{T}} \\ &+ (A_2 - K_2(i,j+1)C)P(i,j+1)(A_2 - K_2(i,j+1)C)^{\mathrm{T}} \\ &+ K_0(i,j)R(i,j)K_0^{\mathrm{T}}(i,j) + K_1(i+1,j)R(i+1,j)K_1^{\mathrm{T}}(i+1,j) \\ &+ K_2(i,j+1)R(i,j+1)K_2^{\mathrm{T}}(i,j+1) + Q(i,j) + B_0Q_u(i,j)B_0^{\mathrm{T}} \\ &+ B_1Q_u(i+1,j)B_1^{\mathrm{T}} + B_2Q_u(i,j+1)B_2^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{43}$$

与 1-D 情形类似[7]，欲使

$$J(K_0(i,j),K_1(i+1,j),K_2(i,j+1)) = \mathrm{tr}(P(i+1,j+1)) \tag{44}$$

最小，必须

$$K_0(i,j) = A_0P(i,j)C^{\mathrm{T}}(CP(i,j)C^{\mathrm{T}} + R(i,j))^{-1}, \tag{45}$$

$$K_1(i+1,j) = A_1P(i+1,j)C^{\mathrm{T}}(CP(i+1,j)C^{\mathrm{T}} + R(i+1,j))^{-1}, \tag{46}$$

$$K_2(i,j+1) = A_2P(i,j+1)C^{\mathrm{T}}(CP(i,j+1)C^{\mathrm{T}} + R(i,j+1))^{-1}. \tag{47}$$

此时

$$\begin{aligned}&P(i+1,j+1) \\ &= A_0P(i,j)A_0^{\mathrm{T}} + A_1P(i+1,j)A_1^{\mathrm{T}} + A_2P(i,j+1)A_2^{\mathrm{T}} \\ &- A_0P(i,j)C^{\mathrm{T}}(CP(i,j)C^{\mathrm{T}} + R(i,j))^{-1}CP(i,j)A_0^{\mathrm{T}} \\ &- A_1P(i+1,j)C^{\mathrm{T}}(CP(i+1,j)C^{\mathrm{T}} + R(i+1,j))^{-1}CP(i+1,j)A_1^{\mathrm{T}} \\ &- A_2P(i,j+1)C^{\mathrm{T}}(CP(i,j+1)C^{\mathrm{T}} + R(i,j+1))^{-1}CP(i,j+1)A_2^{\mathrm{T}} \\ &+ Q(i,j) + B_0Q_u(i,j)B_0^{\mathrm{T}} + B_1Q_u(i+1,j)B_1^{\mathrm{T}} + B_2Q_u(i,j+1)B_2^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{48}$$

于是由(36)，(45)～(48)便构成了 2-D GM 的 2-D 最优估计系统.

## 4　计算实例

**例 1**　用 1-D 状态估计方法(即式(27)～(30))解有如下系数的 2-DGM 的最优估计

问题：

$$A_0=\begin{bmatrix}0.1 & 0.03\\ 0.2 & 0.04\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}0.01 & 0.09\\ 0.4 & 0.2\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 0.1 & 0\end{bmatrix},$$

$$B_0=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0.02 & 0.1\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}0.01 & 0\\ 0.02 & 0.03\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0.1 & 0.03\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}.$$

且

$$Q_{\eta(k)}=\mathrm{diag}\{0.25\ \cdots\ 0.25\},\quad Q_{u(k)}=\mathrm{diag}\{0.09\ \cdots\ 0.09\},\quad Q_{\theta_0(k)}=0.$$

设

$$P(k)=\mathrm{tr}(Q_{\tilde{\theta}(k)})/(k-1)n,\quad k\geqslant 2.$$

则进行 10 次迭代时，$P(k)$ 收敛于

$$\overline{P}=0.02346008.$$

同样地，对上述系统用 2-D 状态估计方法(即式(36)，(45)～(48))解其最优估计，且设

$$R=\begin{bmatrix}0.25 & 0\\ 0 & 0.25\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},\quad Q_u=\mathrm{diag}\{0.05\quad 0.05\}.$$

初始值为

$$P(0,i)=P(i,0)=I,\quad \hat{x}(0,i)=\hat{x}(i,0)=0.$$

设 $i=1\sim 20, j=1\sim 20$，则 $P(i,j)$ 很快收敛于

$$\overline{P}=\begin{bmatrix}0.1282008 & 0.01259905\\ 0.01259905 & 0.1330599\end{bmatrix}.$$

比较这两种 2-D GM 最优状态估计的方法，可知前者每一步的计算量逐步递增，算出的点数逐步增加，而后者按点数逐一计算，每一点的计算量较前者少. 前者因其表现为一维的形式而对低阶、点数少的系统还是很可取的. 在计算总量上，这两种方法由于要计算的点数相同而是一样的. 对于前者，若能利用每次递增量不变的特点对每步迭代作适当处理以使运算矩阵不致于过大，或许较后者更可取，这是一个很有前景的研究方向.

## 参 考 文 献

1 Habibi Ali. Two-dimensional Bayesian estimate of images. Proc. IEEE, 1972, 60(7): 878－883

2 Porter, W. A. and Aravena, J. L.. State estimation in discrete $m$-D system. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, AC-31 (3): 280－283

3 Lu, W. S.. Structure simplification of nonrecursive 2-D digital filters. IEEE Trans. Circuits & Systems, 1995, 42(9): 538－541

4 Ping, W. and Franca, J. E.. 2-D switched-capacitor decimating filters. IEEE Trans. Circuits & Systems, 1996, 43(4): 257－271

5 Kaczorek, T. and Swierkosz, M.. General model of $n$-D systems with variable coefficients and its reduction to 1-D systems with variable structure. Int. J. Control, 1988, 48(2): 609－623

6 吴受章. 应用最优控制. 西安：西安交通大学出版社，1987

7 王翼. 离散控制系统. 北京：科学出版社，1987

# Optimal State Estimation for 2-D Linear Discrete General Model

DU Chunling　and　YANG Chengwu

(School of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology · Nanjing, 210094, PRC)

**Abstract**: By using the existing optimal state estimation theory, the problem of optimal state estimation for two-dimensional (2-D) linear discrete systems has been discussed in this paper. On the basis of its reduction to 1-D systems with variable structure, the 1-D optimal state estimators for 2-D general model (GM) have been inferred. Furthermore, the approach for designing the 2-D state estimator has been directly produced from 2-D GM by extending the 1-D results to 2-D setting.

**Key words**: two-dimensional system; linear discrete system; state estimation

## 本文作者简介

**杜春玲**　1970 年生. 1992 年毕业于华东工学院自动控制系, 1995 年于南京理工大学获工学硕士学位, 现为南京理工大学博士生. 研究方向为 2-D 系统理论及应用.

**杨成梧**　见本刊 1998 年第 2 期 160 页.

## 本　刊　启　事

各位作者:

为了节约纸张和邮费, 作者们凡向本刊投寄的稿件均可双面打印. 稿件经过审理, 最后有些稿件需要单面打印时, 本刊将另行通知.

谢谢合作.

本刊编辑部