第 15 卷第 3 期　　控制理论与应用　　Vol. 15, No. 3
1998 年 6 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Jun., 1998

控制能量有界的时不变系统线性二次型最优控制*

陈阳舟

(哈尔滨工业大学航天工程与力学系·哈尔滨,150001)

摘要：本文通过新的途径讨论控制能量有界的时不变系统线性二次型最优控制问题. 文中通过"不亏损的 S-过程"方法将该问题转化成无约束的时不变系统线性二次型最优控制问题，从而利用后者的基本结果给出本文问题的最优控制的解析构造. 结果表明此时最优控制仍由一线性状态反馈控制器确定，但其增益矩阵的选择是与初始状态有关的，并且对某些初始状态还可能出现奇异情况.

关键词：线性二次型问题；时不变系统；控制能量有界；不亏损的 S-过程

1 引　　言

众所周知，时不变系统线性二次型最优控制问题可以叙述为：在一个给定的容许过程空间 $P=\{(x,u)\}$ 中通过极小化二次型泛函 $\Phi[x,u]$ 来寻找一个最优容许过程 $(x^0,u^0)\in P$. 这里 P 由所有满足如下条件的过程 (x,u) 构成：对任意的 $t\in\mathbb{R}^+$，

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=Ax(t)+Bu(t),\quad x(0)=x_0, \tag{1}$$

$$|x(\cdot)|\in L_2,\quad |u(\cdot)|\in L_2, \tag{2}$$

$$x(t)\in X(t)\subseteq\mathbb{R}^n,\quad u(t)\in U(t)\subseteq\mathbb{R}^m. \tag{3}$$

泛函 $\Phi[x,u]$ 为如下二次型

$$\Phi[x,u]=\int_0^\infty (x(t)^* Gx(t)+u(t)^*\Gamma u(t))\mathrm{d}t. \tag{4}$$

这里 $A,B,G=G^*,\Gamma=\Gamma^*$ 为适当维数的常数阵，上标 * 表示矩阵或向量的转置. L_2 为 $\mathbb{R}^+=:[0,\infty)$ 上 Lebesgue 平方可积函数空间，其范数记为 $\|\cdot\|_2$. 实欧空间 $\mathbb{R}^n$ 的范数记为 $|\cdot|$. 集值函数 $X(t),U(t)$ 表示状态 $x(t)$ 和控制 $u(t)$ 的约束条件. 在不同的实际问题中它们具有不同的形式. 最基本的也是简单的情况是对任意的 $t\in\mathbb{R}^+$ 有 $X(t)=\mathbb{R}^n, U(t)=\mathbb{R}^m$. 我们用 $\mathrm{LQ}(P_0[x_0],\Phi)$ 来记这个基本问题，其中 $P_0[x_0]$ 表示满足(1)和(2)的过程空间. 注意条件(2)是一种稳定性要求. 若满足(1)和(2)的过程存在，则称(1)或矩阵对 (A,B) 为 L_2- 能稳定的. 它等价于(1)或 (A,B) 是 Hurwitz 意义下能稳的(即存在矩阵 C 使 $A+BC$ 的所有特征根位于开的左复半平面内)(参见文[1]的定理 1]). 在实际问题中仅仅要求稳定性是不够的. 事实上状态和控制总是受着这样或那样的约束，从而使设计问题变得非常复杂. 不同的约束情况导致不同的研究方法且所得的结果有很大的不同. 本文我们将讨论当 $X(t)=\mathbb{R}^n$ 而 $U(t)=\{u(t)\in\mathbb{R}^m\}$ 满足控制能量有界约束条件

$$\|u(\cdot)\|_2\leqslant 1 \tag{5}$$

时的线性二次型问题，称为控制能量有界的线性二次型最优控制问题，记为 $\mathrm{LQ}(P_c[x_0],\Phi)$，

* 国家教委留学回国人员科研资助费支持项目.

本文于 1995 年 9 月 25 日收到，1997 年 10 月 10 日收到修改稿.

其中 $P_c[x_0]$ 表示满足(1),(2)和(5)的过程空间. 处理这个问题的传统方法是直接将 $\|u(\cdot)\|_2^2$ 作一个适当的加权后加到泛函 $\Phi[x,u]$ 中而去掉约束(5)[2,3]. 这样做虽然使问题大为简化但却产生了几点不足之处:第一,加权量的大小选择比较困难;第二,所得的最优控制并不一定是在有控制能量约束条件下最优的;第三,所得的最优控制是一个与初始状态无关的状态反馈调节器形式,而事实上此时的最优控制应该是一个与初始状态有关的线性状态反馈调节器形式(见下面的结果). 鉴于此,本文中我们使用新的方法("不亏损的S-过程"方法)[4]来去掉约束(5)而将问题 $LQ(P_c[x_0],\Phi)$ 转化为基本的 $LQ(P_0[x_0],\Phi)$ 型问题. 我们将看到这种转化过程是等价的,此时最优控制仍然是状态反馈形式,但其增益矩阵的选择是与初态有关的.

2 控制能量有界的线性二次型最优控制

本节我们来给出问题 $LQ(P_c[x_0],\Phi)$ 的解. 因为由(1)和(2)确定的过程空间 $P_0[x_0]$ 不空当且仅当 (A,B) 是能稳的,以后我们总假定这一条件满足.

下面的引理1是[4]中定理2的一个直接推论. 它使我们能等价地将有约束的线性二次型问题转化为一个无约束的线性二次型问题.

引理1 下面式子恒成立

$$\inf\{\Phi:(x,u)\in P_c[x_0]\}=\sup_{\tau\geqslant 0}\inf\{\Phi_\tau-\tau:(x,u)\in P_0[x_0]\}, \tag{6}$$

并且(6)式右边的上确界一定在某个非负数 $\tau=\tau'$ 处达到(若右边的inf部分对每个 $\tau\geqslant 0$ 都等于 $-\infty$,则左边也等于 $-\infty$),这里 $\Phi_\tau=\Phi+\tau\|u\|_2^2$. 进一步,式(6)中左边问题的最优过程 (x^0,u^0)(若存在)一定是右边问题的解,并且 u^0 和上述的 τ' 满足条件

$$\tau(\|u(\cdot)\|_2^2-1)=0. \tag{7}$$

反过来,若(6)式右边问题的解 (x^0,u^0,τ') 存在且满足条件(5)和(7),则 (x^0,u^0) 必为(6)式左边问题的最优过程.

引理1给出了问题 $LQ(P_c[x_0],\Phi)$ 的如下求解过程:第一,对每个 $\tau\geqslant 0$ 求出无约束问题 $LQ(P_0[x_0],\Phi_\tau)$ 的最优过程 (x_τ,u_τ) 和最优值 $\Phi_*(\tau)$. 第二,由 $\Phi_*(\tau)-\tau\to\sup_{\tau\geqslant 0}$ 求出 $\tau(x_0)$. 第三,验证 $(x_{\tau(x_0)},u_{\tau(x_0)})$ 和 $\tau(x_0)$ 满足(5)和(7),从而 $(x_{\tau(x_0)},u_{\tau(x_0)})$ 为 $LQ(P_c[x_0],\Phi)$ 的最优过程.

下面我们总假定在(4)中 G,Γ 均半正定. 于是,对任意的正数 τ,问题 $LQ(P_0[x_0],\Phi_\tau)$ 是正则的,而 $LQ(P_0[x_0],\Phi)$ 为奇异的当且仅当 $\det\Gamma=0$. 正则问题 $LQ[P_0[x_0],\Phi_\tau)$ 的最优过程 (x_τ,u_τ) 由调节器[2~4]

$$u=h_\tau x \tag{8}$$

和对象(1)确定,而最优值为 $x_0^*H_\tau x_0$,这里 h_τ,H_τ 满足如下Lur'e-Riccati方程

$$h_\tau=-\Gamma_\tau^{-1}B^*H_\tau,\quad h_\tau A+A^*H_\tau+G=h_\tau^*\Gamma_\tau h_\tau. \tag{9}$$

如果 $LQ(P_0[x_0],\Phi_\tau)$ 当 $\tau=0$ 时为奇异的,则其最优过程可使用文[5]中定理2.2来构造. 对于这里的具体情况让我们来简单叙述这个结果. 由于假定 G,Γ 均半正定,所以在 $P_0[x_0]$ 中 Φ 总可以表示成[5]

$$\Phi[x,u]=x_0^*H_0x_0+\|lx+\kappa u\|_2^2, \tag{10}$$

这里 H_0,l,κ 为三个常数矩阵使得矩阵

$$N(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda I-A & -B\\ l & \kappa\end{bmatrix} \tag{11}$$

对所有的具正实部的复数 λ 是非奇异的(参见[6]中定理2.1). 将 $N(\lambda)^{-1}\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}=:\begin{bmatrix}X(\lambda)\\U(\lambda)\end{bmatrix}$ 在 λ

$=\infty$ 处展开成 Laurent 级数

$$\begin{bmatrix} X(\lambda) \\ U(\lambda) \end{bmatrix} = \sum_{j=-\infty}^{k} \begin{bmatrix} X_j \\ U_j \end{bmatrix} \lambda^j, \tag{12}$$

则奇异问题 LQ $(P_0[x_0],\Phi)$ 的(广义)最优过程 (x_0,u_0) 由(1)和如下调节器确定：

$$u = h_0 x + \alpha(p) x_0 \delta(t), \quad p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \tag{13}$$

最优值为 $x_0^* H_0 x_0$，这里

$$h_0 = U_{-1} - R_0 X_{-1} + R_0, \quad \alpha(\lambda) = U(\lambda) - h_0 X(\lambda), \tag{14}$$

$\delta(t)$ 为 Dirac 函数，R_0 为任意的 $m\times n$ 实矩阵，$X_{-1}, U_{-1}, X(\lambda), U(\lambda)$ 由(12)定义(更详细的过程见文[5])．现在对每一个 $x_0\in\mathbb{R}^n$，让 $\tau(x_0)$ 是满足下面等式的非负数：

$$x_0^* H_{\tau(x_0)} x_0 - \tau(x_0) = \max_{\tau\geqslant 0}\{x_0^* H_\tau x_0 - \tau\}. \tag{15}$$

下面的引理2保证了问题 LQ $(P_0[x_0],\Phi_{\tau(x_0)})$ 的最优过程即为 LQ$(P_c[x_0],\Phi)$ 的最优过程．

引理2　对任意 $x_0\in\mathbb{R}^n$，$x_0^* H_\tau x_0$ 是 $\tau\in(0,\infty)$ 的连续可微且单调上升的上凸函数，而且有恒等式

$$\frac{\mathrm{d}H_\tau}{\mathrm{d}\tau} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{(A+Bh_\tau)^* t} h_\tau^* h_\tau \mathrm{e}^{(A+Bh_\tau)t}\mathrm{d}t, \quad x_0^* \frac{\mathrm{d}H_\tau}{\mathrm{d}\tau} x_0 = \| u_{\tau,x_0} \|_2^2. \tag{16}$$

这里 u_{τ,x_0} 为由(1)和调节器(8)所确定的最优控制．

证　由于 H_τ 可表示成[5] $H_\tau = -\Psi_\tau X_\tau^{-1}$，这里 $\begin{bmatrix} X_\tau \\ \Psi_\tau \end{bmatrix}$ 的列向量为矩阵 $J^{-1}K_\tau$ 的稳定根子空间之和空间的任一基底，

$$K_\tau = \begin{bmatrix} -G & A^* \\ A & B\Gamma_\tau^{-1}B^* \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_\tau = \Gamma + \tau I,$$

从而 H_τ 关于 τ 连续可微．进一步，由(9)式可得

$$\frac{\mathrm{d}H_\tau}{\mathrm{d}\tau}(A+Bh_\tau) + (A+Bh_\tau)^* \frac{\mathrm{d}H_\tau}{\mathrm{d}\tau} = -h_\tau^* h_\tau.$$

由于 $A+Bh_\tau$ 为 Hurwitz 矩阵，故由著名的 Lyapunov 引理可得(16)式中第一式．又 $(A+Bh_\tau, h_\tau)$ 是可观测的，故它的能观性矩阵 $\frac{\mathrm{d}H_\tau}{\mathrm{d}\tau}$ 必是正定的．(16)中第二式由 $u_{\tau,x_0} = h_\tau \mathrm{e}^{(A+Bh_\tau)t} x_0$ 立即得出．$x_0^* H_\tau x_0$ 的凸性可据凸性定义和等式 $x_0^* H_\tau x_0 = \inf\{\Phi_\tau : (x,u)\in P_0[x_0]\}$ 直接验证．

根据这个引理如果由(15)式定义的 $\tau(x_0)$ 为正数，则 $\left.\frac{\mathrm{d}(x_0^* H_\tau x_0)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=\tau(x_0)} = 1$．据(16)式由(1)和(8)(其中取 $\tau=\tau(x_0)$)所定义的最优控制 $u_{\tau(x_0)}$ 满足条件 $\| u_{\tau(x_0)} \|_2 = 1$，亦即满足条件(5)和(7)．由引理1知 $u_{\tau(x_0)}$ 为 LQ$(P_c[x_0],\Phi)$ 的最优控制．如果(15)式定义的 $\tau(x_0)=0$，则由(15)式可知，$\frac{1}{\tau}x_0^*(H_\tau - H_0)x_0 \leqslant 1 (\forall\ \tau>0)$ 因而 $\lim_{\tau\to 0} x_0^*(\mathrm{d}H_\tau/\mathrm{d}\tau)x_0 \leqslant 1$．由 $x_0^* H_\tau x_0$ 的上凸性(引理2)知对所有的 $\tau>0$ 有 $x_0^*(\mathrm{d}H_\tau/\mathrm{d}\tau)x_0 \leqslant 1$．从而据(16)式 LQ$(P_0[x_0],\Phi_\tau)$ 的最优控制 u_{τ,x_0} 总满足条件(5)．而奇异问题 LQ$(P_0[x_0],\Phi)$ 的由(1)和(13)定义的最优控制为控制序列 u_{τ,x_0} 当 $\tau\to 0$ 时的极限(见[6]，定理2.4)．所以当 $\tau(x_0)=0$ 时由(1)和(13)定义的最优控制亦满足条件(5)和(7)，从而也是问题 LQ$(P_c[x_0],\Phi)$ 的最优控制．由此得到如下结果．

定理1　设在(1)中 (A,B) 能稳，(4)中的 G,Γ 均半正定且 x_0 使 $P_c[x_0]\neq\varnothing$．对任意 $\tau\geqslant 0$ 让 H_τ, h_τ 为由(9)，(10)和(14)定义的矩阵，而 $\tau(x_0)$ 定义在(15)式中．则有 a) 当 $\tau(x_0)>0$

或 $\tau(x_0)=0$ 而 $\det\Gamma\neq 0$ 时 $LQ(P_c[x_0],\Phi)$ 的最优过程由(1)和(8)(其中取 $\tau=\tau(x_0)$)确定. b) 当 $\tau(x_0)=0$ 且 $\det\Gamma=0$ 时 $LQ(P_c[x_0],\Phi)$ 的最优过程由(1)和(13)确定. 进一步, $LQ(P_c[x_0],\Phi)$ 的最优值为 $x_0^* H_{\tau(x_0)}x_0-\tau(x_0)$.

注记 1 一般地说,并非对每一个初态 x_0 均有 $P_c[x_0]\neq\varnothing$. 另外,问题 $LQ(P_c[x_0],\Phi)$ 的最优控制是与初态有关的. 如果初态不能准确得知而只知其范围,一种思想是针对其中"最坏"初态选取最优控制器,亦即由条件 $\max_{x_0}\max_{\tau}\{x_0^* H_\tau x_0-\tau\}$ 来选择(8)中的 τ.

3 一个数字例子

考虑泛函 $\Phi=\int_0^\infty x^2\mathrm{d}t$ 在 $P_c[x_0]=\{(x,u)\}\in P_0[x_0]:\int_0^\infty u^2\mathrm{d}t\leqslant 1\}$ 上的极小化问题,这里 x,u 为标量, $P_0[x_0]=\{(x,u):\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=u,x(0)=x_0,x\in L_2,u\in L_2\}$. 我们首先考虑问题 $LQ(P_0[x_0],\Phi_\tau)$,其中 $\Phi_\tau=\int_0^\infty(x^2+\tau u^2)\mathrm{d}t$. 根据方程(9)求出满足条件 $h_\tau<0$ 的解 $H_\tau=\sqrt{\tau}$, $h_\tau=-\sqrt{\tau^{-1}}$. 其次,从 $\max_{\tau\geqslant 0}\{\sqrt{\tau}x_0^2-\tau\}$ 求出 $\tau(x_0)=0.25x_0^4$. 当 $x_0\neq 0$ 时,问题 $LQ(P_c[x_0],\Phi)$ 的最优过程由调节器 $u=-2x_0^{-2}x$ 确定. 当 $x_0=0$ 时,问题 $LQ(P_c[x_0],\Phi)$ 的最优过程为(0,0). 对任意 x_0 均有 $\inf\{\Phi:(x,u)\in P_c[x_0]\}=0.25x_0^4$.

参 考 文 献

1 Yakubovich, V. A.. Linear-quadratic optimization problem and frequency theorem for periodic systems. Sibersk. Mat. Zh., 1986,27(4):181-200;English Transl. in Siberian Math. J., 1986,27(4):

2 Bryson, Jr. and Ho, Y. C.. Applied Optimal Control. New York:John Wiley and Sons, 1975

3 解学书. 最优控制理论与应用. 北京:清华大学出版社,1986

4 Yakubovich, V. A.. Nonconvex optimization problem:the infinite-horizon linear-quadratic control problem with quadratic constraints. Systems and Control Letters, 1992,(19):13-22

5 Megretskii, A. V. and Yakubovich, V. A.. Singular stationary nonhomogeneous linear quadratic optimal control. Amer. Math. Soc. Transl., 1993,155(2):129-167

Optimal Control for the Time-Invariant Linear-Quadratic Problem with Energy Constraint on Control Input

CHEN Yangzhou

(Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology · Harbin, 150001, PRC)

Abstract: In the paper, the time-invariant linear-quadratic problem with energy constraint on control input is dealt with via a new approach. The results show that the optimal controller is a linear state-feedback control and its gain matrix is interrelated with initial states, and that for some initial states the singular case may occur.

Key words: Linear-quadratic problem; time-invariant sytems; energy constraint on control input; lossless S-procedure

本文作者简介

陈阳舟 1963 年生. 1994 年于俄罗斯圣-彼得堡大学数学力学系获数理博士学位. 现于哈尔滨工业大学航天工程与力学系从事博士后研究工作. 目前的主要研究兴趣有:微分对策,最优控制,鲁棒控制,非线性系统的绝对稳定性分析和控制设计等.