第 15 卷第 4 期
1998 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 4
Aug., 1998

模糊非线性规划对称模型基于遗传算法的模糊最优解*

唐加福　汪定伟

(东北大学信息科学与工程学院·沈阳,110006)

摘要：本文基于扩展原理,借助于隶属函数,对具有一般形式的 Fuzzy 数,提出了描述和表达 Fuzzy 目标和 Fuzzy 约束条件的方法,将一类具有 Fuzzy 目标/资源约束非线性规划的对称模型转化为确定性的非线性规划. 基于遗传算法的思想提出了 Fuzzy 环境下求解非线性规划对称模型的 Fuzzy 最优解方法.

关键词：Fuzzy 非线性规划；隶属函数；Fuzzy 最优解；遗传算法

1 引　言

自从 Bellmman[1]和 Zadeh[1]提出 Fuzzy 决策的概念以来,关于 Fuzzy 数学规划的研究已成为一个非常活跃的研究领域[2,3]. 但现有的关于 Fuzzy 数学规划的研究大部分局限于线性规划[4]和多目标规划[5]. 然而,现实生产中存在各种类型的 Fuzzy 非线性规划问题,这些问题很难用传统的模型来优化和求解. 因此,研究 Fuzzy 环境下非线性规划问题的建模和优化方法[6],不仅对于模糊非线性优化的理论研究有重要意义,而且对于解决复杂工业系统的生产实际问题如生产计划,资源分配等具有实际应用价值. 本文研究目标函数是非精确定义的,约束条件的右端项是模糊数的非线性规划对称模型及求解方法.

2 Fuzzy 非线性规划对称模型的一般形式

2.1 Fuzzy 目标/资源约束非线性规划问题的描述

一般资源约束型非线性规划 NLP 具有如下一般形式：

$$\begin{cases}\max f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \text{s.t}\ g_i(x) \leqslant b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m, \\ x \geqslant 0.\end{cases} \tag{1}$$

其中 $b_i \geqslant 0$ 是确定性可用资源.

但在实际生产中,一段时期内生产资源(能力)的可用量不是确定性的,具有模糊性;模糊性主要表现为:1) 具有一定的弹性增加(减少)量. 2) 非精确性(包括确定性分布和可能性分布. 3) 定义的含糊性等. 不仅如此,决策者(DM)由于各种原因如对问题的了解程度或允许自己有一定的回旋余地(Leeway)[1,2]不能清晰地确定目标,这时定义的目标函数只能是非精确定义的目标(ill-defined goal)或目标函数的某些参数具有 Fuzzy 性. 本文考虑具有如下一般形式的 Fuzzy 目标和 Fuzzy 资源约束非线性规划对称模型.

$$\begin{cases}\widetilde{\max} f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \text{s.t}\ g(x) \leqslant \tilde{b}, \\ x \geqslant 0.\end{cases} \tag{2}$$

其中 x 是 n- 维决策向量, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$. $g(x)$ 是约束条件函数向量 $g(x) = (g_1(x),$

---

* 国家 863 计划 CIMS 主题(863－511－9609－003)与国家自然科学基金资助项目(69684005).

本文于 1996 年 8 月 14 日收到. 1997 年 8 月 5 日收到修改稿.

$g_2(x),\cdots,g_m(x))^{\mathrm{T}}$. $\tilde{b}$ 是 Fuzzy 可用资源向量，$\tilde{b}=(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_m)^{\mathrm{T}}$. $\tilde{b}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 Fuzzy 数，具有一般隶属函数 $\mu_{\tilde{b}_i}(y)$.

2.2 Fuzzy 数的描述与表达

定义约束条件 $g_i(x)\leqslant\tilde{b}_i$ 是实数域 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 Fuzzy 子集，用隶属函数 $\mu_i(x)$ 来反映 Fuzzy 约束条件的满足情况. 根据扩展原理[2]，定义 $\mu_i(x)$ 为

$$\mu_i(x)=\bigvee_{y\geqslant y_i(x)}\mu_{\tilde{y_i}}(y). \tag{3}$$

其中"$\vee$"表示求最大值运算. $\mu_i(x)$ 表示决策者对第 i 个 Fuzzy 约束条件在 x 处的满意度.

对于一般 Fuzzy 数 $\tilde{b}_i$，$\mu_i(x)$ 具有如下性质：

令 $b_i=\max\{r\in\mathbb{R}\mid\mu_{\tilde{b}_i}(r)=\mathrm{high}\geqslant\mu_{\tilde{b}_i}(y)\ \forall\ y\in\tilde{b}_i\}$，一般地，high=1.

性质 1 如果 $g_i(x)\leqslant b_i$，则 $\mu_i(x)=\mu_{\tilde{b}_i}(b_i)$.

性质 2 如果 $\mu_{\tilde{b}_i}(y)$ 当 $y>b_i$ 是单调非增连续函数，那么对于 $g_i(x)>b_i$，$\mu_i(x)=\mu_{\tilde{b}_i}(g_i(x))$.

性质 3 如果 $\mu_{\tilde{b}_i}(y)$ 当 $y>b_i$ 是非单调连续函数，那么对于 $g_i(x)>b_i$，$\mu_i(x)$ 是阶梯型的非增连续函数.

特别地，对于某些具有特殊性质的 Fuzzy 数 $\tilde{b}_i$，如弹性增加量型(Tolerance 型)，三角型，梯型，L-R 型，区间数型来说，$\mu_i(x)$ 具有很好的性质.

同理，Fuzzy 目标 $\widetilde{\max}z=f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是非精确定义的目标，可被视为实数域 $\mathbb{R}$ 上的 Fuzzy 子集，用 $\mu_0(x)$ 来描述 Fuzzy 目标 $\widetilde{\max}z=f(x)$，表示目标 z 是"最大"的程度. 可以根据实际情况构造相应的隶属函数表达式. 一般地，定义

$$\mu_0(x)=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant z_0-p_0,\\ 1-\dfrac{z_0-f(x)}{p_0}, & z_0-p_0\leqslant f(x)\leqslant z_0,\\ 1, & f(x)\geqslant z_0.\end{cases} \tag{4}$$

其中，z_0 是决策者希望达到的"最大"水平(Aspiration level)，表示当目标值达到或大于 z_0 时被认为到达最大，即属于"最大"的程度是"1"；p_0 是最坏情况下的容差(Worst tolerance)，表示当目标值等于或小于 z_0-p_0 时被认为是没有达到"最大"，即属于"最大"的程度是"0"；随着目标值从 z_0-p_0 到 z_0 方向的增加，目标属于"最大"的程度增加；当然，$\mu_0(z)(z_0-p_0\leqslant z\leqslant z_0)$ 也可以取非线性函数如指数函数，幂函数等.

$\mu_0(x)$ 是一个单调非减的连续函数，表示决策者对 Fuzzy 目标的满意度. 于是 Fuzzy 目标/资源约束非线性规划对称模型等价于如下确定型非线性规划模型 NLP：

$$\begin{cases}\max\ \alpha\\ \mathrm{s.t}\ \mu_0(x)\geqslant\alpha,\\ \mu_i(x)\geqslant\alpha,\quad i=1,2,3,\cdots,m,\\ x\geqslant 0,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1.\end{cases} \tag{5}$$

其中 α 是决策者对 Fuzzy 目标和 Fuzzy 约束条件的最小满意度，即

$$\alpha=\min\{\mu_0(x),\mu_i(x),i=1,2,\cdots,m\}.$$

3 基于遗传算法的 Fuzzy 最优解

3.1 Fuzzy 最优解的定义

一般来说，确定性非线性规划 NLP(5)有最优解 (x^*,α^*)，即 Fuzzy 约束条件和 Fuzzy 目

标在 x^* 处于最佳结合点. 一般来说,α^* 是唯一的,但 x^* 不唯一,况且这时的 x^* 常常不是 Fuzzy 目标的最大值或 DM 对某些准则所需要的解;另一方面,精确最优解在 Fuzzy 环境下常常是毫无意义的,DM 需要的是多个 Fuzzy 目标和 Fuzzy 约束条件都满意的解,供 DM 在交互式环境下对于不同的准则作出不同的决策. 为此引进 Fuzzy 最优解的概念.

定义 1　Fuzzy 目标/资源约束非线性规划(2)的 Fuzzy 最优解是如下定义的 Fuzzy 集 $\widetilde{S}$.

$$\widetilde{S} = \{(x, \mu_{\widetilde{S}}(x)) \mid x \in (\mathbb{R}^n)^+, \mu_{\widetilde{S}}(x) = \min\{\mu_0(x), \mu_i(x), i = 1,2,\cdots,m\}\}. \tag{6}$$

令

$$S_\alpha = \{x \in (\mathbb{R}^n)^+, \mid \mu_{\widetilde{S}}(x) \geqslant \alpha\}, \quad \alpha \in [0,1].$$

那么,S_α 是一个普通集合,称为 $\widetilde{S}$ 的水平截集.

定义 2　称 α^* 为最佳结合度,如果 α^* 满足:对于 $\forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha^*$,$S_\alpha$ 非空,$\forall\ \alpha > \alpha^*$,$S_\alpha$ 为空集.

性质 4　如果 $g_i(x)(i = 1,2,\cdots,m)$ 和 $f(x)$ 分别是 $(\mathbb{R}^n)^+$ 上的凸函数和凹函数,则 $S_\alpha(\forall\ \alpha \in [0,1])$ 是凸集,$\widetilde{S}$ 是凸 Fuzzy 集.

性质 5　如果 $\alpha_k \leqslant \alpha_{k+1}$,则 $S_{\alpha k} \supseteq S_{\alpha k+1}$.

性质 6　$S_1(S_\alpha, \alpha = 1)$ 非空的充要条件是 $\exists\ x_0$ 满足:

$$\begin{cases} f(x_0) \geqslant z_0, \\ g_i(x_0) \leqslant b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m_1, \\ x_0 \geqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

很显然,当 S_1 非空时,式(2)变成一个确定性的非线性规划,本文主要考虑 S_1 为空集的情况,即最佳结合度 $\alpha^* < 1$ 的情况.

在考虑 α^* 的性质之前,先定义一个 α-NLP 问题:

$$\begin{cases} \max\ f(x) \\ \text{s.t}\ x \in Q_\alpha = \{x \mid \mu_i(x) \geqslant \alpha, i = 1,2,\cdots,m\}, \\ x \geqslant 0. \end{cases} \tag{8}$$

对于给定的 α 来说,α-NLP 是一个确定性的 NLP,可用一般非线性规划方法求解. 用 f_0, f_1 分别表示 $\alpha = 0,1$ 时 α-NLP 问题的最优目标函数值.

定义 3　称 S_{α^*} 为空集,如果满足:对于 $\forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,$S_\alpha$ 为空集.

性质 7　如果 $\alpha_k \leqslant \alpha_{k+1}$,则 $Q_{\alpha_k} \supseteq Q_{\alpha_{k+1}}$,$f_{\alpha_k} \geqslant f_{\alpha_{k+1}}$.

性质 8　如果 $z_0 - p_0 = f_0$,则 $\alpha^* = 0$.

性质 9　S_{α^*} 为空集的充分条件是:$z_0 - p_0 > f_0$.

性质 10　如果 $z_0 \leqslant f_1$,则 $\alpha^* = 1.0$.

3.2　基于遗传算法的 Fuzzy 最优解

由以上性质说明,随着 α 的增加,S_α 的"区域"越来越小,直到存在一个 α^*,使得 $\forall\ \delta > 0$,$\alpha = \alpha^* + \delta$,$S_\alpha$ 为空集. 这时 α^* 为最佳结合度,α^* 所对应的 $x^* \in S_\alpha$ 并非是 Fuzzy 目标的最大值或者是决策者对某些准则所需要的解. 根据 Fuzzy 最优解的思想,本文基于遗传算法提出的 Fuzzy 最优解,不是找一个精确的最优解 α^*,而是寻找一个最优解的邻域,使得邻域中的每一个解 x 都是决策者所需要的解,即都是 DM 在 Fuzzy 环境下的"最优解"[6]. 基本思想是首先由 DM 确定一个可接受的 Fuzzy 最优解隶属度 α_0. 随机产生一个有 NP(种群大小)个个体的种群,每个个体按其适应性函数的大小被选取向 Fuzzy 目标函数和 Fuzzy 约束条件隶属度增大的方向移动(产生子个体),对于隶属度小于 α_0 的子个体,重新赋给一个更小的隶属度,使得在

以后的迭代中比具有较高隶属度的子个体更小的机会被选取产生子个体.这样,随着迭代步数的增加,隶属度小于 α_0 的子个体逐渐地被淘汰而留下的则是隶属度较大的子个体;于是经过一定数目的迭代后产生的种群,其子个体的隶属度 α_k 都大于 α_0 即 $S_{\alpha_k} \subseteq S_{\alpha_0}$,况且 S_{α_R} 的每个元素都是 DM 所希望的解.

对于个体 x 来说,令

$$\mu_{\min}(x) = \min\{\mu_0(x), \mu_1(x), \cdots, \mu_m(x)\}.$$

构造

$$D(x) = w_0(x)\nabla\mu_0(x) + \sum_{i=1}^{m} w_i \nabla\mu_i(x). \tag{9}$$

称 $D(x)$ 为权重梯度方向[7],w_i 为具有如下形式的梯度方向权重.

$$w_i = \begin{cases} 0, & \mu_i = 1, \\ \dfrac{1}{\mu_i - \mu_{\min} + e}, & \mu_{\min} \leqslant \mu_i < 1. \end{cases} \tag{10}$$

e 是预先设置的充分小的调整正数.

个体 x_i^k 沿权重梯度方向 $D(x)$ 变异产生子个体 x_j^{k+1} 可以描述为

$$x_j^{k+1} = x_i^k + \beta^k D(x_i^k). \tag{11}$$

其中 β^k 是均值衰减的 Erlang 分布随机数步长,$E(\beta^k) = E(\beta^{k-1})/M$,($M > 1$ 称为衰减因子).计算 x_j 的隶属度 $\mu_{\tilde{S}}(x_j)$ 如下:

$$\mu_{\tilde{S}}\ (x_j) = \begin{cases} \mu_{\min}, & \text{if} \quad \mu_{\min} \geqslant \alpha_0, \\ \varepsilon\mu_{\min}, & \text{else}. \end{cases} \tag{12}$$

其中 α_0 是决策者事先确定的可以接受的满意度,$\varepsilon \in \bigcup\ (0,1)$.

从(12)式可以看出,对于 $x_j \notin S_{\alpha_0}$,赋给它一个更小的隶属度,但非零,表明它将以更小的概率被选择作为母体产生子个体.

本文使用的遗传算法,基因表达式用 n 维实变量表示,不使用交叉算子,是一类沿权重梯度方向变异的新型遗传算法[7],其收敛性分析参见[7].

4 交互式环境确定满意解

在实际生产中的 Fuzzy 目标/资源约束问题,DM 的目标常常是利润、总收入、年产量等,约束常常是各种制造资源和能力的约束;为方便 DM 从 Fuzzy 最优解中找出自己最关心的准则的满意解,本文设计了一个人机交互式方法以支持DM 在 Fuzzy 环境下的科学决策.其基本思想是:首先,请 DM 确定一个可接受的 Fuzzy 最优解的满意度 α_0;通过人机交互方式,显示表达 DM 的 Fuzzy 目标和 Fuzzy 约束条件的满意度(隶属度)函数预选曲线,供 DM 选用并确定 DM 最为关心的准则,这些准则包括目标函数值、决策变量(产量)、资源约束等,然后借助于 GA 方法,迭代求解各准则的最大和最小值及对应的隶属度.

Step 1 初始化.

Substep 1.1 输入可接受的 Fuzzy 目标和 Fuzzy 约束条件满意度(隶属度)α_0 和最大迭代步数 NG,种群大小 NP.

Supstep 1.2 输入决策者最为关心的准则指标集 CS $= \{0,1,2,\cdots,n,n+1,\cdots,n+m\}$ 分别代表目标、决策变量和资源约束.给定各准则 $r \in$ CS 的最大最小初值.

Substep 1.3 输入表达 DM 的 Fuzzy 目标和 Fuzzy 约束条件隶属函数曲线类型.

Step 2 随机产生初始种群,计算其对应的隶属函数.

Step 3　设置迭代步数 $k=1$.

Step 4　对于个体 $j(j=1,2,\cdots,\mathrm{NP})$，计算其适应性函数 $F(j)$ 和选择概率 $P(j)$：

$$F(j)=\mu_{\tilde{S}}(x_j)+e,\quad P(j)=\frac{F(j)}{\sum_{i=1}^{\mathrm{NP}}F(i)}.$$

Step 5　产生新个体 $x_j(j=1,2,\cdots,\mathrm{NP})$：

选取个体 x_i 按如下方式产生子个体 x_j：

$$x_j^k=x_i^{k-1}+\beta^{k-1}D(x_i^{k-1}).$$

Step 6　对于新个体 $j(j=1,2,\cdots,\mathrm{NP})$ 按(12)计算隶属函数值 $\mu_{\tilde{S}}(x_j)$，更新最优隶属函数值 $\mu_{\max}$ 及各准则 r 的最大最小值.

Step 7　$k+1\to k$，如果 $k\leqslant\mathrm{NG}$，转 Step 4.；否则，转 Step 8.

Step 8　输出最优隶属函数值 $\mu_{\max}$ 及各准则 r 的最大最小值.

5　计算实例及仿真结果

例 1

$$\begin{cases}\widetilde{\max}f(x)=k_1x_1^{1-1/a_1}-c_1x_1+k_2x_2^{1-1/a_2}-c_2x_2,\\ \text{s.t. }2x_1+3x_2\leqslant\widetilde{50},\quad 4x_1+2x_2\leqslant\widetilde{44},\\ 3x_1+2x_2=\widetilde{36},\quad x_1,\quad x_2\geqslant 0,\\ p_1=30,\ p_2=20,\ p_{\tilde{3}}=p_3^+=5.0;\ k_1=50,\ c_1=8.0;\ k_2=45,\ c_2=10,\ a_1=a_2=2.\end{cases}$$

例 1 是一个典型的 Fuzzy 非线性规划对称模型，取参数 NG=52，NP=50，Erlang 分布均值初始值 $E(\beta)=40$ 时的仿真结果如表 1 所示.

表 1　$z_0=150, z_0-p_0=120, \alpha_0=0.25$ 时各准则的最优解

Criteria	x_1	x_2	$f(x)$	$\mu_{\tilde{S}}(x)$	Resource	Meaning
α^*	9.76222	5.06271	128.75000	0.29167		Opt. Mem. Deg.
0(1)	7.88529	6.00671	127.54300	0.25143		Min. Obj.
0(2)	9.76222	5.06271	128.75000	0.29167		Max. Obj.
1(1)	7.69458	4.80628	127.73060	0.25769		Min. prod. A
1(2)	10.64834	3.80453	127.70040	0.25668		Max. prod. A
2(1)	8.89719	3.76743	127.63340	0.25445		Min. prod. B
2(2)	8.63742	6.40122	127.68870	0.25629		Max. prod. B
3(1)	8.89719	3.76743	127.63340	0.25445	29.09666	Min. Reso. R_1
3(2)	8.89301	6.31004	127.90030	0.26334	36.71612	Max. Reso. R_1
4(1)	7.69458	4.80628	127.73060	0.25769	40.39088	Min. Reso. R_2
4(2)	10.64834	3.80453	127.70040	0.25668	50.20244	Max. Reso. R_2
5(1)	7.69458	4.80628	127.73060	0.25769	32.69630	Min. Reso. R_3
5(2)	9.78006	5.20287	128.74040	0.25082	39.74592	Max. Reso. R_3

表 1 列出了不同准则下 DM 的最优解及对应的 DM 对 Fuzzy 目标函数和 Fuzzy 约束条件的满意度. DM 可以根据不同的准则作出相应的决策.

6　结　　论

本文建立了一类(连续型)Fuzzy 目标/资源约束非线性规划问题的对称模型；利用遗传算法的思想，提出了求解该模型的模糊最优解方法；仿真结果表明，该算法不仅能够得到具有较高精确度的最优解，通过人机交互方式，还能够得到 DM 对于不同准则的具有较高隶属度(满

意度)的"最优"解,以利于 DM 在 Fuzzy 环境下的决策.

参考文献

1 Bellman,R. E. and Zadeh,L. A.. Decision making in a fuzzy environment. Management Science,1970,17(2):141—164

2 Lai,Y. J. and Hwang,C. L.. Fuzzy Mathematical Programming Berlin:Springer-Verlag,1992

3 Zimmermann,H. J.. Fuzzy Sets Theory and It's Applications. Hinghum:Kluwer-Nijhoff,1985

4 Tanaka,H. and Asia,K.. Fuzzy solution in fuzzy linear programming. IEEE Trans. Syst. Man,and Cybern. ,1984,14(2); 325—328

5 Sakawa,M. and Yano,H.. An interactive fuzzy satisfacing method for multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters. Fuzzy Sets and Systems,1989,30(10):221—238

6 Tang,J. and Wang,D.. An interactive approach based on GA for a type of quadratic programming problems with fuzzy objective & resources. Computers and Operations Research,1997,24(5):413—422

7 唐加福,汪定伟.一种求解非线性规划问题的改进遗传算法.东北大学学报,1997,18(5):490—493

Fuzzy Optimal Solution Method Based on GA for Fuzzy Nonlinear Programming Symmetric Model

TANG Jiafu and WANG Dingwei

(School of Information Science & Engineering,Northeastern University · Shenyang,110006,PRC)

Abstract: Based on extensional principle and membership function,this paper proposed a method to describe and formulate fuzzy objective and fuzzy resources constraints. It transfers fuzzy nonlinear programming symmetric model to a crisp nonlinear programming model. A fuzzy optimal solution method based on GA for this type of symmetric model is also proposed in this paper.

Key words: fuzzy nonlinear programming; fuzzy optimal solution; membership function; genetic algorithm

本文作者简介

唐加福 1965年生.1989年毕业于湖南师范大学数学系,获得理学学士学位.1992年毕业于东北大学自动控制理论及应用专业,获工学硕士学位.现任东北大学自动控制系讲师,博士研究生.感兴趣的领域是Fuzzy优化理论与方法,智能优化方法.在国内外杂志及学术会议上发表论文15篇.

汪定伟 1948年生.1993年毕业于东北大学自动控制理论及应用专业,获工学博士学位.1994年在美国北卡州立大学作博士后研究工作,现为东北大学自动控制系教授,博士生导师.感兴趣的领域是CIMS中生产存储管理的建模,优化与控制;Fuzzy优化理论与方法;智能化优化方法等.在国内外重要刊物发表论文50余篇,出版专著二部,译著一部.