一种鲁棒模型参考自适应控制*

赵晓晖　冯纯伯
（长春邮电学院通信工程系·长春，130012）（东南大学自动化所·南京，210096）

摘要：针对一类参数未知、具有常值扰动和未建模误差的线性离散系统，此文给出了一种模型参考间接自适应控制算法. 该方法在未知系统高频增益符号时，可保证系统的非奇异性. 同时，对于上述干扰具有鲁棒性. 文中提出的自适应控制器可使闭环系统全局渐近稳定.

关键词：模型参考自适应控制；极点配置；鲁棒性；全局渐近稳定性

1 引　言

由参考文献[1]～[5]知，在模型参考自适应控制问题中，多数假定系统模型高频增益 b_0^* 的符号已知，以便保证不会由于可能出现的其估计值为零而导致控制器出现奇异性. 它是自适应控制理论中一条重要的假设条件. 能否从理论上证明在建立控制器时可以取消这个先验假设便成了有意义的研究课题之一. 其中文[8]给出的防止奇异性发生的自适应算法尤为具有推广意义. 遗憾的是它只讨论了无噪声情况下理想系统的调节问题. 而且由于采用周期调节方法引起控制性能指标下降. 本文从克服上述弱点出发，给出一种在有常值扰动和未建模误差情况下具有鲁棒性的间接模型参考自适应控制器. 它保持原方法能避免奇异性的性质，又保证了闭环系统的全局渐进稳定性. 此外，如果各种干扰为零，系统被输入信号充分激励，则跟踪误差最终趋于零.

2 未知系统的参数辨识

考虑如下单输入单输出线性离散时不变系统

$$A^*(q^{-1})y_t = q^{-d}B^*(q^{-1})u_t + v_t. \tag{1}$$

式中 u_t 和 y_t 分别是系统的输入和输出，v_t 是外界扰动. (1) 式中的多项式 $A^*(q^{-1})$ 和 $B^*(q^{-1})$ 可分别表示为

$$A^*(q^{-1}) = 1 + a_1^* q^{-1} + \cdots + a_n^* q^{-n},$$

$$B^*(q^{-1}) = b_0^* + b_1^* q^{-1} + \cdots + b_m^* q^{-m}, \quad d + m \leqslant n, \quad d \geqslant 1.$$

m, n 和 d 分别是多项式 $B^*(q^{-1})$ 和 $A^*(q^{-1})$ 的阶次和系统的时延. (1)式还可以写成

$$y_t = \varphi_{t-1}^{\mathrm{T}}\theta^* + v_t. \tag{2}$$

式中信号向量和未知参数向量分别为 $\varphi_{t-1} = [u_{t-d}, \cdots, u_{t-d-m}, -y_{t-1}, \cdots, -y_{t-n}]^{\mathrm{T}}$ 和 $\theta^* = [b_0^*, \cdots, b_m^*, a_1^*, \cdots, a_n^*]^{\mathrm{T}}$. 本文对系统(1)式做如下假设：

假设 1　系统的阶次 n, m 和 d 已知.

假设 2　$B^*(q^{-1})$ 是一 Hurwitz 多项式，$|b_0^*| \neq 0$.

假设 3　外界扰动 v_t 满足下述不等式

$$|v_t| \leqslant \eta + \mu \|\varphi_{t-1}\|_2, \quad \eta \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0. \tag{3}$$

该扰动上界 η 和 μ 已知. 其中 $\|\varphi_{t-1}\|_2 = \varphi_{t-1}\varphi_{t-1}^{\mathrm{T}}$ 是欧氏范数. 由(3)式可知系统的未建模误差

* 国家自然科学基金资助项目(69574005).
本文于 1995 年 1 月 4 日收到. 1998 年 6 月 2 日收到修改稿.

可通过 $\mu\|\varphi_{t-1}\|_2$ 间接反映出来[9].

为估计系统的未知参数向量 θ^*，首先对(2)式进行归一化处理，即

$$\bar{\varphi}_{t-1}=\frac{\varphi_{t-1}}{1+\|\varphi_{t-1}\|_2},\quad \bar{y}_t=\frac{y_t}{1+\|\varphi_{t-1}\|_2},\quad \bar{v}_t=\frac{v_t}{1+\|\varphi_{t-1}\|_2}.$$

于是带有死区的最小二乘递推估计算法为

$$\theta_t=\theta_{t-1}+\lambda_t F_t\bar{\varphi}_{t-1}e_t,\quad \tilde{\theta}_t=\theta_t-\theta^*,$$

$$F_t=F_{t-1}-\frac{\lambda_t F_{t-1}\bar{\varphi}_{t-1}\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}}{1+\lambda_t\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}\bar{\varphi}_{t-1}},\quad F_0=I.$$

(4)式中辨识参数的估计预报误差为

$$e_t=\bar{y}_t-\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}\theta_{t-1}.$$

而 θ_t 是未知参数 θ^* 的估计值，$\theta_t=[b_0,\cdots,b_m,a_1,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$. 死区切换函数定义为

$$\lambda_t=\begin{cases}1, & e_{st}^2\geqslant\alpha_1\delta_t^2/(1-\alpha_2),\\ 0, & e_{st}^2<\alpha_1\delta_t^2/(1-\alpha_2).\end{cases}$$

式中增广误差 e_{st} 和扰动 $\bar{v}_t$ 的上界 δ_t 分别定义为

$$e_{st}^2=e_t^2+\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}^2\bar{\varphi}_{t-1},$$

$$|\bar{v}_t|\leqslant\delta_t=\mu+\frac{\eta}{1+\|\varphi_{t-1}\|_2}\leqslant\mu+\eta,$$

$\alpha_1=1+\mathrm{tr}F_0$，$\mathrm{tr}F_0$ 是矩阵 F_0 在 $t=0$ 时刻的迹，α_2 是一任选小正常数. 于是有定理

定理 1 由(4)～(9)式给出的最小二乘递推参数辨识估计算法具有下列收敛性

1) F_t 和 θ_t 均有界收敛.

2) 当 $\lambda_t=1$ 时 $\sum_{i=1}^{t}(\lambda_i e_{si})^2$ 有界，即 e_{st}^2 有界. 当 $\lambda_t=0$ 时，e_{st} 有界.

证 将(2)式归一化处理后得 $\bar{y}_t=\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}\theta^*+\bar{v}_t$，将其代入(6)式有

$$e_t=-\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}_{t-1}+\bar{v}_t.$$

(4)式两端同减去 θ^* 可得

$$\tilde{\theta}_t=\tilde{\theta}_{t-1}+\lambda_t F_t\bar{\varphi}_{t-1}e_t.$$

对于(5)式应用矩阵求逆引理[9]便可得

$$F_t^{-1}=F_{t-1}^{-1}+\lambda_t\bar{\varphi}_{t-1}\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}.$$

由(11)式和(12)式可以求得

$$\tilde{\theta}_t^{\mathrm{T}}F_t^{-1}\tilde{\theta}_t=\tilde{\theta}_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}^{-1}\tilde{\theta}_{t-1}+\lambda_t(\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}_{t-1}+e_t)^2+\lambda_t e_t^2(\lambda_t\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}F_t\bar{\varphi}_{t-1}-1).$$

又知

$$\lambda_t\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}F_t\bar{\varphi}_{t-1}-1=\frac{-1}{1+\lambda_t\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}\bar{\varphi}_{t-1}}.$$

将(10)式和(14)式代入(13)式可得

$$\tilde{\theta}_t^{\mathrm{T}}F_t^{-1}\theta_t=\tilde{\theta}_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}^{-1}\tilde{\theta}_{t-1}+\lambda_t\bar{v}_t^2-\frac{\lambda_t e_t^2}{1+\lambda_t\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}\bar{\varphi}_{t-1}}.$$

对(5)式等号两端求矩阵的迹可得

$$\mathrm{tr}F_t=\mathrm{tr}F_{t-1}-\frac{\lambda_t\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}^2\bar{\varphi}_{t-1}}{1+\lambda_t\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}\bar{\varphi}_{t-1}}.$$

定义一 Lyapunov 函数

$$V_t = \tilde{\theta}_t^{\mathrm{T}} F_t^{-1} \tilde{\theta}_t + \mathrm{tr} F_t, \tag{17}$$

对(17)式求差分，并将(15)式和(16)式代入之，有

$$V_t - V_{t-1} = \lambda_t \bar{v}_t^2 - \frac{\lambda_t e_{st}^2}{1 + \lambda_t \bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}} F_{t-1} \bar{\varphi}_{t-1}} \leqslant \lambda_t \delta_t^2 - \frac{\lambda_t e_{st}^2}{1 + \lambda_t \bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}} F_{t-1} \bar{\varphi}_{t-1}}. \tag{18}$$

对(5)式进行迭代求和可得 $F_t = F_0 - \sum_{i=1}^{t} \frac{\lambda_i F_{i-1} \bar{\varphi}_{i-1} \bar{\varphi}_{i-1}^{\mathrm{T}} F_{i-1}}{1 + \lambda_i \bar{\varphi}_{i-1}^{\mathrm{T}} F_{i-1} \bar{\varphi}_{i-1}}$，由于求和项是一半正定矩阵，故 $F_t \leqslant F_0$. 又由于 $\| \bar{\varphi}_t \| < 1$，所以 $1 + \lambda_t \bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}} F_{t-1} \bar{\varphi}_{t-1} \leqslant 1 + \mathrm{tr} F_0 = \alpha_1$. 据此可由(8)式推得

$$V_t - V_{t-1} \leqslant \lambda_t \delta_t^2 - \frac{\lambda_t e_{st}^2}{\alpha_1} = \frac{\lambda_t}{\alpha_1}(\alpha_1 \delta_t^2 - e_{st}^2)$$

$$\leqslant -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \lambda_t e_{st}^2. \quad \text{（利用(7)式）} \tag{19}$$

由于 V_t 是一正实函数，所以 V_t 收敛. 这就意味着 $\alpha_1 \delta_t^2 - e_{st}^2$ 随时间的增加而趋于零. 而当 $\lambda_t = 0$ 时，由(4)式和(5)式可得 $F_t = F_{t-1}$ 和 $\theta_t = \theta_{t-1}$，所以 F_t 和 θ_t 有界收敛. 又由(7)式可得，当 $\lambda_t = 0$ 时，$e_{st} < \sqrt{\frac{\alpha_1 \delta_t^2}{1 - \alpha_2}}$. 因 δ_t 有界，所以 e_{st} 有界. 对(19)式做递推运算得

$$0 < V_t \leqslant V_0 - \sum_{i=1}^{t} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \lambda_i e_{si}^2,$$

因此有下述不等式

$$\sum_{i=1}^{t} (\lambda_i e_{si})^2 = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i e_{si}^2 \leqslant \frac{\alpha_1}{\alpha_2} V_0. \tag{20}$$

于是定理证毕.

3　控制器设计和修正辨识模型估计误差

由上节知 $\hat{\theta}_t$ 和 F_t 有界收敛，故可定义修正参数向量 $\bar{\theta}_t = \theta_t + F_t \beta_t$[8]. 其中 $\bar{\theta}_t = [\bar{b}_0, \cdots, \bar{b}_m, \bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_n]^{\mathrm{T}}$. 辨识参数的修正由适当选择有界向量 β_t 来完成. 为了保证 $|\bar{b}_0|$ 有下界，也就是说自适应控制算法中无奇异性产生，定义参数估计修正向量 β_t 如下[8]

$$\beta_t = \begin{cases} [f_{11}^{-\frac{1}{2}}, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}}, & \text{如果} \sqrt{f_{11}} - 2|b_0| \geqslant \alpha |b_0|\text{；或} \\ & -\alpha\sqrt{f_{11}} < \sqrt{f_{11}} - 2|b_0| < \alpha|b_0| \text{ 且} \sqrt{f_{11}} - 2|b_0| \text{ 递减，} \\ 0, & \text{如果} \sqrt{f_{11}} - 2|b_0| \leqslant -\alpha\sqrt{f_{11}}\text{；或} \\ & -\alpha\sqrt{f_{11}} < \sqrt{f_{11}} - 2|b_0| < \alpha|b_0| \text{ 且} \sqrt{f_{11}} - 2|b_0| \text{ 递增.} \end{cases} \tag{21}$$

式中 α 是一小滞环常数($0 < \alpha \ll 1$)，f_{11} 是矩阵 F_t 的首行首列元素.

引理 1　考虑上述最小二乘辨识算法(4)～(9)式和参数辨识修正策略(21)式，下列性质成立

1) $|b_0| + \sqrt{f_{11}} \geqslant \frac{|b_0^*|}{\max\{1, V_0\}}$，（$V_0$ 由式(17)给出）

2) $|\bar{b}_0| \geqslant \frac{1-\alpha}{3+\alpha} \frac{|b_0^*|}{\max\{1, V_0\}}$，其中 $\bar{b}_0 = b_0 + \sqrt{f_{11}}$.

3) $\bar{\theta}_t$ 收敛. β_t 有界收敛且切换次数有限.

证　本文略. 详见文献[8].

注 1) 说明 b_0 和 f_{11} 不可能同时为零. 因此当 b_0 趋于零时可在线修正它,防止出
性.

2) 保证 $|\bar{b}_0|$ 有下界.

就此可以定义极点配置控制器如下式

$$S(q^{-1})B(q^{-1})u_t = -R(q^{-1})y_t + C(q^{-1})y^*_{t+d}.$$

式中多项式分别为 $B(q^{-1}) = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 q^{-1} + \cdots + \bar{b}_m q^{-m}$, $S(q^{-1}) = 1 + s_1 q^{-1} + \cdots + s_{n-m} q$
$R(q^{-1}) = r_1 q^{-1} + r_2 q^{-2} + \cdots + r_n q^{-n}$. y^*_{t+d} 是理想输出信号. $S(q^{-1})$ 和 $R(q^{-1})$ 是 Eucle
式

$$A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d}R(q^{-1}) = C(q^{-1})$$

的解. 式中 $A(q^{-1}) = 1 + \bar{a}_1 q^{-1} + \cdots + \bar{a}_n q^{-n}$. 而 $C(q^{-1})$ 是一选定的 Hurwitz 多项式.
点就是闭环系统的极点. 而控制器(22)式的实现可由下式给出

$$u_t = -\frac{1}{\bar{b}_0}[p_1 u_{t-1} + \cdots + p_n u_{t-n} + r_1 y_{t-1} + \cdots + r_n y_{t-n} - C(q^{-1})y^*_{t+d}].$$

(22)式中 $S(q^{-1})B(q^{-1})u_t = \bar{b}_0 u_t + p_1 u_{t-1} + \cdots + p_n u_{t-n}$ 是物理可实现的. 在采样
$S(q^{-1})B(q^{-1}) = B(q^{-1})S(q^{-1})$. $C(q^{-1})y^*_{t+d} = r_d$ 可视为参考模型, r_d 为理想参考输入.

由于采用了修正估计参数,故系统的修正估计模型为

$$A(q^{-1})y_t = g^{-d}B(q^{-1})u_t + e_{mt}.$$

式中 e_{mt} 是模型的估计误差. 由于在下一节中将用到 e_{mt} 的性质,故先讨论之.

引理 2 归一化处理后的模型估计误差 $\bar{e}_{mt}$ 为有界信号,其收敛性质同 e_{st}.

证 由(24)式可得

$$\begin{aligned} e_{mt} &= A(q^{-1})y_t - B(q^{-1})u_t \\ &= y_t - \varphi_{t-1}^{\mathrm{T}}\theta_t - \beta_t^{\mathrm{T}}F_t\varphi_{t-1} \\ &= (\bar{y}_t - \bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}\theta_t - \beta_t^{\mathrm{T}}F_t\bar{\varphi}_{t-1})(1 + \|\varphi_{t-1}\|_2) \\ &= (e_t - \beta_t^{\mathrm{T}}F_t\bar{\varphi}_{t-1} + \Delta_t)(1 + \|\varphi_{t-1}\|_2). \end{aligned}$$

式中 $\Delta_t = \bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}(\theta_{t-1} - \theta_t) + \beta_t^{\mathrm{T}}(F_{t-1} - F_t)\bar{\varphi}_{t-1}$. 定义归一化的参数修正模型估计误差
$\dfrac{e_{mt}}{1 + \|\varphi_{t-1}\|_2}$, 由(25)式得

$$\bar{e}_{mt} = e_t - \beta_t^{\mathrm{T}}F_{t-1}\bar{\varphi}_{t-1} + \Delta t.$$

利用不等式 $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$, $\forall\, a,b,c$, 可得

$$\begin{aligned} \bar{e}_{mt}^2 &\leqslant 3(e_t^2 + \beta_m^2\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}^{\mathrm{T}}\bar{\varphi}_{t-1} + \Delta_t^2) \quad (\beta_m = \max_t \|\beta_t\|_2) \\ &\leqslant 3\max\{1,\beta_m^2\}(e_{st}^2 + \Delta_t^2) \\ &\leqslant c_1(e_{st}^2 + \Delta_t^2). \end{aligned}$$

由 Δ_t 的表达式可以求得当 $\lambda_t = 1$ 时有

$$\begin{aligned} |\Delta_t| &\leqslant \|\theta_t - \theta_{t-1}\|_1 + \beta_m\|F_t - F_{t-1}\|_1 \\ &\leqslant \|F_t\bar{\varphi}_{t-1}\|_1|e_t| + c_2\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}^2\bar{\varphi}_{t-1} \\ &\leqslant e_t^2 + c_3\bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}^2\bar{\varphi}_{t-1} \\ &\leqslant \max\{1,c_3\}(e_t^2 + \bar{\varphi}_{t-1}^{\mathrm{T}}F_{t-1}^2\bar{\varphi}_{t-1}) \leqslant c_4 e_{st}^2. \end{aligned}$$

这里 $c_1 \sim c_4$ 均为相应的正常数. 综合(26)式和(27)式,考虑定理 1 中之性质 2 可得 $\bar{e}_{mt}$
一结论. 于是引理 2 证毕.

4　闭环系统的稳定性分析

综合(23)式和(24)式可得闭环系统的状态空间表达式

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_1 e_{mt} + B_2 r_d. \tag{28}$$

式中 A_t 是一 $2n \times 2n$ 时变矩阵,可表为

$$A_t = \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & \cdots & \cdots & -\bar{a}_n & 0 & \bar{b}_0 & \cdots & \bar{b}_m & 0 \\ 1 & & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\dfrac{r_1}{\bar{b}_0} & \cdots & \cdots & -\dfrac{r_n}{\bar{b}_0} & -\dfrac{p_1}{\bar{b}_0} & \cdots & \cdots & \cdots & -\dfrac{p_n}{\bar{b}_0} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$x_{t-1} = [y_{t-1},\cdots,y_{t-n},u_{t-1}\cdots,u_{t-n}]^{\mathrm{T}}$, $B_1 = [1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$, $B_2 = [0,\cdots,0,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$. 由于 $\bar{\theta}_t$ 收敛,于是可以得出

$$A_t = A_c + A_{vt}, \quad A_{vt} \to 0. \tag{29}$$

如 $A(q^{-1})$ 和 $B(q^{-1})$ 多项式系数为常数,由(22)式知系统闭环极点就对应于多项式 $C(q^{-1})$ 的零点. 这说明尽管 A_t 时变,但在任意时刻 t,其特征值均严格为负. 由此可以确知 A_t 将收敛到一定常的具有指数稳定的矩阵 A_c. 为分析方便起见,将时间原点定在 t_0 时刻. 将(29)式代入到(28)式中后求解可得

$$x_t = A_c^{t-1} x_0 + \sum_{k=1}^{t} A_c^{t-k}(A_{vk}x_k + B_1 e_{mk} + B_2 r_{dk}).$$

由前面的讨论知 A_c 是指数稳定矩阵,因此有

$$\| x_t \|_2 \leqslant d_2 + \sum_{k=1}^{t} d_1 \sigma^{t-k}(\| A_{vk} \|_2 \| x_k \|_2 + \| B_1 e_{mk} \|_2 + \| B_2 r_{dk} \|_2). \tag{30}$$

式中 $0 < \sigma < 1$. 由于 r_{dk} 是有界理想信号,所以有 $\sum_{k=1}^{t} d_1 \sigma^{t-k} \| B_2 r_{dk} \|_2 < \infty$. 因此(30)式可以改写成

$$\begin{aligned} \| x_t \|_2 \leqslant{} & d_2 + \sum_{k=1}^{t} d_1 \sigma^{t-k} \| A_{vk} \|_2 \| x_k \|_2 + \sum_{k=1}^{t(\lambda_t=1)} d_1 \sigma^{t-k} |\bar{e}_{mk}| (1 + \| \varphi_{k-1} \|_2) \\ & + \sum_{k=1}^{t(\lambda_t=0)} d_1 \sigma^{t-k} |\bar{e}_{mk}| (1 + \| \varphi_{k-1} \|_2). \end{aligned} \tag{31}$$

由于 λ_t 的取值不同,所以 $|\bar{e}_{mk}|$ 的性质不同. 故将式(31)按 λ_t 的不同情况分项. 式(31)右端第三项对应于 $\lambda_t = 1$ 的和式,而第四项则对应于 $\lambda_t = 0$ 的和式. 当 $\lambda_t = 0$ 时,由引理 2 和引理 3 可知

$$\begin{aligned} |\bar{e}_{mk}| \| \varphi_{k-1} \|_2 &\leqslant d_3 \delta_k \| \varphi_{k-1} \|_2 = d_3 (\mu + \frac{\eta}{1 + \| \varphi_{k-1} \|_2}) \| \varphi_{k-1} \|_2 \\ &\leqslant d_3 \mu \| \varphi_{k-1} \|_2 + d_3 \eta \\ &\leqslant d_3 \mu \sup_{0<\tau\leqslant k} \| \varphi_\tau \|_2 + d_3 \eta \\ &\leqslant d_3 \mu \sup_{0<\tau\leqslant k} \| x_\tau \|_2 + d_3 \eta. \end{aligned} \tag{32}$$

综合式(31) 和式(32),考虑引理 3 可得

$$\|x_t\|_2 \leqslant d_4 + \sum_{k=1}^{t} d_1\sigma^{t-k}\|A_{vk}\|_2\|x_k\|_2 + \sum_{k=1}^{t(\lambda_t=1)} d_1\sigma^{t-k}|\bar{e}_{mk}|\,\|x_{k-1}\|_2$$

$$+ \sum_{k=1}^{t(\lambda_t=0)} d_5\sigma^{t-k}\mu \sup_{0<\tau\leqslant k}\|x_\tau\|_2 + \sum_{k=1}^{t(\lambda_t=0)} d_5\eta\sigma^{t-k}$$

$$\leqslant d_6 + \sum_{k=1}^{t}(d_1\|A_{vk}\|_2 + d_5\mu)\sigma^{t-k}\sup_{0<\tau\leqslant k}\|x_\tau\|_2 + \sum_{k=1}^{t(\lambda_t=1)} d_1\sigma^{t-k}|\bar{e}_{mk}|\,\|x_{k-1}\|$$

当 $k\to\infty$ 时，$\|A_{vk}\|_2\to\infty$. 所以存在时间原点 t_0 使得当 $k\geqslant k_0$ 时 $\|A_{vk}\|_2\leqslant\mu$. 于是
可得

$$\|x_t\|_2 \leqslant d_6 + \sum_{k=1}^{t} d_7\mu\sigma^{t-k}\sup_{0<\tau\leqslant k}\|x_\tau\|_2 + \sum_{k=1}^{t(\lambda_t=1)} d_1\sigma^{t-k}|\bar{e}_{mk}|\,\|x_{k-1}\|_2$$

$$\leqslant d_6 + \frac{d_7\mu}{1-\sigma}\sup_{0<\tau\leqslant k}\|x_\tau\|_2 + \sum_{k=1}^{t(\lambda=1)} d_1\sigma^{t-k}|\bar{e}_{mk}|\,\|x_{k-1}\|_2.$$

因此如果 $1-\dfrac{d_7\mu}{1-\sigma}\geqslant\varepsilon>0$，即 $\mu\leqslant\bar{\mu}=\dfrac{(1-\varepsilon)(1-\sigma)}{d_7}$ 时可得

$$\|x_t\|_2 \leqslant \sup_{0<k\leqslant t}\|x_k\|_2 \leqslant d_8 + \sum_{k=1}^{t(\lambda_t=1)} d_9\sigma^{t-k}|\bar{e}_{mk}|\,\|x_{k-1}\|_2.$$

直接应用 Bellman-Gronwall 引理可得结论[10]：闭环系统中的所有信号有界，u_t 和 y_t 有

注意在闭环系统稳定性分析中 $d_0\sim d_q$ 均为相应的正常数. ε 可以间接地看成是系
棒性裕度，它与 σ 和 μ 有关. σ 值由闭环极点的位置决定.

当时 $t\to\infty$，$\lambda_t=0$. 由(7)式、(22)式和(24)式及引理 3 便可以得闭环系统稳态输
误差

$$|y_t - y^*_{t+d}| = \left\|\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}\right\|_1 |e_{mt}| = \left\|\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}\right\|_1 |e_{mt}|(1+\|\varphi_{t-1}\|_2)$$

$$\leqslant \left\|\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}\right\|_1 \alpha(1+\|\varphi_{t-1}\|_2).$$

(34)式中，α 为一常数，$\|H\|_1$ 定义为 $\|H\|_1=\sum_{i=0}^{\infty}|h(i)|$，其中 H 是 z 传递函数，而
H 的脉冲响应. 由于 $C(q^{-1})$ 是一稳定多项式，所以 $|y_t - y^*_{t+d}|$ 有界. 当外界干扰 v_t 为零
0. 因此如果系统充分激励，则可实现理想跟踪. 于是可得下述定理.

定理 2 对闭环系统(28)式，存在一正常数 $\bar{\mu}$，当 $\mu\leqslant\bar{\mu}$ 时，该闭环系统全局稳定(
环系统全局稳定的充分条件)，系统中所有信号有界，u_t 和 y_t 有界. 稳态跟踪误差有界.
无扰动且被充分激励时，可实现理想跟踪.

5 结 论

针对具有常值扰动和未建模误差的离散线性系统，给出一鲁棒间接模型参考自适
器。该控制器对未知系统的高频信号增益符号无预先假设，并能保证控制器不会出现
闭环系统状态方程矩阵在适应过程中解析. 本文发展了文献[8]中提出的方法，将此推
般受扰系统. 同时详细地分析了闭环系统的全局稳定性. 给出了保证这一稳定性的充
讨论了当未建模误差常数 μ 小于某一阈值时控制器的鲁棒性.

参 考 文 献

1 Ortega, R. and Tang, Y.. Robustness of adaptive controllers: a survey. Automatica, 1989, 25(3): 651-677

2 Narendra, K. S. and Annaswamy, A. M.. Stable Adaptive Systems. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1989

3 Sastry, S. and Bodson, M.. Adaptive Control Stability, Convergence, and Robustness. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1989

4 Narendra, K. S., Lin, Y. H. and Valavani, L. S.. Stable adaptive controller design. Part Ⅱ. IEEE Trans. Automat. Contr., 1980, AC-25(3): 440-448

5 Morse, A. S.. Global stability of parameter adaptive control systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1980, AC-25(3): 433-439

6 Nussbaum, R. D.. Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control. Systems and Control Letters, 1983, 3(5): 243-246

7 Mudget, R. D. and Morse. A. S.. Adaptive stabilization of linear systems with unknown high frequency gains. IEEE Trans. Automat. Contr., 1985, AC-30(4): 549-554

8 Lozano, R., Dion, J. M. and Dugard, L.. Singularity-free adaptive pole placement using periodic controller. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, AC-38(1): 104-108

9 Goodwin, G. C. and Sin, K. S.. Adaptive Filtering, Prediction and Control. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1984

10 郭雷. 时变系统. 长春: 吉林科学技术出版社, 1993

A Robust Model Reference Adaptive Control

ZHAO Xiaohui

(Department of Telecommunication Engineering, Changchun Institute of Posts and Telecommunications · Changchun, 130012, PRC)

FENG Chunbo

(Research Institute of Automation, Southeast University · Nanjing, 210096, PRC)

Abstract: This paper presents a new robust MRAC scheme for discrete time systems with bounded disturbances and unmodelled dynamics. The control scheme guarantees globally asymptotical BIBO stability of the closed loop system. It requires neither introduction of persistent excitation nor a priori information on plant parameters and has no singularities.

Key words: MRAC; pole placement; robustness; global stability

本文作者简介

赵晓晖 1957年生. 分别于1982年和1989年在吉林工业大学电子工程系获学士和硕士学位, 1993年获法国贡比涅科技大学计算机与自动控制系博士学位, 1996年结束在东南大学自动化所的博士后研究工作, 现为长春邮电学院通信工程系教授. 目前主要研究领域为自适应控制理论, 信号处理和移动通信理论.

冯纯伯 见本刊1998年第3期第459页.