第 15 卷第 6 期
1998 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 6
Dec., 1998

稳态约束优化控制可行性分析的新方法

戴连奎　李晓东
(浙江大学工业控制技术国家重点实验室·杭州,310027)

摘要: 针对文[5]所提出的稳态约束优化控制问题,本文提出了一种新的可行性分析算法. 基于该算法,不仅可以判断稳态约束优化控制问题是否存在可行解,还可以直接求取约束控制的可行区域,它为复杂工业过程优化控制系统的设计与实施提供了一种有效的分析方法.

关键词: 复杂工业过程; 稳态约束优化; 可行性分析

1 引　言

过程控制已从简单的基于调节的控制发展成为基于优化的控制,即在满足设定值跟踪控制的同时,必须考虑各种约束和综合的要求. 模型预测控制[1]作为一种多变量约束优化控制方法,在石油化工、电力等复杂工业过程中获得了广泛的应用[2,3]. 席裕庚教授等人[4,5]从复杂工业过程优化控制的实际应用背景出发,提出了有约束多目标多自由度优化控制(Constrained Multi-objective Multi-Degree of Freedom Optimization, CMMO)的概念,研究了稳态约束优化控制的可行性问题,并提出了相应的可行性分析算法.

本文针对文[5]所提出的稳态约束优化控制问题,提出了一种新的可行性分析算法. 基于该算法,不仅可以判断稳态约束优化控制问题是否存在可行解,还可以直接求取约束控制的可行区域,它为复杂工业过程优化控制系统的设计与实施提供了一种有效的分析方法.

2 稳态约束优化问题的可行性分析

考虑线性时不变多变量系统 S

$$y(s) = H(s)u(s). \tag{1}$$

其中 $u \in \mathbb{R}^m$ 为控制; $y \in \mathbb{R}^r$ 为过程输出; $H(s)$ 为输入输出传递函数矩阵.

假设系统 S 的稳态增益矩阵存在,这样在稳态条件下系统的输入输出关系可表示为

$$y_s = Hu_s. \tag{2}$$

其中 $y_s = y(0), u_s = u(0)$,分别为输出与输入的稳态值; $H = \{h_{ij} | i = 1,\cdots,r; j = 1,\cdots,m\}$ 为系统 S 的稳态增益矩阵,这里 h_{ij} 为 y_i 与 u_j 之间的稳态增益.

由于执行机构的物理性质和出于安全性的考虑,以及为保证产品质量所提出的工艺要求,使得控制与输出都存在一定的界域要求.

设 $u = [u_1, \cdots, u_m]^{\mathrm{T}}$,其区域要求为 $u_{j,\min} \leqslant u_j \leqslant u_{j,\max}, j = 1, \cdots, m$,其中 $u_{j,\max}, u_{j,\min}$ 为控制变量 u_j 的高低限. 设 $y = [y_1, \cdots, y_r]^{\mathrm{T}}$,其区域要求为 $y_{j,\min} \leqslant y_j \leqslant y_{j,\max}, j = 1, \cdots, r$,其中 $y_{j,\max}, y_{j,\min}$ 为输出变量 y_j 的允许区域.

设控制与输出的约束空间为 $P(u), P(y)$:

$$P(u) = \{u | u_j \in [u_{j,\min}, u_{j,\max}], j = 1, \cdots, m\}, \tag{3}$$

$$P(y) = \{y | y_j \in [y_{j,\min}, y_{j,\max}], j = 1, \cdots, r\}. \tag{4}$$

本文于 1996 年 9 月 9 日收到. 1997 年 5 月 6 日收到修改稿.

定义 1 已知系统S，H 为系统S的稳态增益矩阵，$P(u)$，$P(y)$ 分别为输入与输出的约束空间.若存在某输入 $u \in P(u)$，使得 $y = Hu \in P(y)$；则称系统S的稳态约束优化问题具有可行性.反之，若对于任意输入 $u \in P(u)$，均不能满足 $y = Hu \in P(y)$；则称系统S的稳态约束优化问题不可行.

根据定义1，稳态约束优化问题具有可行性等价于以下约束空间为非空，

$$P_{uy}(u) = \{u \mid u \in P(u), y = Hu \in P(y)\}. \tag{5}$$

将上式写成标准形式，设

$$u_{\min} = [u_{1,\min}, \cdots, u_{m,\min}]^{\mathrm{T}}, \quad u_{\max} = [u_{1,\max}, \cdots, u_{m,\max}]^{\mathrm{T}},$$
$$y_{\min} = [y_{1,\min}, \cdots, y_{r,\min}]^{\mathrm{T}}, \quad y_{\max} = [y_{1,\max}, \cdots, y_{r,\max}]^{\mathrm{T}},$$

则

$$P_{uy}(u) = \{u \mid u_{\min} \leqslant u \leqslant u_{\max}, y_{\min} \leqslant Hu \leqslant y_{\max}\}. \tag{6}$$

其中向量不等式要求其对应的所有元素均满足不等式关系.令

$$F = \begin{bmatrix} I_{m^*m} \\ -I_{m^*m} \\ H_{r^*m} \\ -H_{r^*m} \end{bmatrix}_{2(r+m)^*m}, \quad g = \begin{bmatrix} u_{\min} \\ -u_{\max} \\ y_{\min} \\ -y_{\max} \end{bmatrix}_{2(r+m)^*1}, \tag{7}$$

则

$$P_{uy}(u) = \{u \mid Fu \geqslant g\}. \tag{8}$$

定义 2（凸集的极点定义[6]） 设 T 为非空有界凸集，$x \in T$，若 x 不能表示成 T 中两不同点的凸组合；换言之，若假设 $x = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$，$\lambda \in (0,1)$，$x^{(1)}, x^{(2)} \in T$，必推得 $x = x^{(1)} = x^{(2)}$，则称 x 是凸集 T 的极点.

对于多面集 $T = \{x \mid Ax \geqslant b\}$，具有以下重要性质.

引理 1（多面集的表示定理[6]） 设 $T = \{x \mid Ax \geqslant b\}$ 为非空有界多面集，则

1）存在有限个极点 $x^{(1)}, \cdots, x^{(k)}$；

2）$x \in T$ 的充要条件为

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{(j)}, \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, k.$$

可见，获取约束空间 P_{uy} 的关键在于求取其极点集合或者证明 P_{uy} 为空集.

3 稳态约束优化可行性分析算法

下面首先给出稳态约束优化问题可行的充分必要条件，然后给出约束空间 $P_{uy}(u)$ 的求取方法.

定理 1 系统S的稳态约束优化问题为可行的充分必要条件为，存在 F，g 的某一分解

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

其中 F_1 为 m^*m 满秩方阵，g_1 为 m 维列向量，使得 $F_2 F_1^{-1} g_1 \geqslant g_2$.

在证明定理1以前，首先引入以下引理[6].

引理 2 设 $T = \{x \mid Ax \geqslant b\}$，其中 A 为 p^*n 矩阵，$p > n$，A 的秩为 n. $x^{(0)}$ 为 T 的极点的充分必要条件是 A 和 b 可作下列分解：

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

使得 $A_1x^{(0)} = b_1, A_2x^{(0)} \geqslant b_2$；其中 A_1 为 n^*n 方阵，且 A_1 的秩为 n，b_1 为 n 维列向量.

定理 1 的证明　先证其充分性. 若存在某一分解(9)式，使 $F_2F_1^{-1}g_1 \geqslant g_2$，其中 F_1 为 m^*m 满秩方阵. 取 $u_s = F_1^{-1}g_1$，则 $F_1u_s = g_1$，而且 $F_2u_s \geqslant g_2$；即 $u_s \in P_{uy}$ 或者说满足可行性的要求. 由引理 2 可知，$u_s = F_1^{-1}g_1$ 同时为 $P_{uy}(u)$ 的一个极点.

再证其必要性. 若对 F, g 的任一分解(9) 式，向量不等式 $F_2F_1^{-1}g_1 \geqslant g_2$ 均不能满足，其中 F_1 为 m^*m 满秩方阵. 现用反证法来证明 P_{uy} 为空. 若 P_{uy} 非空，则由引理 1 可知，存在若干个极点均满足 $Fu_s \geqslant g$. 对于某一极点 $u_s^{(0)}$，由引理 2 可知，存在 F, g 的某一分解(9) 式，使 $F_1u_s^{(0)} = g_1, F_2u_s^{(0)} \geqslant g_2$，即 $F_2F_1^{(-1)}g_1 \geqslant g_2$. 这与前提条件相矛盾，因而 P_{uy} 为空.　　证毕.

由定理 1 不仅可以判断系统 S 的稳态约束优化问题是否为可行，而且当问题为可行时，还可以求得约束空间 P_{uy} 的所有极点. 以下算法给出了约束空间 P_{uy} 的求取方法.

稳态约束优化问题可行性分析算法

Step 1　根据对象稳态增益矩阵 H，控制约束 $u_{\min}, u_{\max}$，输出约束 $y_{\min}, y_{\max}$，由(7) 式求取矩阵 F 与向量 g. 令 $k_1 = 1, k_2 = 0$.

Step 2　选取矩阵 $(F|g)$ 中的任 m 行组成子阵$(F_1|g_1)$，而其余部分组成子阵$(F_2|g_2)$. 显然，这种选择的个数不会超过 $k_{\max}$，

$$k_{\max} = \begin{pmatrix} 2r + 2m \\ m \end{pmatrix} = \frac{(2r + 2m)!}{m!(2r + m)!}. \tag{11}$$

Step 3　计算 F_1 的秩. 若 $\mathrm{rank}(F_1) = m$，转 Step 4；否则，转 Step 5.

Step 4　计算向量 $g_0 = F_2F_1^{-1}g_1$，逐个比较向量 g_0 与 g_2 的对应元素. 若存在某一元素使 $g_{0j} < g_{2j}$，则表示向量不等式 $F_2F_1^{-1}g_1 \geqslant g_2$ 不成立；若所有对应元素均有 $g_{0j} \geqslant g_{2j}, j = 1, \cdots, 2r + m$，则表示 $F_2F_1^{-1}g_1 \geqslant g_2$ 成立，令 $k_2 \Leftarrow k_2 + 1$，并保存极点 $Q(k_2) = F_1^{-1}g_1$.

Step 5　若 $k_1 < k_{\max}$，令 $k_1 \Leftarrow k_1 + 1$，转 Step 2 选取 F, g 新的分解；否则，若 $k_1 \geqslant k_{\max}$，转 Step 6.

Step 6　若 $k_2 = 0$，则约束空间 P_{uy} 为空，系统 S 的稳态约束优化问题不可行；否则，P_{uy} 为非空，稳态约束优化问题为可行，而且共有 k_2 个极点，P_{uy} 为由这些极点所组成的多面体.

4　计算举例

本文仍采取文[5]的算例，设系统的稳态增益矩阵 H 与输入输出约束区域 $P(u), P(y)$ 分别为

$$H = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 2.0 & 0.4 & 0.0 \\ 2.3 & 2.3 & 2.1 \end{bmatrix},$$

$$P(u) = \left\{ u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} u_1 \in [-1.0, 2.0] \\ u_2 \in [-0.1, 0.8] \\ u_3 \in [-2.0, 3.0] \end{matrix} \right\}, \quad P(y) = \left\{ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} y_1 \in [1.0, 1.5] \\ y_2 \in [3.0, 3.5] \\ y_3 \in [8.0, 8.5] \end{matrix} \right\}.$$

采用上述稳态约束优化可行性分析算法可证明 $P_{uy}(u)$ 为非空，系统的稳态约束优化问题可行. $P_{uy}(u)$ 为由以下极点集合 $Q(u)$ 所组成的多面体，图 1 以图示方式表示了整个可行控制区域 $P_{uy}(u)$.

$$Q=\left\{\begin{pmatrix}1.52\\-0.10\\2.25\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1.52\\-0.10\\2.49\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1.77\\-0.10\\1.98\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1.77\\-0.10\\2.22\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1.43\\0.36\\1.85\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1.43\\0.36\\2.09\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1.43\\0.80\\1.37\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1.43\\0.80\\1.61\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1.59\\0.80\\1.19\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1.59\\0.80\\1.43\end{pmatrix}\right\}.$$

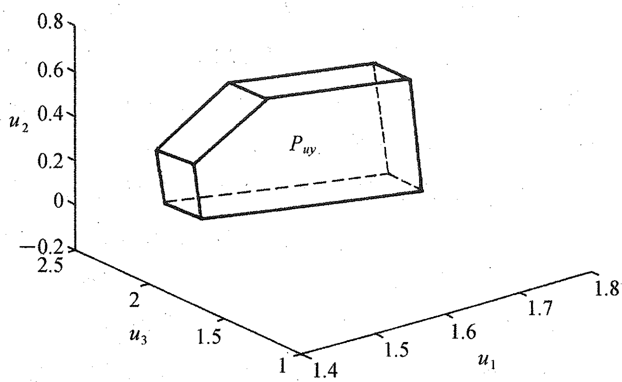

图1 系统S的可行控制区域 $P_{uy}(u)$

5 结 论

本文针对文[5]所提出的稳态约束优化控制问题，提出了一种新的可行性分析算法. 与文[5]相比，本文所提出的分析算法不仅物理意义明确，而且运算量少，便于计算机编程实现. 基于该算法，不仅可以判断稳态约束优化问题是否存在可行解，还可以直接求取约束控制的可行区域，它为复杂工业过程优化控制系统的设计与实施提供了一种有效的分析方法.

参 考 文 献

1 Garcia, C. E. et al.. Model predictive control: theory and practice——a survey. Automatica, 1989, 25(3): 335－348

2 Prett, D. M. and Gillette, R. D.. Optimization and constrained multivariable control of a catalytic cracking unit. Proc. Joint Automatic Control Conference, San Francisco, 1980, WP5-C

3 Cutler, C. R. and Hawkins, R. B.. Constrained multivariable control of a hydrocracker reactor. Proc. American Control Conference, Minneatolis, Minnesota, 1987, 1014－1020

4 席裕庚. 复杂工业过程的满意控制，信息与控制，1995，24(1)：14－24

5 席裕庚，李慷. 工业过程有约束多目标多自由度优化控制的可行性分析. 控制理论与应用，1995，12(5)：590－596

6 陈宝林. 最优化理论与算法. 北京：清华大学出版社，1989

A New Method for Feasibility Analysis of Steady Constrained Optimization Systems

DAI Liankui and LI Xiaodong

(National Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University・Hangzhou, 310027, PRC)

Abstract: The feasibility analysis problem of steady constrained optimization systems is addressed in this paper. A criteria for constrained optimization systems to be feasible is obtained, and an effective algorithm for feasibility analysis is proposed. Using the algorithm, the feasible area of operation variables for complex industrial processes can be obtained.

Key words: complex industrial process; steady constrained optimization; feasibility analysis

本文作者简介

戴连奎 1963年生. 1993年获浙江大学工业自动化专业博士学位. 现为浙江大学副教授. 目前主要研究方向为复杂工业过程的建模、控制与优化.

李晓东 1970年生. 现为浙江大学工业自动化专业博士研究生. 研究方向为复杂工业过程的建模、控制与优化.