第 15 卷第 6 期
1998 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 6
Dec., 1998

具有参数扰动时滞系统的鲁棒镇定性

黎　明

(曲靖师范高等专科学校·云南曲靖,655000)

摘要：利用标量的 Lyapunov 函数，结合代数 Riccati 方程和 Rayleigh's 原理，讨论了具有参数扰动时滞系统的鲁棒镇定性，获得了一个充分条件.

关键词：时滞系统；鲁棒镇定性

1　记号和引言

具有参数扰动时滞系统的稳定性的研究已得到不少结果，本文进一步讨论了文[1]给出的具有参数扰动时滞系统的指数稳定性，得到了一个充分条件，这一条件扩大了参数扰动界.

文[1]给出的系统为：

$$\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t = (A + \Delta A)x(t) + (A_h + \Delta A_h)x(t - h(t)) + (B + \Delta B)U(t), \tag{1}$$

$$y(t) = (C + \Delta C)x(t). \tag{2}$$

向量和矩阵的规定参见文[1].

系统(1)的初始条件为

$$x(t) = \Psi(t), \quad t \in [t_0 - \bar{h}, t_0].$$

这里 $\Psi(t)$ 是 $[t_0 - \bar{h}, t_0]$ 上的连续函数.

倘若所有状态的当前值有效，状态反馈控制为

$$U(t) = -0.5B^{\mathrm{T}}Px(t), \tag{3}$$

这里 P 是对称正定矩阵且满足代数 Riccati 方程

$$(A + \alpha I)^{\mathrm{T}}P + P(A + \alpha I) - PBB^{\mathrm{T}}P = -Q, \tag{4}$$

这里 α 是正常数，Q 是任意对称正定矩阵.

为了讨论方便，引入下面的记号：

$\|A\|$：矩阵 A 的范数；$\lambda_M(A)$：对称实矩阵 A 的最大特征值；$\lambda_m(A)$：对称实矩阵 A 的最小特征值；σ：$\lambda_M(P)/\lambda_m(P)$.

2　主要结果

将(3)代入(1)得闭环系统：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t &= (\bar{A} + \Delta\bar{A})x(t) + (A_h + \Delta A_h)x(t - h(t)), \\ y(t) &= (C + \Delta C)x(t). \end{aligned} \tag{5}$$

这里 $\bar{A} = A - 0.5BB^{\mathrm{T}}P$，$\Delta\bar{A} = \Delta A - 0.5\Delta BB^{\mathrm{T}}P$.

我们先引入定义：

定义[2]　如果存在常数 $k > 0$ 和 $\rho > 0$ 使得 $\|x(t,t_0,\Psi)\| < k\|\Psi\|\exp\{-\rho(t - t_0)\}$，$t \geqslant t_0$，这里 $x(t,t_0,\Psi)$ 是系统(5)满足初始条件 (t_0,Ψ) 的解，并且 $\|\Psi\| = \|\sup\limits_{\theta\leqslant t_0}\|\Psi(\theta)\|$，则系统(5)的零解指数稳定.

我们有下面的定理：

本文于 1996 年 10 月 14 日收到. 1997 年 10 月 14 日收到修改稿.

定理 假设 (A,B) 是完全可控的，令

$$\eta = 2\alpha\lambda_m(P) + \lambda_m(Q) - 2\delta - \gamma\|B^TP\| - 2(\|A_h\| + \delta_h)\lambda_M(P)\sqrt{\sigma}. \tag{6}$$

若 $\eta > 0$，则闭环系统(5)指数稳定.

证 设标量的 Lyapunov 函数

$$V(t) = x^T(t)Px(t).$$

这里 P 是对称正定矩阵且满足代数 Riccati 方程(4)，计算 $V(t)$ 沿系统(5)的导数

$$\begin{aligned}
\dot V(t) &= \dot x^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot x(t) \\
&= [x^T(t)(\bar A + \Delta\bar A)^T + x^T(t-h(t))(A_h + \Delta A_h)^T]Px(t) \\
&\quad + x^T(t)P[(\bar A + \Delta\bar A)x(t) + (A_h + \Delta A_h)x(t-h(t))] \\
&= x^T(t)(\bar A^T + \Delta\bar A^T)Px(t) + x^T(t)P(\bar A + \Delta\bar A)x(t) \\
&\quad + x^T(t-h(t))(A_h + \Delta A_h)^TPx(t) + x^T(t)P(A_h + \Delta A_h)x(t-h(t)) \\
&= -2\alpha x^T(t)Px(t) - x^T(t)Qx(t) + 2x^T(t)\Delta\bar APx(t) \\
&\quad + 2x^T(t)(A_h^T + \Delta A_h^T)Px(t-h(t)).
\end{aligned}$$

由 Rayleigh's 原理[3]，有

$$\begin{aligned}
\lambda_m(P)\|x(t)\|^2 \leqslant x^T(t)Px(t) \leqslant \lambda_M(P)\|x(t)\|^2, \\
\lambda_m(Q)\|x(t)\|^2 \leqslant x^T(t)Qx(t) \leqslant \lambda_M(Q)\|x(t)\|^2.
\end{aligned} \tag{7}$$

显然，当 $V(t) \geqslant V(t-h(t))$ 时，由(7)有

$$\|x(t-h(t))\|^2 \leqslant V(t-h(t))/\lambda_m(P) \leqslant V(t)/\lambda_m(P) \leqslant \lambda_M(P)/\lambda_m(P)\|x(t)\|^2,$$

所以

$$\begin{aligned}
\dot V(t) &\leqslant -[2\alpha\lambda_m(P) + \lambda_m(Q) - 2\delta \\
&\quad - \gamma\|B^TP\| - 2(\|A_h\| + \delta_h)\lambda_M(P)\sqrt{\sigma}]\|x(t)\|^2 \\
&= -\eta\|x(t)\|^2.
\end{aligned}$$

又因

$$V(t)/\lambda_M(P) \leqslant \|x(t)\|^2 \leqslant V(t)/\lambda_m(P),$$

那么有

$$\dot V(t) \leqslant (-\eta/\lambda_M(P))V(t) = -2\zeta V(t), \quad 其中 \quad \zeta = \eta/2\lambda_M(\dot P),$$

则

$$V(t) \leqslant V(t_0)\exp\{-2\zeta(t-t_0)\},$$

所以

$$\begin{aligned}
\|x(t)\|^2 &\leqslant V(t)/\lambda_m(P) \leqslant (V(t_0)/\lambda_m(P))\exp\{-2\zeta(t-t_0)\} \\
&\leqslant \|x(t_0)\|^2\sigma\exp\{-2\zeta(t-t_0)\}.
\end{aligned}$$

故

$$\|x(t)\| \leqslant \|\Psi\|\sqrt{\sigma}\exp\{-\zeta(t-t_0)\}.$$

由(5)有

$$\|y(t)\| \leqslant (\|C\| + \beta)\|x(t)\| \leqslant (\|C\| + \beta)\|\Psi\|\sqrt{\sigma}\exp\{-\zeta(t-t_0)\}.$$

这就证明了闭环系统(5)是指数稳定的.

若扰动参数矩阵未知，但满足下列条件

$$\{\Delta A: |\Delta A| < A_m\}, \{\Delta A_h: |\Delta A_h| < A_m^h\}, \quad \{\Delta B: |\Delta B| < B_m\}, \{\Delta C: |\Delta C| < C_m\}.$$

则定理中的条件为

$$\eta = 2\alpha\lambda_m(P) + \lambda_m(Q) - 2\|A_m\| - \|B_m\|\|B^TP\| - 2(\|A_h\| + \|A_m^h\|)\lambda_M(P)\sqrt{\sigma}, \tag{8}$$

若 $\eta > 0$，则闭环系统(5)指数稳定.

3 举 例

设系统为

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= (A + A_m)x(t) + (A_h + A_m^h)x(t - h(t)) + (B + B_m)U(t), \\ y(t) &= (C + C_m)x(t). \end{aligned} \tag{9}$$

状态反馈控制为 $U(t) = -0.5B^{T}Px(t)$,

其中 $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_m = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 \end{pmatrix},$

$A_m^h = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}, B_m = \begin{pmatrix} 0.12 \\ 0 \end{pmatrix}, C_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

初始条件为

$$x(t) = \Psi(t) = [2\cos(t), 3\cos(t)], \quad t \in [t_0 - \bar{h}, t_0],$$
$$h(t) = 0.4(1 - \sin(t)), \quad \bar{h} = 0.8.$$

最后,我们选取

$$\alpha = 3.0, \quad Q = \begin{pmatrix} 2.4 & 8.6 \\ 8.6 & 38.6 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 9.675 & -0.023 \\ -0.023 & 9.876 \end{pmatrix},$$

经计算 $\lambda_m(P) = 9.672$, $\lambda_M(P) = 9.878$, $\lambda_m(Q) = 0.4608$, $\| A_m \| = 0.8$,
$\| A_h \| = 1$, $\| A_m^h \| = 0.4189$, $\| B^T P \| = 3.1426$. $\| B_m \| = 0.12$.

由公式(8)有 $\eta = 29.6268 > 0$.

由此可知系统(9)指数稳定.

而由文[1]中的公式(31)计算得

$$\eta = \alpha - \sigma[\| A_m \| + \| A_m^h \| + 0.5 \| B_m \| \| B^T P \| + \| A_h \|] = 0.0466.$$

所以本文定理的适用范围更广.

参 考 文 献

1 Wu, H. S. and Mizukami, K.. Robust stabilization of uncertain linear dynamical systems with-varying delay. J. Optimization Theory and Application, 1994, 82(3): 593—606

2 Xu Daoyi.. Robust stability of neutral differential systems. Automatica, 1994, 30(4): 703—706

3 Lakshmikantham, V., Leela, S. and Martynuk, A. A.. Stability Analysis of Nonlinear Systems. New York: Marcel Dekker Inc. 1989

Robust Stability of Parameter Perturbations Systems with Time Delay

LI Ming

(Qujing Teacher's College · Yunnan Qujing, 655000, PRC)

Abstract: By using the scalar Lyapunov function approach and by incorporating the algebraic Riccati equation Rayleigh's principle, this paper discussed the robust stability of parameter perturbation systems with time delay, which results in sufficient conditions of exponential stability.

Key words: time delay systems; robust stability

本文作者简介

黎 明 1957 年生,曲靖师范高等专科学校数学系讲师. 目前主要研究领域为稳定性与鲁棒性.