第 15 卷第 6 期
1998 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 6
Dec., 1998

具有状态和控制滞后的线性时变时滞系统的输出反馈镇定

毛维杰 孙优贤 曹永岩

(浙江大学工业控制技术研究所·杭州,310027)

摘要：研究具有状态和控制滞后的线性时变时滞系统的静态输出反馈镇定，其设计过程只需解一个特殊的代数 Riccati 方程. 并且指出，系统的动态输出反馈镇定问题可等价为广义系统的静态输出反馈镇定问题. 最后通过实例论证了本方法的有效性.

关键词：线性时变时滞系统；输出反馈镇定；代数 Riccati 方程

1 问 题

考虑如下具有状态和控制滞后的线性时变时滞系统的输出反馈镇定

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{l=1}^{q} D_l x(t - h_l(t)) + Bu(t) + Eu(t - h_{q+1}(t)), \tag{1.1a}$$

$$y(t) = Cx(t), \tag{1.1b}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad \forall\, t \in [-h_{\max}, 0).$$

式中 $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^p, y(t) \in \mathbb{R}^r$ 表示系统(1.1)的状态、输入及输出向量，A, B, C, D_l, E 表示合适维数的常数矩阵，$\varphi(t)$ 是一个连续的矢量初值函数，$h_l(t)$ 表示系统的时变时滞，满足

$$0 < h_l(t) \leqslant h_l < \infty, \quad \dot{h}_l(t) \leqslant d_l < 1,$$

$$h_{\max} = \max_l(h_l), \quad d_{\max} = \max_l(d_l).$$

式中 $h_l, h_{\max}, d_l, d_{\max}$ 均为常数.

2 主要结论

定理 1 线性时变时滞系统(1.1)可由静态输出反馈 $u(t) = Fy(t)$ 镇定，如果存在矩阵 $P = P^{\mathrm{T}} > 0, Q_l = Q_l^{\mathrm{T}} > 0, l = 1, \cdots, q+1$，及参数 $\rho > 0$，满足

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - PRP + \sum_{l=1}^{q+1} Q_l + G^{\mathrm{T}}G < 0. \tag{2.1}$$

其中

$$R = \rho^2 BB^{\mathrm{T}} - \sum_{l=1}^{q} \frac{1}{1-d_l} D_l Q_l^{-1} D_l^{\mathrm{T}} - \frac{\rho^2}{1-d_{q+1}} EE^{\mathrm{T}}, \tag{2.2}$$

$$G = \frac{1}{\rho} FC + \rho B^{\mathrm{T}} P. \tag{2.3}$$

证 略.

推论 1 线性时变时滞系统(1.1)可由静态输出反馈 $u(t) = Fy(t)$ 镇定，如果存在矩阵 $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ 及参数 $\rho, \beta, \gamma > 0$，满足

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - PRP + (q\beta + \gamma) I_n + G^{\mathrm{T}}G = 0. \tag{2.4}$$

其中 G 由(2.3)式确定，

本文于 1996 年 2 月 9 日收到. 1997 年 3 月 4 日收到修改稿.

$$R = \rho^2 BB^{\mathrm{T}} - \sum_{l=1}^{q} \frac{1}{\beta(1-d_l)} D_l D_l^{\mathrm{T}} - \frac{\rho^2}{1-d_{q+1}} EE^{\mathrm{T}}. \tag{2.5}$$

对于具有状态和控制滞后的线性时变时滞系统(1.1)，考虑如下的动态输出反馈

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t), \tag{2.6a}$$

$$u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t). \tag{2.6b}$$

其中 $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ 表示动态输出反馈(2.6)的状态向量，A_c, B_c, C_c, D_c 表示合适维数的常数矩阵，n_c 表示控制器的阶数，则闭环系统可描述为

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BD_cC & BC_c \\ B_cC & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \sum_{l=1}^{q} \begin{bmatrix} D_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h_l(t)) \\ x_c(t-h_l(t)) \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} ED_cC & EC_c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h_{q+1}(t)) \\ x_c(t-h_{q+1}(t)) \end{bmatrix} \\
&= (A_t + B_t F_c C_t) \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \sum_{l=1}^{q} D_{tl} \begin{bmatrix} x(t-h_l(t)) \\ x_c(t-h_l(t)) \end{bmatrix} + E_t F_c C_t \begin{bmatrix} x(t-h_{q+1}(t)) \\ x_c(t-h_{q+1}(t)) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中

$$A_t = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_t = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix}, \quad C_t = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix},$$

$$D_{tl} = \begin{bmatrix} D_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_t = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_c = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

这样，线性时变时滞系统(1.1)的动态输出反馈镇定问题可转化为广义线性时变时滞系统的静态输出反馈镇定问题，本文所提供的静态输出反馈镇定方法仍然适用.

3　算法与实例

假设 C 满秩，基于推论 1 给出 F 的构造算法，具体描述如下：

1) 选定 $\beta, \gamma, \sigma, \rho > 0$;

2) 令 $k = 0, G_k = 0$;

3) 解代数 Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - PRP + (q\beta + \gamma)I_n + G_k^{\mathrm{T}}G_k = 0 \tag{3.1}$$

得对称正定解 P_k;

4) 令 $G_{k+1} = -\dfrac{\sigma}{\rho} B^{\mathrm{T}} P_k C^{\mathrm{T}} (CC^{\mathrm{T}})^{-1} C + \rho B^{\mathrm{T}} P_k, k = k+1$，回到 3).

如果 $P_0, P_1, P_1, \cdots$ 收敛到 P，则方程(2.4)和约束(2.3)、(2.5)均得到满足，最后可得

$$F = -\sigma B^{\mathrm{T}} P C^{\mathrm{T}} (CC^{\mathrm{T}})^{-1}. \tag{3.2}$$

例 1　考虑如下具有状态和控制滞后的线性时变时滞系统，其中

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4.8 \\ 0.8 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.75 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0.75 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

使用本文的算法，令 $d_1 = 0.5, d_2 = 0.4, d_3 = 0.3, \beta = 0.2, \gamma = 0.21, \sigma = 21, \rho = 8$，解矩阵方程(2.4)得 $P = \begin{bmatrix} 0.1101 & 0.0311 \\ 0.0311 & 0.2757 \end{bmatrix} > 0$，则输出反馈控制律

$$u(t) = [-4.6721 \quad -5.4002]^{\mathrm{T}} y(t) \tag{3.3}$$

镇定该线性时变时滞系统.

参考文献

1 Hmamed, A.. Further results on the delay-independent asymptotic stability of linear systems. Int. J. Syst. Sci., 1991, 22(6): 1127—1132

2 Su, J. H., Fong, I. K. and Tseng, C. L.. Stability analysis of linear systems with time delay. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(6): 1341—1344

3 Mahmoud, M. S. and Al-Muthairi, N. F.. Design of robust controllers for time-delay systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(5): 995—999

4 Ni, M. L. and Wu, H. X.. A Riccati equation approach to the design of linear robust controllers. Automatica, 1993, 29(6): 1603—1605

5 Kucera, V. and Souza, C. E. D.. A necessary and sufficient condition for output feedback stabilizability. Automatica, 1995, 31(9): 1357—1359

Output Feedback Stabilization of Linear Systems with Time-Varying Delayed States and Controls

MAO Weijie, SUN Youxian and CAO Yongyan

(Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University · Hangzhou, 310027, PRC)

Abstract: This paper addresses the output feedback stabilization problem of linear systems with time-varying delayed states and controls. The proposed controller can be obtained by solving a special algebraic Riccati equation. It is also shown that the stabilizing controller design of a given delayed linear system via dynamic output feedback is equivalent to that of an augmented delayed linear system via static output feedback. A numerical example is given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: delayed linear system; output feedback stabilization; algebraic Riccati equation

本文作者简介

毛维杰 1969年生. 分别于1994年和1997年在浙江大学获得硕士和博士学位, 现为浙江大学工业控制技术研究所讲师. 主要研究方向为电气传动与控制, 时滞系统控制, 解耦控制, 鲁棒控制等理论与应用.

孙优贤 见本刊1998年第1期第108页.

曹永岩 1968年生. 1993年在武汉钢铁学院获得硕士学位, 1996年在浙江大学获得博士学位, 现为浙江大学工业控制技术研究所副研究员, 主要研究方向为大系统理论及应用, 时滞系统控制, 鲁棒控制, 容错控制等理论与应用.