

用神经网络进行连续时间非线性系统建模的研究

任雪梅

(北京理工大学自动控制系·北京, 100081)

摘要: 在用神经网络进行系统建模时, 建模误差的存在是难免的. 为了减小这种误差, 本文对连续时间非线性系统提出了一种新的神经网络辨识模型, 它是由带有输入修正的神经网络和稳定滤波器组合而成. 文中给出了权值的学习算法, 即权值是根据辨识误差的投影算法来改变, 证明了在一定条件下辨识误差的收敛性.

关键词: 神经网络; 非线性系统; 系统辨识; 投影算法

Neural Network Identification for Continuous Time Nonlinear Systems

Ren Xuemei

(Department of Automatic Control, Beijing Institute of Technology·Beijing, 100081, P. R. China)

Abstract: In this paper a new identification model constructed by neural networks with modified inputs and stable filters is presented for continuous time nonlinear systems in order to reduce the inherent network approximation errors. An adaptive law with projection algorithm is employed to adjust the parameters of networks. Under certain conditions, convergence of the identification error is proved.

Key words: neural networks; nonlinear systems; system identification; projection algorithm

1 引言 (Introduction)

系统辨识是控制理论研究的主要内容之一. 近年来, 神经网络在系统辨识方面已取得了许多令人鼓舞的成果^[1~4]. 在系统辨识中常用的网络模型为多层前馈网络, 由于实际中网络的逼近能力有限, 在一些复杂系统建模时, 常存在有较大的建模误差^[2]. 文[3]为了提高网络的逼近能力, 增加网络的隐结点数, 这样又会引起“过拟合”问题. 文[4]提出了具有动态补偿能力的神经网络模型, 仿真结果表明该方法能显著提高系统的建模精度, 但是文中没有从理论上对神经网络辨识模型的稳定性进行研究. 基于上述考虑, 本文提出了带有输入修正的神经网络和稳定滤波器构成的连续时间非线性动态系统的辨识模型, 权值是基于辨识误差的投影算法来改变. 本文首先从理论上讨论应用此种辨识模型及其权值调节规律能减少网络的建模误差, 最后仿真结果作了进一步的验证.

2 问题的提出 (Problem statement)

本文考虑如下系统

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

的辨识问题. 其中 $f(x, u)$ 为光滑未知非线性函数, $u \in \Omega_u \subset \mathbb{R}^p$ 和状态 $x \in \Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ (Ω_u, Ω_x 为紧集)

均为可测且有界.

若系统 (1) 中函数 $f(x, u)$ 直接用神经网络 $\hat{f}(x, u, w_f)$ ($w_f \in \mathbb{R}^{n_f}$, n_f 为网络加权的总数) 来逼近, 即辨识模型的动态方程为

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(x, u, w_f). \quad (2)$$

其中 $\hat{x}$ 为辨识模型的输出. 由于非线性函数 $f(x, u)$ 的复杂性及神经网络逼近能力的有限性, 使得函数 $f(x, u)$ 和它的“最优”逼近网络 $\hat{f}(x, u, w_f^*)$ 之间存在一定的网络逼近误差, 从而造成系统 (1) 的输出 $x(t)$ 和其辨识模型的输出 $\hat{x}(t)$ 之差随着时间 t 的增加可能会变得越来越大. 怎样才能通过改进网络模型和建立合适的辨识器结构来减小神经网络的建模误差, 则是本文所要讨论的中心问题.

3 辨识模型的选取 (Selection of the identification model)

在控制理论中, 反馈是一个很重要的概念, 控制系统常常引入一个负反馈来削弱控制系统中存在的误差. 因此本文借助于反馈的思想, 利用改变神经网络的输入来减小建模误差, 即用网络 $\hat{f}(x + k_x \Delta x, u + k_u \Delta u, w_f)$ 来逼近函数 $f(x, u)$, 这里 k_x, k_u 为反馈修正系数, $\Delta x, \Delta u$ 分别为基于神经网络前一步的辨识误差得到关于网络输入 x, u 的修正量.

首先为了保证权值的有界性,定义权值 w_f 的受限集为 Ω_f , 即对任意的 w_f 满足 $\Omega_f = \{w_f: \|w_f\| \leq M_f, M_f > 0\}$. 根据神经网络的逼近性质,有

任给一个 $\varepsilon_f > 0$, 对于连续函数 $f(x, u)$ 必存在含有“最优”加权 $w_f^* \in \Omega_f$ 的前馈网络 $\hat{f}(x, u, w_f^*)$, 使得

$$\max_{(x, u) \in \Omega_x \times \Omega_u} \|f(x, u) - \hat{f}(x, u, w_f^*)\| \leq \varepsilon_f.$$

将网络的固有逼近误差 $\Delta \hat{f}(x, u) = f(x, u) - \hat{f}(x, u, w_f^*)$ 代入(1), 然后加减 ax 得

$$\dot{x} = -ax + ax + \hat{f}(x, u, w_f^*) + \Delta \hat{f}(x, u). \quad (3)$$

其中 $a > 0$, 对于系统(3)考虑如下的辨识模型

$$\dot{\hat{x}} = -a\hat{x} + ax + \hat{f}(x + k_x \Delta x, u + k_u \Delta u, w_f). \quad (4)$$

这里反馈修正系数 $k_x, k_u > 0$, 为简单计, 令 $x_1 = x + k_x \Delta x, u_1 = u + k_u \Delta u$, 网络输入的修正值 $\Delta x = \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}\right]^T (x - \hat{x}), \Delta u = \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial u_1}\right]^T (x - \hat{x})$. 由(3)和(4)

可得辨识误差 $e = x - \hat{x}$ 满足

$$\begin{aligned} \dot{e} = & -ae + [\hat{f}(x, u, w_f^*) - \hat{f}(x_1, u_1, w_f)] + \Delta \hat{f}(x, u) = \\ & -ae - k_x \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}\right] \Delta x - k_u \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial u_1}\right] \Delta u - \\ & \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f}\right] \bar{w}_f + \Delta \hat{f}(x, u) + \\ & O(\|\Delta x\|^2, \|\Delta u\|^2, \|\bar{w}_f\|^2). \end{aligned} \quad (5)$$

其中权值估计误差 $\bar{w}_f = w_f - w_f^*$, $O(\|\Delta x\|^2, \|\Delta u\|^2, \|\bar{w}_f\|^2)$ 代表泰勒展开的高次项. 将 x, u 的修正值 $\Delta x = \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}\right]^T e(t), \Delta u = \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial u_1}\right]^T e(t)$ 代入上式有

$$\dot{e} = -A_s e - \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f}\right] \bar{w}_f + d. \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} A_s = & aI_{n \times n} + k_x \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}\right] \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}\right]^T + k_u \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial u_1}\right] \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial u_1}\right]^T, \\ d = & \Delta \hat{f}(x, u) + O(\|\Delta x\|^2, \|\Delta u\|^2, \|\bar{w}_f\|^2). \end{aligned}$$

由于 $\left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial u_1}\right] \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial u_1}\right]^T, \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}\right] \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}\right]^T$ 都是非负定阵, 故 A_s 为正定阵.

为了确保加权的有界性, 使加权 w_f 在受限集 Ω_f 中, 下面我们采用投影算法来调节网络参数. 投影算法的意义为: 若 w_f 在受限集 Ω_f 中或虽在受限集 Ω_f 的边界, 但朝着受限集的内部运动, 我们就利用简单

的自适应规律来调节权值; 若 w_f 在受限集 Ω_f 的边界, 且向着受限集的外部运动, 则利用下面的投影算法来训练网络权值以保证 w_f 在受限集 Ω_f 中.

权值 w_f 的调节规律为

$$\dot{w}_f = \begin{cases} \eta_f \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f}\right]^T e, & \text{若 } \|w_f\| < M_f \text{ 或} \\ & \|w_f\| = M_f, \\ & w_f^T \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f}\right]^T e \leq 0, \\ P\left(\eta_f \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f}\right]^T e\right), & \text{若 } \|w_f\| = M_f, \\ & w_f^T \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f}\right]^T e > 0. \end{cases} \quad (7)$$

这里 $\eta_f > 0$ 为学习速率, 投影算子 $P(\cdot)$ 定义为

$$P\left(\eta_f \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f}\right]^T e\right) = \eta_f \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f}\right]^T e - \eta_f \frac{w_f^T \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f}\right]^T e}{\|w_f\|^2} w_f. \quad (8)$$

4 收敛性分析 (Convergence analysis)

下面给出逼近误差收敛的一个理论分析.

定理 考虑系统(1), 其辨识模型和加权的调节规律分别为(4)和(7), 于是有

1) 对所有的 w_f 都满足 $\|w_f\| \leq M_f$.

2) 若 $d \in L_2$ (即 $\int_0^\infty \|d(t)\|^2 dt < \infty$), 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$.

3) 若 d 不是平方可积, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|e\| \leq \frac{\|d\|}{\lambda_a}$, λ_a 为 A_s 的最小特征根.

证 1) 为了证明 $\|w_f\| \leq M_f$, 首先定义 $V_f = \frac{1}{2} w_f^T w_f$. 若(7)的第一行右边的条件成立, 则有 $\|w_f\| < M_f$ 或当 $\|w_f\| = M_f$ 时, $\dot{V}_f = \eta_f w_f^T \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f}\right]^T e \leq 0$. 于是有 $\|w_f\| \leq M_f$. 若(7)的第二行右边的条件成立, 则有

$$\dot{V}_f = \eta_f w_f^T \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f}\right]^T e - \eta_f \frac{w_f^T \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f}\right]^T e}{\|w_f\|^2} \|w_f\|^2 = 0. \quad (9)$$

于是, 对于所有的 w_f 都满足 $\|w_f\| \leq M_f$.

2) 考虑如下的准 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} e^T e + \frac{1}{2\eta_f} \bar{w}_f^T \bar{w}_f. \quad (10)$$

对 V 求导数, 由(6)知

$$\dot{V} = -e^T A_s e - e^T \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f}\right] \bar{w}_f + e^T d + \frac{1}{\eta_f} \bar{w}_f^T \dot{\bar{w}}_f. \quad (11)$$

根据(7)和(11)得

$$\dot{V} = -e^T A_s e + e^T d - I_1 \frac{w_f^T \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f} \right]^T e}{\|w_f\|^2} \bar{w}_f^T w_f. \quad (12)$$

若(7)的第一行(或第二行)右边条件成立,则 $I_1 = 0$ (或 $I_1 = 1$).下面考虑带有 I_1 项的符号,若 $I_1 = 1$,

此时, $\|w_f\| = M_f, w_f^T \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f} \right]^T e > 0$, 于是有

$$\begin{aligned} -\bar{w}_f^T w_f &= (w_f^* - w_f)^T w_f = \\ &= \frac{1}{2} [\|w_f^*\|^2 - \|w_f\|^2 - \\ &\quad \|w_f - w_f^*\|^2] \leq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

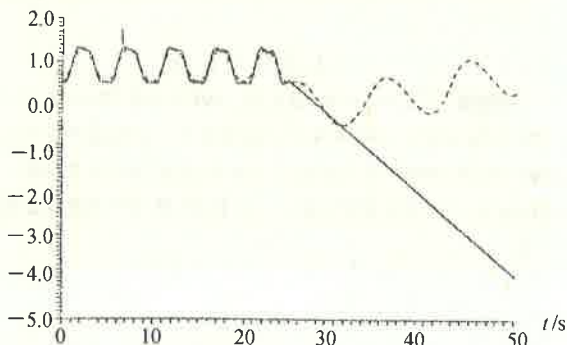
上式根据 $\|w_f\| = M_f \geq \|w_f^*\|$. 所以式(12)中含有 I_1 的项总是非正的, 因此有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -e^T A_s e + e^T d \leq \\ &= -\frac{\lambda_a}{2} \|e\|^2 - \frac{\lambda_a}{2} (\|e\|^2 - \frac{2}{\lambda_a} e^T d + \\ &\quad \frac{1}{\lambda_a^2} \|d\|^2 - \frac{1}{\lambda_a^2} \|d\|^2) \leq \\ &= -\frac{\lambda_a}{2} \|e\|^2 + \frac{1}{2\lambda_a} \|d\|^2. \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)两边同时积分得

$$\begin{aligned} \int_0^t \|e(\tau)\|^2 d\tau &\leq \frac{2}{\lambda_a} (|V(0)| + \\ &\quad \sup_{t \geq 0} |V(t)|) + \frac{1}{\lambda_a^2} \int_0^t \|d(\tau)\|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

因为 $e, \bar{w}_f$ 都是有界, 所以 $\sup_{t \geq 0} |V(t)|$ 为定值. 若 $d \in L_2$, 可知 $e \in L_2 \cap L_\infty$, 由于(6)的右边都是有界的, 知 $\dot{e} \in L_\infty$, 应用 Barbalat Lemma^[5] 知 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$.



(a) 系统辨识模型为(2)时

3) 若 d 不是平方可积时, 由(14)的第一行知 $\dot{V} \leq -(\lambda_a \|e\| - \|d\|) \|e\|$. 故当 $\|e\| > \frac{\|d\|}{\lambda_a}$ 时, 有 $\dot{V} < 0$ 成立. 因此当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|e\| \leq \frac{\|d\|}{\lambda_a}$ 成立. 证毕.

若用(2)作为系统(1)的辨识模型, 相似于(5)的推导, 则得如下的辨识误差方程

$$\begin{aligned} \dot{e} &= [\hat{f}(x, u, w_f^*) - \hat{f}(x, u, w_f)] + \Delta \hat{f}(x, u) = \\ &= -\left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial w_f} \right] \bar{w}_f + \Delta \hat{f}(x, u) + O(\|\bar{w}_f\|^2). \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $O(\|\bar{w}_f\|^2)$ 表示泰勒展开的高次项. 与(6)相比较, 很明显, 式(6)的右边项比式(16)右边项多一因子 $-A_s e$, 故(6)的辨识误差收敛速度快, 且能得到较小的建模误差.

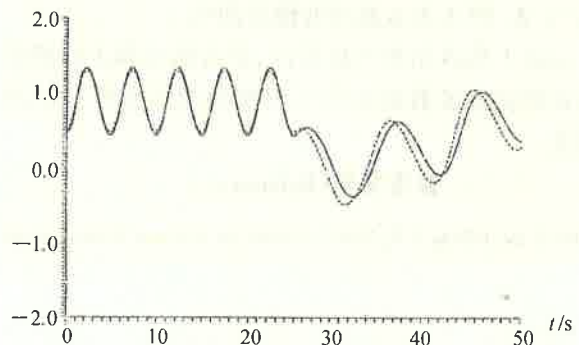
5 仿真结果(Simulation results)

以下仿真中用的是含有一个隐层的神经网络, 隐层有 15 个神经单元. 系统采样时间 $T = 0.01$ 秒.

仿真 1 考虑下列系统

$$\dot{x} = -0.52x + \frac{x}{1+x^2} + 0.45u. \quad (17)$$

初始状态 $x(0) = 0.5$, 输入 $u = 1.2\sin(2\pi t/5)$ 用作训练信号, 若用(2)作为系统的辨识模型, 在 $t = 0 \sim 25$ 秒之间为网络训练期间, 当 $t = 25$ 秒时突然停止训练, 加入输入信号 $u = 0.82\sin(2\pi t/10)$, 图 1(a) 表示的是 $t = 25 \sim 50$ 秒之间系统与辨识模型的拟合曲线. 若采用本文提出的辨识模型(4), 选择 $a = 3.0, k_x = k_u = 1.2$, 同样情况时系统与辨识模型的输出曲线如图 1(b)所示.



(b) 系统辨识模型为(4)时

图 1 当 $t=25$ 秒时停止训练, 加入输入信号 $u=0.82\sin(2\pi t/10)$, 系统(.....)与辨识模型(——)的拟合曲线

Fig. 1 Responses of the plant (17) and identification model after the adaptation stops at $t=25$ s with the input signal $u=0.82\sin(2\pi t/10)$

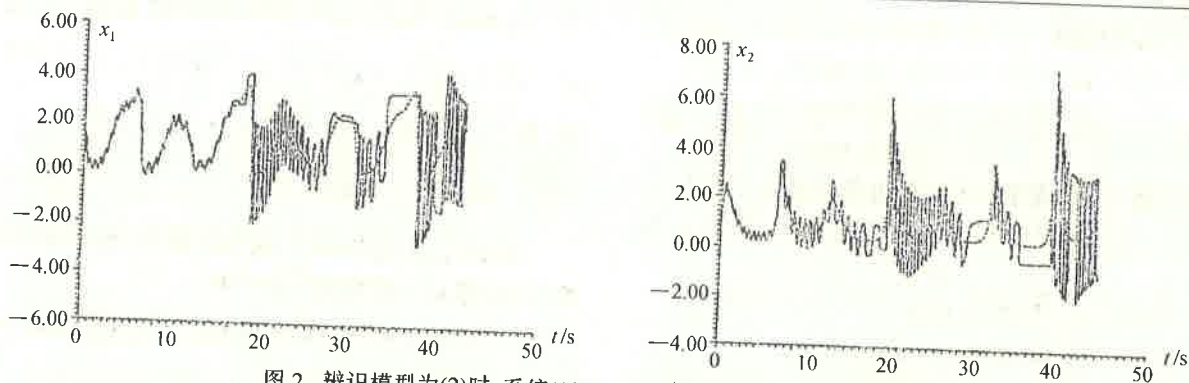


图2 辨识模型为(2)时,系统(18)(.....)和辨识模型(——)的输出曲线

Fig. 2 Outputs of the plant (18) and identification model (2)

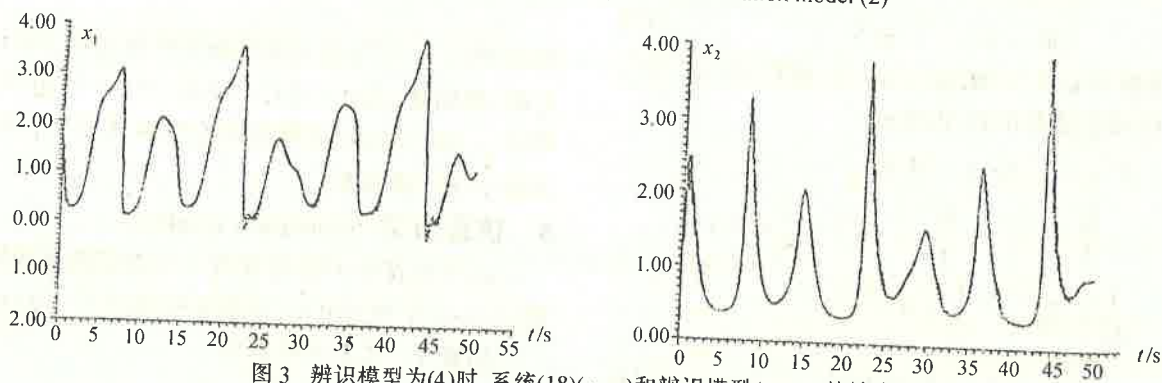


图3 辨识模型为(4)时,系统(18)(.....)和辨识模型(——)的输出曲线

Fig. 3 Outputs of the plant (18) and identification model (4)

仿真 2 考虑下列系统 (Chaotic glycolytic oscillator)^[6]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t)x_2^2(t) + 0.999 + 0.42\cos(1.75t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)x_2^2(t) - x_2(t).\end{aligned}$$

(18)

初始状态 $x_1(0) = x_2(0) = 1.5$, 图2表示的是辨识模型为(2)时, 系统(18)与辨识模型各自的运动曲线. 若采用本文提出的辨识模型(4), 选择 $a = 2$, 修正系数 $k_x = 5$. 图3表示此时的输出曲线.

由以上仿真结果可以看出, 带有输入修正的神经网络和稳定滤波器构成的辨识模型则具有较好的逼近性能.

参考文献 (References)

- 1 Chen S and Billings S A. Neural networks for nonlinear dynamic system

modelling and identification. Int. J. Control, 1992, 56(2): 319 - 346

- 2 Hunt K J, et al. Neural network for control systems — a survey. Automatica, 1992, 28(6): 1083 - 1112
- 3 Wang Z and Massimo C D. A procedure for determining the topology of multi-layer feedforward neural networks. Neural Networks, 1994, 7(2): 291 - 300
- 4 张星昌. 具有动态补偿能力的神经网络模型及其在动态系统建模中的应用. 控制理论与应用, 1996, 13(5): 823 - 826
- 5 Slotine J E and Li W. Applied Nonlinear Control. Englewood Cliff, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1991
- 6 Holden A V. Chaos. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1986

本文作者简介

任雪梅 女, 1967年生, 副教授. 1989年毕业于山东大学自动控制专业, 获学士学位. 1992年在北京航空航天大学控制理论与应用专业获硕士学位. 1995年获该专业博士学位. 同年分配到北京理工大学自动控制系工作. 主要研究兴趣是学习控制, 神经网络及其在控制中的应用.