第16卷第1期
1999年2月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.16,No.1
Feb.,1999

鲁棒严格正实控制器设计

曹永岩　孙优贤
(浙江大学工业控制技术国家重点实验室·杭州,310027)

摘要: 基于强严格正实引理使用线性矩阵不等式方法讨论了参数不确定线性系统鲁棒严格正实控制器的综合问题,提出了二次严格正实的新概念,证明了静态状态反馈解的存在性,并给出了状态反馈二次严格正实控制器的存在条件和综合方法.

关键词: 线性系统; 状态反馈; 正实性; 线性矩阵不等式(LMI); 二次严格正实

Synthesis of Robust Strictly Positive Real Controllers

Cao Yongyan　and　Sun Youxian
(National Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University·Hangzhou,310027,P.R.China)

Abstract: Based on the strongly strictly positive real lemma, this paper addresses the synthesis problem of robust strictly positive real controllers for a class of linear systems with norm-bounded parameter uncertainties using linear matrix inequality based approach. It shows the existence of static state feedback solution. A notion of quadratic strictly positive realness has been presented. The existence condition and the synthesis method of quadratic strictly positive real controllers via state feedback is given.

Key words: Linear systems; state feedback; positive realness; linear matrix inequality; quadratic strictly positive real

1　引言(Introduction)

控制系统的鲁棒性问题一直是当今控制理论研究的热点之一,比较起来,鲁棒稳定性的研究比性能鲁棒性的研究要多要深入.实际系统不仅要求鲁棒稳定,还要求系统具有一定的鲁棒性能,如何研究系统的鲁棒性能问题也是当今控制理论需要迫切解决的问题.本文拟对参数不确定系统的鲁棒正实性做一些探讨.

正实性是网络理论中的一个重要概念,同时在系统和控制理论中的有关稳定性分析,超稳定性,自适应控制,二次型最优与代数 Riccati 方程以及系统的稳定实现等方面都有很重要的应用.如何构造一反馈控制器使得闭环系统不仅内部稳定而且正实在鲁棒控制和非线性控制中具有重要的意义.对于这一问题,文[1]基于状态反馈理论对确定性线性时不变连续系统给出了一些很有益的讨论.对于实际中常见的参数不确定系统,其鲁棒严格正实控制器的综合在实际中也具有很大的意义.文[7]在频率域里讨论了一类不确定系统的鲁棒严格正实控制器的设计问题.本文针对实际中经常存在的一类范数有界参数不确定系统,讨论了静态状态反馈可严格正实的问题,给出了其二次严格正实控制器的存在条件和设计方法.

2　基本概念(Basic concepts)

考虑如下确定性有限维线性时不变连续时间系统 Σ

$$\dot{x} = Ax + Bw,\ y = Cx + Dw.$$

式中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $p = m$,其传递函数表示为 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.连续系统正实性的定义有许多种,本文使用如下定义.

定义 1　称连续系统 Σ 是正实的(positive real, PR),如果在开右半复平面内(即 $\mathrm{Re}(s) > 0$),$G(s)$ 解析且 $G(s) + G^{\mathrm{T}}(s^*) \geqslant 0$.称连续系统 Σ 是严格正实的(strictly positive real, SPR),如果在闭右半复平面内($\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$),$G(s)$ 解析且对于 $\omega \in [0,\infty)$, $G(\mathrm{j}\omega) + G^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\omega) > 0$,称连续系统 Σ 是扩展严格正实的(extended strictly positive real, ESPR),如果 Σ 严格正实且 $G(\mathrm{j}\infty) + G^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\infty) > 0$.

引理 1　考虑连续系统 Σ,定义

$$R_c(X) = A^{\mathrm{T}}X + XA + (C - B^{\mathrm{T}}X)^{\mathrm{T}}\cdot (D + D^{\mathrm{T}})^{-1}(C - B^{\mathrm{T}}X),$$

那么下述命题等价

本文于1996年10月11日收到.1998年2月10日收到修改稿.

1) 连续系统 Σ 是 ESPR 且 A 稳定；

2) 存在一正定矩阵 X 使得如下 LMI 成立

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}X + XA & C^{\mathrm{T}} - XB \\ C - B^{\mathrm{T}}X & -(D + D^{\mathrm{T}}) \end{bmatrix} < 0;$$

3) 存在一正定矩阵 X 使得如下广义 Lyapunov 不等式成立

$$\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{X} + \hat{X}\hat{A} < 0,$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & -B \\ C & -D \end{bmatrix},\ \hat{X} = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix};$$

4) 矩阵 $D + D^{\mathrm{T}}$ 正定，且代数 Riccati 不等式 (ARI) $R_c(X) < 0$ 具有一正定解 X_I；

5) 矩阵 $D + D^{\mathrm{T}}$ 正定，且代数 Riccati 方程 (ARE) $R_c(X) = 0$ 具有一正定解 X_E.

这就是所谓的强(或称扩展)严格正实引理，将其中的小于号改为小于等于号就成为所谓的正实引理了.这在许多文献中均有讨论，如[1~4].

引理 2[2]　考虑分块对称矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^{\mathrm{T}} & Q_3 \end{bmatrix},$$

那么 $Q > 0$ 当且仅当下面两个等价条件之一成立：

1) $Q_3 > 0, Q_1 - Q_2Q_3^{-1}Q_2^{\mathrm{T}} > 0$;

2) $Q_1 > 0, Q_3 - Q_2^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}Q_2 > 0$.

通常称矩阵 $Q_1 - Q_2Q_3^{-1}Q_2^{\mathrm{T}}(Q_3 - Q_2^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}Q_2)$ 为 $Q_3(Q_1)$ 的 Schur 补.

考虑如下具有参数不确定性的系统

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)w,$$
$$y = (C + \Delta C)x + (D + \Delta D)w.$$

定义 2　称上述不确定系统是二次严格正实的(quadratic strictly positive real, QSPR)，如果对于所有不确定性，$D + \Delta D + (D + \Delta D)^{\mathrm{T}} > 0$ 且存在矩阵 $P > 0$ 使得

$$(A + \Delta A)^{\mathrm{T}}P + P(A + \Delta A) + (C + \Delta C - (B + \Delta B)^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}(D + \Delta D + (D + \Delta D)^{\mathrm{T}})^{-1}(C + \Delta C - (B + \Delta B)^{\mathrm{T}}P) < 0.$$

不难发现，如果不确定系统满足二次严格正实条件，那么它也一定二次稳定.

引理 3[5]　给定 $n \times n$ 维正半定对称矩阵 A, C，$n \times n$ 维负定对称矩阵 B，若对于任意非零 n 维向量 w

$$(w^{\mathrm{T}}Bw)^2 - 4w^{\mathrm{T}}Aww^{\mathrm{T}}Cw > 0,$$

那么一定存在一正常数 λ 使得

$$\lambda^2A + \lambda B + C < 0.$$

引理 6[6]　对于任意 n 维向量 w，一定有

$$\max_{\|F\| \leq 1}(w^{\mathrm{T}}PDFEw) = \sqrt{w^{\mathrm{T}}PDD^{\mathrm{T}}Pww^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Ew}.$$

3 鲁棒严格正实控制器设计(Synthesis of robust strictly positive real controllers)

考虑如下具有参数不确定性的系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\Delta x(t) + B_\Delta w(t) + B_{2\Delta}u(t) = \\ \qquad (A + \Delta A(t))x(t) + (B_1 + \Delta B_1(t)) \cdot \\ \qquad w(t) + (B_2 + \Delta B_2(t))u(t), \\ z(t) = C_\Delta x(t) + D_\Delta w(t) + D_{2\Delta}u(t) = \\ \qquad (C_1 + \Delta C_1(t))x(t) + (D_{11} + \Delta D_{11}(t)) \cdot \\ \qquad w(t) + (D_{12} + \Delta D_{12}(t))u(t), \\ y(t) = C_2x + D_{21}w(t). \end{cases} \tag{1}$$

式中 x 表示 n 维状态向量，w 表示 m_1 维外部输入向量，u 表示 m_2 维控制输入向量，z 表示 p_1 维被控输出向量，y 表示 p_2 维测量输出向量，矩阵 $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}$ 具有合适的维数的常矩阵，且 $p_1 = m_1$. 本文假定 (A, B_2) 可控，系统中的不确定性可描述为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \Delta A(t) & \Delta B_1(t) & \Delta B_2(t) \\ \Delta C_1(t) & \Delta D_{11}(t) & \Delta D_{12}(t) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} F(t)[G_0 \quad G_1 \quad G_2], \\ F(t)F^{\mathrm{T}}(t) \leq I. \end{cases} \tag{2}$$

$F(t)$ 表示时变不确定参数，且 Lebesgue 可测. 本文研究使得闭环系统鲁棒稳定且二次严格正实的状态反馈控制器的综合问题，即 $C_2 = I, D_{21} = 0$.

在性能鲁棒性研究中的一个重要问题就是，若通过动态状态反馈可使得闭环系统具有指定的性能指标，是否一定存在一静态状态反馈控制器也使得闭环系统具有指定的性能.

定理 1　给定不确定系统(1)，如果存在一动态状态反馈控制器 $K(s)$ 使得闭环系统 QSPR，那么一定存在一静态状态反馈控制器 K 使得闭环系统 QSPR.

证　假设存在一动态的 n_c 阶控制器

$$\dot{x}_c = A_cx_c + B_cx,\ u = C_cx_c + D_cx,$$

使得闭环系统 QSPR，那么闭环系统具有如下的状态空间实现

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A_\Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{2\Delta} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\Delta \\ 0 \end{bmatrix}w = \tilde{A}\begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \tilde{B}w,$$

$$z = \left([C_\Delta \quad 0] + [D_{2\Delta} \quad 0]\begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix} \right)\begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} +$$

$$D_\Delta w = \tilde{C}\begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + D_\Delta w.$$

由定义可知,存在 $\tilde{X} > 0$ 使得

$$\tilde{A}^{\mathrm{T}}\tilde{X} + \tilde{X}\tilde{A} + (\tilde{C} - \tilde{B}^{\mathrm{T}}\tilde{X})^{\mathrm{T}}(D_\Delta + D_\Delta^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot$$

$$(\tilde{C} - \tilde{B}^{\mathrm{T}}\tilde{X}) < 0.$$

定义矩阵 W, Y

$$\begin{bmatrix} W & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}\tilde{X}^{-1}, \begin{bmatrix} Y & Y_2 \\ Y_2^{\mathrm{T}} & Y_3 \end{bmatrix} = \tilde{X}^{-1},$$

显然有 $Y > 0$, 进一步定义

$$X = Y^{-1} > 0, \quad K = WY^{-1}.$$

由上述不等式可以很容易证明矩阵 $X > 0$,并且 X, K 满足如下不等式

$$(A_\Delta + B_{2\Delta}K)^{\mathrm{T}}X + X(A_\Delta + B_{2\Delta}K) +$$

$$(C_\Delta - B_{2\Delta}^{\mathrm{T}}X)^{\mathrm{T}}(D_\Delta + D_\Delta^{\mathrm{T}})^{-1}(C_\Delta - B_{2\Delta}^{\mathrm{T}}X) < 0,$$

这就意味着下面的系统 QSPR

$$\dot{x} = (A_\Delta + B_{2\Delta}K)x + B_\Delta w,$$

$$z = (C_\Delta + D_{2\Delta}K)x + D_\Delta x.$$

换句话说,静态状态反馈控制器 $u = Kx$ 是一鲁棒严格正实控制器. 证毕.

下面我们考虑静态反馈增益的综合,即控制器为 $u = Kx$, 此时闭环系统为

$$\dot{x} = (A_{cl} + \Delta A_{cl})x + (B_{cl} + \Delta B_{cl})w,$$

$$z = (C_{cl} + \Delta C_{cl})x + (D_{cl} + \Delta D_{cl})w.$$

式中

$$\hat{A}_{cl} = \begin{bmatrix} A_{cl} & -B_{cl} \\ C_{cl} & -D_{cl} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A + B_2K & -B_1 \\ C_1 + D_{12}K & -D_{11} \end{bmatrix} = \hat{A} + \hat{B}\hat{K},$$

$$\Delta\hat{A}_{cl} = \begin{bmatrix} \Delta A_{cl} & -\Delta B_{cl} \\ \Delta C_{cl} & -\Delta D_{cl} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} F(t)[G_0 + G_2K \quad -G_1] =$$

$$\hat{E}F(t)(\hat{G}_0 + G_2\hat{K}),$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & -B_1 \\ C_1 & -D_{11} \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}, \hat{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{G}_0 = [G_0 \quad -G_1], \hat{K} = [K \quad 0].$$

定理 2 给定不确定系统(1),存在一镇定状态反馈增益 K 使得闭环系统 QSPR,当且仅当存在矩阵 $Q > 0, W$,常数 $\varepsilon > 0$, 满足如下 LMI

$$\begin{bmatrix} \hat{Q}\hat{A}^{\mathrm{T}} + \hat{A}\hat{Q} + \hat{W}^{\mathrm{T}}\hat{B}^{\mathrm{T}} + \hat{B}\hat{W} + \varepsilon\hat{E}\hat{E}^{\mathrm{T}} & (\hat{G}_0\hat{Q} + G_2\hat{W})^{\mathrm{T}} \\ \hat{G}_0\hat{Q} + G_2\hat{W} & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0, \tag{3}$$

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_{p_1} \end{bmatrix}, \hat{W} = [W \quad 0], \tag{4}$$

那么,QSPR 的状态反馈增益可取为

$$K = WQ^{-1}.$$

证 充分性. 令 $\hat{P} = \hat{Q}^{-1}$, 由 Schur 补可知 LMI (3)和如下矩阵不等式等价

$$(\hat{A} + \hat{B}\hat{K})^{\mathrm{T}}\hat{P} + \hat{P}(\hat{A} + \hat{B}\hat{K}) +$$

$$\frac{1}{\varepsilon}(\hat{G}_0 + G_2\hat{K})^{\mathrm{T}}(\hat{G}_0 + G_2\hat{K}) +$$

$$\varepsilon\hat{P}\hat{E}\hat{E}^{\mathrm{T}}\hat{P} < 0. \tag{5}$$

注意到对于任意 $m \times n$ 实矩阵 X, Y,一定存在一正实常数 ε 使得

$$X^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}X \leqslant \varepsilon X^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\varepsilon}Y^{\mathrm{T}}Y.$$

因此式(3)成立时一定有

$$(\hat{A}_{cl} + \Delta\hat{A}_{cl})^{\mathrm{T}}\hat{P} + \hat{P}(\hat{A}_{cl} + \Delta\hat{A}_{cl}) < 0,$$

由定义 2 知道,状态反馈增益 K 使得闭环系统稳定且 QSPR.

必要性. 若不确定系统(1)可状态反馈 QSPR,由定理 1,则一定存在一常状态反馈增益 K 使得闭环系统 QSPR,那么对于所有可能 $F(t)$,一定存在 $P > 0$ 使得

$$(\hat{A}_{cl} + \Delta\hat{A}_{cl})^{\mathrm{T}}\hat{P} + \hat{P}(\hat{A}_{cl} + \Delta\hat{A}_{cl}) < 0, \quad \hat{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

亦即对于所有非零 $n + p_1$ 维向量 z,对于所有可能 $F(t)$.

$$z^{\mathrm{T}}(\hat{A}_{cl}^{\mathrm{T}}\hat{P} + \hat{P}\hat{A}_{cl})z + 2z^{\mathrm{T}}\hat{P}\hat{E}F(t)(\hat{G}_0 + G_2\hat{K})z < 0,$$

因此

$$\hat{A}_{cl}^{\mathrm{T}}\hat{P} + \hat{P}\hat{A}_{cl} < 0.$$

由引理 4 有

$$\max_{\|F\| \leqslant 1}(z^{\mathrm{T}}\hat{P}\hat{E}F(t)(\hat{G}_0 + G_2\hat{K})z) =$$

$$\sqrt{z^{\mathrm{T}}\hat{P}\hat{E}\hat{E}^{\mathrm{T}}\hat{P}zz^{\mathrm{T}}(\hat{G}_0 + G_2\hat{K})^{\mathrm{T}}(\hat{G}_0 + G_2\hat{K})z},$$

这就意味着一定有下式成立

$$z^{\mathrm{T}}(\hat{A}_{cl}^{\mathrm{T}}\hat{P} + \hat{P}\hat{A}_{cl})z +$$

$$2\sqrt{z^{\mathrm{T}}\hat{P}\hat{E}\hat{E}^{\mathrm{T}}\hat{P}zz^{\mathrm{T}}(\hat{G}_0 + G_2\hat{K})^{\mathrm{T}}(\hat{G}_0 + G_2\hat{K})z} < 0,$$

因此

$$[z^{\mathrm{T}}(\hat{A}_{cl}^{\mathrm{T}}\hat{P} + \hat{P}\hat{A}_{cl})z]^2 >$$

$$4z^{\mathrm{T}}\hat{P}\hat{E}\hat{E}^{\mathrm{T}}\hat{P}zz^{\mathrm{T}}(\hat{G}_0 + G_2\hat{K})^{\mathrm{T}}(\hat{G}_0 + G_2\hat{K})z.$$

由引理3,一定存在一正常数 ε 使得

$$\varepsilon(\hat{A}_{cl}^{\mathrm{T}}\hat{P} + \hat{P}\hat{A}_{cl}) + \varepsilon^2\hat{P}\hat{E}\hat{E}^{\mathrm{T}}\hat{P} + (\hat{G}_0 + G_2\hat{K})^{\mathrm{T}}(\hat{G}_0 + G_2\hat{K}) < 0,$$

这就是不等式(5),然后两边同乘以 $\hat{P}^{-1}$, 由 Schur 补就可得到式(3). 证毕.

4 示例(Example)

考虑如下系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 + 0.2\sin t & 2 \\ 0 & 1 - 0.2\cos t \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + 0.1\cos t \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - 0.2\cos t \end{bmatrix} u,$$

$$z = [0 \quad 1 + 0.4\cos t]x + (0.5 - 0.2\cos t)w + (0.5 + 0.4\cos t)u,$$

不难发现,不确定性可以描述为式(2)的形式,其中

$$F(t) = \begin{bmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \cos t \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = [0 \quad 2], \quad G_0 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

使用MATLAB的LMI工具箱,可以很容易求得LMI(3)的一可行解

$$Q = \begin{bmatrix} 3.4947 & 1.0661 \\ 1.0661 & 5.4686 \end{bmatrix},$$

$$W = [-2.2383 \quad -7.9921], \quad \varepsilon = 0.1878.$$

取状态反馈 $K = WQ^{-1} = [-0.2070 \quad -1.4211]$,令 $X = Q$,不难验证对于所有 $F(t)$ 引理1中的LMI均成立,因此该状态反馈律是一QSPR控制器.

5 结束语(Conclusion)

本文讨论了鲁棒严格正实控制器的综合问题,使用线性矩阵不等式方法给出了一类线性时变参数不确定系统可二次严格正实的充要条件和二次严格正实控制器的综合方法.

参考文献(References)

1 Sun W, Khargonekar P P and Shim D. Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994,39(10):2034 – 2046

2 Anderson B D O and Vongpanitlerd S. Network Analysis and Synthesis: A Modern Systems Theory Approach. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1973

3 Boyd S, Ghaoui L El, Feron E and Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia, 1994

4 Haddad W M and Bernstein D S. Explicit construction of quadratic Lyapunov functions for the small gain, positivity, circle, and Popov theorems and their application to robust stability, Part I: continuous-time theory. Int. J. Robust and Nonlinear Control, 1993,3:313 – 339

5 Petersen I R and Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. Automatica, 1986,32(4):397 – 411

6 Petersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. Systems and Control Letters, 1987, 8:351 – 357

7 Jia Y, Gao W and Cheng M. Robust strict positive real stabilization and asymptotic hyperstability robustness. Int. J. Control, 1994, 59(5): 1143 – 1157

本文作者简介

曹永岩 1968年生.1996年3月在浙江大学获工学博士学位,现在浙江大学工业控制技术研究所从事博士后研究.感兴趣的研究领域为鲁棒控制,时滞系统,容错控制等.

孙优贤 1940年生.教授,博士生导师,中国工程院院士.现任浙江大学控制工程科学研究院院长,工业控制研究所所长.1984年至1987年获德国洪堡奖学金.长期从事过程控制,鲁棒控制理论及应用,H_∞控制理论应用,容错控制理论及应用研究以及造纸过程模型化和计算机控制.发表论文300多篇.著作10余本.获各类科技进步奖20多项.