第 16 卷第 1 期
1999 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.16, No.1
Feb., 1999

一类非线性广义系统的临界镇定*

刘永清　邱卫根
(华南理工大学自动控制工程系·广州, 510640)

摘要: 利用线性化方法, 研究了一类非线性广义系统的可稳定问题. 同时, 利用中心流形定理, 讨论了具有零实部特征值的临界情形的局部镇定问题.

关键词: 线性化; 反馈镇定; 中心流形; 可控临界指数

The Stabilization of a Class of Nonlinear Generalized Systems

Liu Yongqing　and　Qiu Weigen
(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology·Guangzhou, 510640, P. R. China)

Abstract: In this paper, we use the way of linearization to discuss the stabilization of a class of nonlinear generalized systems, and by use of the centre manifold we invesitigate controllability of critical index case of it.

Key words: linearlization; feedback stabilization; centre manifold; controllable critical index

1　引言(Introduction)

近年来, 正则线性广义系统的反馈控制, 镇定问题得到了人们的广泛的重视, 取得了一些很好的结果, 但对正则非线性广义系统的讨论还远未展开. 本文利用线性化的方法, 讨论了一类非线性广义系统的反馈控制, 镇定问题. 同时对广义控制系统引入临界指数概念, 利用中心流形定理, 对系统具有零实部特征值的临界情形研究了其局部光滑静态反馈镇定问题.

2　系统的可控性(Controllability of systems)

考虑非线性广义系统

$$E\dot{x} = f(x, u). \tag{2.1}$$

其中 $f(0,0) = 0, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是足够光滑的函数.

定义 2.1[3]　称系统 $E\dot{x} = F(x), F(0) = 0$, 在原点的邻域是正则的, 如果存在原点的某个邻域, 系统对应唯一的向量场, 且系统的解和向量场的解是一一对应的.

定义 2.2　称系统 $E\dot{x} = F(x), F(0) = 0$, 在原点的邻域是局部正则指数 1 的, 如果在原点的某个邻域中, 系统是正则的, 且成立关系式(2.2), 其中

$$W = \{x \mid F(x) \in \mathrm{Im}E\},$$
$$\{x \in W, F(x) \in \mathrm{Im}E/T_xW\} \Rightarrow$$
$$\mathrm{rank}E/T_xW = \mathrm{rank}E. \tag{2.2}$$

定义 2.3　称系统(2.3)是系统(2.1)在原点邻域的一次近似系统, 其中

$$A = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}, B = \frac{\partial f(0,0)}{\partial u}.$$

$$E\dot{x} = Ax + Bu. \tag{2.3}$$

注 1　由文[3]知, 若 $\det|A| \neq 0$, 则系统(2.3)称为系统(2.1)的线性化系统, 且两向量场是横切相交的, 如果 v 是系统(2.1)的向量场, v^l 是系统(2.3)的向量场, 则关系式 $Dv(0) = v^l(0)$ 成立, 其中 $Dv(0)$ 是向量场 v 在原点的线性化, 即线性化系统的向量场等于系统向量场的线性化. 且如果(E, A)是正则指数 1 的, 则系统(2.3)是正则指数 1 的.

假设$[E, A]$是正则指数 1, 取子空间序列

$$\begin{aligned} U^i &= A^{-1}(EU^{i-1}), \quad U^0 = 0, \\ V^i &= E^{-1}(AV^{i-1}), \quad V^0 = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

序列$\{U^i\}$, $\{V^i\}$分别在有限步达到其上极限 U^*, V^*. 由文[1]知 $U^* \oplus V^* = \mathbb{R}^n$, 且 $EU^* \oplus AV^* = \mathbb{R}^n$, 在 U^*, V^* 中各取一组基$(\alpha_1, \cdots, \alpha_q)$, $(\beta_{q+1}, \cdots, \beta_n)$. 记 $N = (\alpha_1, \cdots, \alpha_q, \beta_{q+1}, \cdots, \beta_n)$.

取 $Q_u: \mathbb{R}^n \to U^*$ 是沿 V^* 到 U^* 上的正则投影, 和 $Q_v: \mathbb{R}^n \to V^*$ 是沿 U^* 到 V^* 上的正则投影. 取非奇异映射 $M: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, Mx = \begin{cases} Ex, & x \in U^* \\ Ax, & x \in V^* \end{cases}$, 用 Q_uM^{-1}, Q_vM^{-1} 分别左乘于系统(2.3), 则系统(2.3)

* 国家自然科学基金(960311)资助课题.
本文于 1997 年 4 月 21 日收到. 1998 年 1 月 5 日收到修改稿.

被分解成$\begin{cases} \dot{x}_u = Lx_u + B_1 u, & x_u \in U^* \\ J\dot{x}_v = x_v + B_2 u, & x_v \in V^* \end{cases}$. 其中 $x = Ny, y = x_u \oplus x_v, B_1 = Q_u M^{-1} B, B_2 = Q_v M^{-1} B$,

$$\begin{pmatrix} Q_u \\ Q_v \end{pmatrix} M^{-1} EN = \begin{pmatrix} I & \\ & J \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_u \\ Q_v \end{pmatrix} M^{-1} AN = \begin{pmatrix} L & \\ & I \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

将系统(2.1)写成 $E\dot{x} = Ax + Bu + g(x,u)$,其中 $g(x,u) = f(x,u) - Ax - Bu$. 则(2.1)变成

$$\begin{cases} \dot{x}_u = Lx_u + B_1 u + g_1(x_u, x_v, u), \\ J\dot{x}_v = x_v + B_2 u + g_2(x_u, x_v, u). \end{cases}$$

其中 $\dfrac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_u, x_v, u)}(0,0) = 0, J = 0$. 对第二式利用隐函数定理,解出 $x_v = \phi(x_u, u)$, 则系统变成

$$\dot{x}_u = Lx_u + B_1 u + g_1(x_u, \phi(x_u, u), u). \tag{2.6}$$

定义 2.4 称系统(2.1)是线性反馈可控的,如果存在反馈因子 $K, K \in \mathbb{R}^{m\times n}, u = Kx$, 使得系统的原点在隐系统的 Lyapunov 意义[2]下是局部渐近稳定的.

引理 2.1 记 $\sigma(E,A)$ 是 (E,A) 的广义特征值组成的谱, $\sigma(L)$ 是 L 的谱,部分线性反馈 $u = Kx = K_1 x_u$. 则

$$\sigma(E, A + BK) = \sigma(L + B_1 K_1),$$
$$\sigma(E,A) = \sigma(L).$$

证　因为 $Kx = KN(x_u, x_v)^{\mathrm{T}}$,故 $KN = (K_1, 0)$.

$$|\lambda E - (A + BK)| =$$
$$\left| \lambda M \begin{pmatrix} Q_u \\ Q_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & \\ & J \end{pmatrix} N^{-1} - M \begin{pmatrix} Q_u \\ Q_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & \\ & I \end{pmatrix} N^{-1} - BK \right| =$$
$$\left| M \begin{pmatrix} Q_u \\ Q_v \end{pmatrix}^{-1} \right| \left| \begin{pmatrix} \lambda I - L - B_1 K_1 & \\ - B_2 K_1 & \lambda J - I \end{pmatrix} \right| |N^{-1}| = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$|\lambda I - (L + B_1 K_1)| = 0,$$
$$|\lambda E - A| = \left| \lambda M \begin{pmatrix} Q_u \\ Q_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & \\ & J \end{pmatrix} N^{-1} - M \begin{pmatrix} Q_u \\ Q_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & \\ & I \end{pmatrix} N^{-1} \right| = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$|\lambda I - L| = 0.$$

定理 2.1 当系统(2.6)是可线性反馈控制的,则系统(2.1)是可线性反馈控制的.

证　若系统(2.6)是线性反馈可控的,则存在 $K_1, u = K_1 x_u$. 使得

$$\max\{\mathrm{Re}(\sigma(L + B_1 K_1))\} < 0.$$

取 $K = (K_1, 0) N^{-1}, u = Kx$,由引理 2.1,

$$\max\{\mathrm{Re}(\sigma(E, A + BK))\} = \max\{\mathrm{Re}(\sigma(L + B_1 K_1))\} < 0,$$

在反馈 $u = Kx$ 控制下,系统(2.1) 变成

$$E\dot{x} = (A + BK)x + g(x, Kx). \tag{2.7}$$

由文[2]知系统(2.7)在原点的邻域的解在隐系统的 Lyapunov 意义[2]下是局部渐近稳定的,即系统(2.1)是线性反馈可控的.

3　可控临界指数和局部镇定(Controllable critical index and locally stabilizing)

定义 3.1　如果存在 $u = \alpha(x), \alpha(0) = 0, \alpha(\cdot)$ 足够光滑,使得系统(2.1) 的闭环系统原点在隐系统 Lyapunov 意义下是局部渐近稳定的,则称系统(2.1) 原点是可局部光滑静态反馈镇定的.

定义 3.2　系统 $E\dot{x} = F(x), x \in \mathbb{R}^n$,具有临界指数$(\alpha, \beta)$是指其一次近似系统有 α 个零根, β 对纯虚根. 系统 $E\dot{x} = f(x,u)$ 具有可控临界指数(α^*, β^*)是指我们可以适当选择光滑反馈 $u = \delta(x)$, $\delta(0) = 0$,使得其闭环系统具有临界指数(α^*, β^*).

记 Δ 是所有可控临界指数(α^*, β^*)组成的集合,则 Δ 是由其一次近似系统(2.3) 决定,且元素个数有限. 一般地一个控制系统在低临界程度不可镇定,但在高临界程度下有可能是可镇定的[4].

考虑一般的正则指数 1 非线性广义系统(2.1). 设$(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 是它的一个可控临界指数,注意到式(2.6),总可以通过坐标变换和线性预反馈将(2.1)变成

$$\begin{cases} \dot{y} = L_0 y + f_1(x_v, y, \zeta, u), \\ \dot{\zeta} = L_1 \zeta + Cu + f_2(x_v, y, \zeta, u), \\ 0 = x_v + B_2 u + g_2(x_v, y, \zeta, u). \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $y \in \mathbb{R}^s, \zeta \in \mathbb{R}^{q-s}, u \in \mathbb{R}^m, x_v \in \mathbb{R}^{n-q}, f_1(\cdot), f_2(\cdot), g_2(\cdot)$ 是足够光滑函数, $\mathrm{Re}(\lambda(L_0)) = 0$,其中有 $\bar{\alpha}$ 个零根, $\bar{\beta}$ 个纯虚根, $\{L_1, C\}$ 可镇定,不妨设 $\mathrm{Re}(\lambda(L_1)) < 0$, 且

$$f_1(0,0,0,0) = f_2(0,0,0,0) = g_2(0,0,0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial(f_1, f_2, g_2)}{\partial(x_v, y, \zeta, u)}(0,0,0,0) = 0.$$

对(3.1)的第三式利用隐函数定理,得 $\varphi \in C^1$: $x_v = \varphi(y, \zeta, u), \varphi(0,0,0) = 0$,代入(3.1)得

$$\begin{cases} \dot{y} = L_0 y + \tilde{f}_1(y, \zeta, u) \\ \dot{\zeta} = L_1 \zeta + Cu + \tilde{f}_2(y, \zeta, u). \end{cases} \tag{3.2}$$

其中

$$\tilde{f}_1(y,\zeta,u) = f_1(\varphi(y,\zeta,u),y,\zeta,u),$$
$$\tilde{f}_2(y,\zeta,u) = f_2(\varphi(y,\zeta,u),y,\zeta,u).$$

考虑串接系统

$$\begin{cases}\dot{y} = L_0 y + h_1(y,\zeta),\\ \dot{\zeta} = L_1\zeta + Cu + h_2(y,\zeta,u).\end{cases} \tag{3.3}$$

其中 $h_1(0,0) = h_2(0,0,0) = 0, \frac{\partial(h_1,h_2)}{\partial(y,\zeta,u)}(0,0,0) = 0$. 其余假设和式(3.1)类似. 由文[4], 利用中心流形定理[5], 可以证明下述结论.

定理 3.1 系统(3.3)可采用 $u = c(y), c(0) = 0, \frac{\partial c}{\partial y} = 0$ 来镇定, 当且仅当下述条件满足

1) 存在 $\psi(y). \psi(0) = 0, \frac{\partial\psi(0)}{\partial y} = 0$. 使得系统 $\dot{y} = L_0 y + h_1(y,\psi(y))$ 是渐近稳定的.

2) 方程 $\frac{\partial\psi(0)}{\partial y}(L_0 y + h_1(y,\psi(y))) = L_1(\psi(y)) + Cu + h_2(y,\psi(y),u)$ 有解 $u = c(y)$.

推论 3.1 如果 C 是行满秩矩阵, 且系统(3.3)是解析的, 则系统(3.3)可采用 $u = u(y,\zeta), u(0,0) = 0, \frac{\partial u}{\partial(y,\zeta)} = 0$ 来镇定的充分必要条件是存在 $\psi(y), \psi(0) = 0, \frac{\partial\psi(0)}{\partial y} = 0$, 使得系统 $\dot{y} = L_0 y + h_1(y,\psi(y))$ 是渐近稳定的.

证 充分性. 由定理 3.1, 只须证明对任意的 $\psi(y), \psi(0) = \frac{\partial\psi(0)}{\partial y} = 0$, 方程(3.4)有解 $u = c(y)$, 且 $c(0) = 0, \frac{\partial c(0)}{\partial y} = 0$, 其中

$$\frac{\partial\psi(0)}{\partial y}(L_0 y + h_1(y,\psi(y))) = L_1\psi(y) + Cu + h_2(y,\psi(y),u). \tag{3.4}$$

易知若(3.4)有解, 则必有 $c(0) = 0, \frac{\partial c(0)}{\partial y} = 0$. 因为 C 行满秩, 则存在非奇异矩阵 N, $CN = (C_1, 0)$, C_1 是可逆矩阵. 对方程(3.5)在原点的邻域利用隐函数定理, 得可微函数 $u_1 = \theta(y)$. 取 $u = N(\theta(y),0)^{\mathrm{T}}$, 显然 u 满足方程(3.4), 且 $u(0) = 0, \frac{\partial u}{\partial y}(0) = 0$, 其中

$$\frac{\partial\psi(y)}{\partial y}(L_0 y + h_1(y,\psi(y))) = L_1\psi(y) + C_1 u_1 + h_2(y,\psi(y),N(u_1,0)^{\mathrm{T}}). \tag{3.5}$$

必要性. 设系统(3.3)是可局部光滑反馈镇定的, 且设镇定函数是 $u = u(y,\zeta), u(0,0) = 0, \frac{\partial u}{\partial(y,\zeta)}(0,0) = 0$. 代入系统(3.3), 令 $\bar{h}_2(y,\zeta) = h_2(y,\zeta,u(y,\zeta)) + Cu(y,\zeta)$, 可得

$$\begin{cases}\dot{y} = L_0 y + h_1(y,\zeta),\\ \dot{\zeta} = L_1\zeta + \bar{h}_2(y,\zeta).\end{cases} \tag{3.6}$$

因为系统(3.6)的零解是渐近稳定的, 且 $\mathrm{Re}(\lambda(L_0) = 0, \mathrm{Re}(\lambda(L_1)) < 0$. 由文[5]利用中心流形定理, 在零点的某个领域 U 内, 存在中心流形 $\zeta = \psi(y), \psi(0) = 0, \frac{\partial\psi(0)}{\partial y} = 0$. 使得 $\dot{y} = L_0 y + h_1(y,\psi(y))$ 的稳定性和系统(3.6)的稳定性完全一致. 故必存在解轨线 $\zeta = \psi(y), \psi(0) = 0, \frac{\partial\psi(0)}{\partial y} = 0$, 使得系统 $\dot{y} = L_0 y + h_1(y,\psi(y))$ 是渐近稳定的.

注 2 系统(3.3)由于已经采用了线性预反馈, 为不改变它的线性结构, 所以取 $c(0) = 0, \frac{\partial c(0)}{\partial y} = 0$. 这样 $u = K(y,\zeta)^{\mathrm{T}} + c(y)$, 即是原系统的一个镇定律.

参考文献(References)

1 Vinicius A. Armento. The pencil $sE - A$ controlability-observability for generalized systems: a geometric approch. SIAM. J. Control Optimiz., 1986, 24(4): 616 – 638

2 Caren Tischendorf. On the stability of solutions of autonomous index-1 tractably and quasilinear index-2 tractably DAEs. Circuits Systems Singular Process, 1994, 13(2,3): 139 – 154

3 Sebastian Reich. On the local qualitative behavior of differential algebraic equations. Circuits Systems Singular Process, 1995, 14(4): 427 – 433

4 吉英存, 高为炳. 受控中心流形和非线性临界镇定. 控制理论与应用, 1993, 10(4): 447 – 450

5 Carr T. Application of Centre Manifold Theory. New York: Springer-Velag, 1981

本文作者简介

刘永清 1930年生. 华南理工大学电子与信息学院教授, 博士生导师. 主要研究方向为复杂系统及系统工程.

邱卫根 1968年生. 讲师. 现就职于广东工业大学计算机系. 主要研究方向为非线性广义系统控制理论.