第 16 卷第 1 期
1999 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.16, No.1
Feb., 1999

线性时滞系统的无源控制 *

俞 立 陈国定
(浙江工业大学信息工程学院·杭州,310032)

摘要: 研究一类线性时滞系统通过线性无记忆状态反馈控制律的无源控制问题.通过某个 Riccati 矩阵方程对称正定解的存在性,给出了使得闭环系统严格无源的控制器存在条件.进而,利用这个方程的正定解给出了无源化控制器的一个构造方法.

关键词: 无源控制; 滞后; Riccati 方程

Passive Control of Linear Time-Delay Systems

Yu Li and Chen Guoding
(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology·Hangzhou, 310032, P. R. China)

Abstract: In this paper, the passive control problem of a class of linear time-delay systems via linear memoryless state feedback controllers is considered. A sufficient condition is derived for the existence of controllers which render the closed-loop system to be strictly passive. This condition is represented as the existence of a positive definite symmetric matrix solution to a certain Riccati matrix equation. Also, a construction for such a controller is given in terms of the solution to the Riccati matrix equation.

Key words: passive control; delay; Riccati matrix equation

1 引言(Introduction)

近年来,线性时不变系统的正实控制问题已受到了人们极大的重视[1~3].对这个问题的研究主要出于鲁棒控制和非线性控制问题研究的需要.具体地说,在一个反馈关联环中,如果其非线性或不确定部分可以用一个正实系统刻划,那么,一个适当的闭环系统的严格正实性将保证整个反馈关联环的鲁棒稳定性[4].文献[3]对该问题作了充分的研究,提出了该问题的一个完整解.然而,到目前为止,对时滞系统的类似问题却还没有被考虑.

对于一般的系统,代之以正实性概念,我们将考虑无源性概念.本文将把无源性概念引进到线性时滞系统中,研究线性时滞系统的无源控制问题.本文的主要贡献在于:对一个具有状态滞后的线性系统,给出了存在一个无记忆线性状态反馈控制器使得闭环系统是严格无源的充分条件,据此,提出了相应的控制器设计方法,这样的一个控制器可以通过求解一个适当的代数 Riccati 矩阵方程的正定解得到.

2 系统描述和定义(System description and definition)

考虑由以下状态方程描述的线性时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-d) + B_1u(t) + B_2w(t), \\ z(t) = Cx(t) + Dw(t), \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-d, 0], \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量,$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 是控制向量,$w(t) \in \mathbb{R}^q$ 是外部输入,且 $w(t) \in L_2[0 \quad \infty)$,$z(t) \in \mathbb{R}^q$ 是被调输出,A_0, A_1, B_1, B_2, C 和 D 是适当维数的常数矩阵,$d > 0$ 是滞后时间常数,$\varphi(t)$ 是 n 维的连续初始值向量函数.

在本文中,假定(A_0, B_1)是完全能控的,且系统的状态是可以直接测量的,则本文考虑的问题是设计一个无记忆的线性定常状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t). \tag{2}$$

其中 $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是反馈增益矩阵,使得导出的闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}x(t) + A_1x(t-d) + B_2w(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{aligned} \tag{3}$$

是稳定的,且具有严格无源性,其中 $\bar{A} = A_0 + B_1K$.为此,先引进以下的定义:

定义[8] 系统(3)称为是严格无源的(strictly passive),如果它是内部稳定的,且存在一个常数 $\alpha > 0$,使得对系统(3)具有零初始条件的解

* 教育部资助优秀年轻教师基金和浙江省自然科学基金资助课题.
本文于 1995 年 12 月 27 日收到.1998 年 5 月 4 日收到修改稿.

$$\int_0^T w'(t)z(t)\mathrm{d}t \geqslant \alpha\int_0^T w'(t)w(t)\mathrm{d}t \qquad (4)$$

对所有的正常数 T 和所有 $w(t) \in L_2[0,\ T]$ 成立. 如果存在无记忆状态反馈控制律(2),使得闭环系统(3)是严格无源的,则称系统(1)是能无源控制的,且控制律(2)称为是系统(1)的一个无源化控制律.

3　无源化控制律的设计(Design of passive controllers)

本节将提出时滞系统能无源控制的条件以及无源化控制律的设计方法.

定理 1　如果 $D + D' > 0$,且存在常数矩阵 $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$,正定对称矩阵 $R, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$,使得以下的矩阵不等式

$$\begin{aligned}&\bar{A}'P + P\bar{A} + PA_1R^{-1}A_1'P + R +\\&(B_2'P - C)'(D + D')^{-1}(B_2'P - C) < 0 \qquad (5)\end{aligned}$$

成立,则系统(1)是能无源控制的,且 K 是相应的一个无源化控制律的反馈增益矩阵.

证　假定存在 $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $P > 0, R > 0$,使得(5)式成立,取 $u(t) = Kx(t)$,则相应的闭环系统由(3)式给出. 定义

$$V(x_t) = x'(t)Px(t) + \int_{t-d}^{t} x'(\tau)Rx(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad (6)$$

显然 $V(x_t)$ 是一个正定函数. 沿系统(3)的轨线, $V(x_t)$ 关于时间的导数是

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_t) =\\&x'(t)(\bar{A}'P + P\bar{A} + R)x(t) +\\&2x'(t)PA_1x(t-d) + 2x'(t)PB_2w(t) -\\&x'(t-d)Rx(t-d). \qquad (7)\end{aligned}$$

由于对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 和正定对称矩阵 R, 有[5]

$$2x'y \leqslant x'R^{-1}x + y'Ry.$$

因此

$$\begin{aligned}2x'PA_1x(t-d) \leqslant\ & x'(t)PA_1R^{-1}A_1'Px(t) +\\& x'(t-d)Rx(t-d).\end{aligned}$$

将以上不等式代入到(7)式中,得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_t) \leqslant\ & x'(t)(\bar{A}'P + P\bar{A} +\\& PA_1R^{-1}A_1'P + R)x(t) +\\& 2x'(t)PB_2w(t).\end{aligned}$$

根据矩阵不等式(5),进一步得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_t) <\ & -x'(t)[(B_2'P - C)'(D +\\& D')^{-1}(B_2'P - C)]x(t) +\\& 2x'(t)PB_2w(t). \qquad (8)\end{aligned}$$

取 $w(t) = 0$,则可以得到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_t) < 0$,因此根据文献[6]中的定理 4.2.6,系统(3)是稳定的. 进而,为要证明对所有的正常数 T 和所有的 $w(t) \in L_2[0\quad T]$,(4)式成立,定义

$$F = (D + D')^{1/2}, \quad E = F^{-1}(B_2'P - C).$$

则从(8)式可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_t) <\ & -x'(t)E'Ex(t) + 2w'(t)F'Ex(t) +\\& 2w'(t)z(t) - w'(t)F'Fw(t) =\\& 2w'(t)z(t) - [Ex(t) -\\& Fw(t)]'[Ex(t) - Fw(t)] \leqslant\\& 2w'(t)z(t).\end{aligned}$$

在上式两边分别从 0 到 T 积分,利用零初始条件,可以得到

$$2\int_0^T w'(t)z(t)\mathrm{d}t \geqslant V(x_T) \geqslant 0.$$

因此,对所有的 $T > 0$ 和 $w(t) \in L_2[0\quad T]$,有

$$\int_0^T w'(t)z(t)\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

另一方面,若定理条件成立,则总可以选择足够小的常数 $\alpha > 0$,使得用 $D - \alpha I$ 代替 D 时,所有条件仍然成立. 因此由以上讨论,有

$$\int_0^T w(t)[z(t) - \alpha w(t)]\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

由此可以推出(4)式成立,定理得证.

根据定理 1 的讨论,可以给出相应的无源化控制律设计方法. 设控制律是

$$u(t) = Kx(t). \qquad (9)$$

其中

$$K = -\frac{1}{2\varepsilon}S^{-1}B_1'P. \qquad (10)$$

上式中的 $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个正定对称矩阵, ε 是一个适当的正常数.

把由(10)式给出的反馈增益矩阵 K 代入到(5)式中,得到

$$\begin{aligned}&A_0'P + PA_0 - \frac{1}{\varepsilon}PB_1S^{-1}B_1'P +\\&(B_2'P - C)'(D + D')^{-1}(B_2'P - C) +\\&PA_1R^{-1}A_1'P + R < 0.\end{aligned}$$

由此可以得到

定理 2　若对给定的正定常数矩阵 S, R 和 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$,存在 $\varepsilon > 0$,使得以下的代数矩阵方程

$$A_0'P + PA_0 - \frac{1}{\varepsilon}PB_1S^{-1}B_1'P +$$
$$PA_1R^{-1}A_1'P + R + (B_2'P - C)'(D +$$
$$D')^{-1}(B_2'P - C) + \varepsilon Q = 0 \qquad (11)$$

有一个正定解矩阵 P,则系统(1)是能无源控制的,且由(9)式确定的 $u(t)$ 是系统(1)的一个无源化控制律.

由于在矩阵方程(11)中存在待定参数矩阵 R, S 和 Q,以及参数 $\varepsilon > 0$,它们如何适当地选取,以使得该方程有一个正定解仍然是一个困难的问题.以下的定理3部分地解决了这个问题.为此,首先从定理2可以得到以下的推论:

推论 若对给定的正定常数矩阵 S,R 和 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$,存在 $\varepsilon > 0$,使得以下的代数 Riccati 矩阵方程

$$\mathrm{ARE}(R,Q,S,\varepsilon) =$$
$$A_0'P + PA_0 - P[\frac{1}{\varepsilon}B_1S^{-1}B_1' -$$
$$A_1R^{-1}A_1' - 2B_2(D + D')^{-1}B_2']P +$$
$$2C'(D + D')^{-1}C + R + \varepsilon Q = 0 \qquad (12)$$

有一个正定解矩阵 P,则系统(1)是能无源控制的,且由(9)式确定的 $u(t)$ 是系统(1)的一个无源化控制律.

证 事实上,从以下的矩阵不等式和定理2立即可得本推论

$$(B_2'P - C)'(D + D')^{-1}(B_2'P - C) =$$
$$PB_2(D + D')^{-1}B_2'P - C'(D + D')^{-1}B_2'P -$$
$$PB_2(D + D')^{-1}C + C'(D + D')^{-1}C \leqslant$$
$$2PB_2(D + D')^{-1}B_2'P + 2C'(D + D')^{-1}C.$$

定理3 设 $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是给定的正定对称矩阵,若对给定的正定对称矩阵 $S,Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$,存在常数 $\varepsilon > 0$,使得 Riccati 矩阵方程(12)有一个正定对称解矩阵,则对任意正定对称矩阵 $\tilde{S},\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,存在常数 $\varepsilon^* > 0$ 使得对任意 $\varepsilon^* > 0$ 使得对任意 $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon^*]$, Riccati 矩阵方程

$$\mathrm{ARE}(R,\tilde{Q},\tilde{S},\tilde{\varepsilon}) = 0$$

也有一个正定对称解矩阵.

证 类似文献[7]中定理4的证明,不难得到本定理的结论.

根据以上定理知,Riccati 矩阵方程(12)的正定解的存在性并不依赖矩阵 Q 和 S 的选取,因此在具体的设计中,可以取 $Q = S = I$,而矩阵 R 必须适当选取,参数 ε 可以采用不断减小的方法,具体可参看文献[5]中的算法.

特别的,当系统(1)满足匹配条件时,即存在适当维数的常数矩阵 H 和 G,使得

$$A_1 = B_1H, \quad B_2 = B_1G, \qquad (13)$$

此时,Riccati 矩阵方程(12)变成了

$$A_0'P + PA_0 - PB_1[\frac{1}{\varepsilon}S^{-1} - HR^{-1}H' -$$
$$2G(D + D')^{-1}G']B_1'P +$$
$$2C'(D + D')^{-1}C + R + \varepsilon Q = 0. \qquad (14)$$

选取 $S = I, Q = I$,则对任意给定的正定矩阵 R,总可以选取适当的常数 $\varepsilon > 0$,使得

$$\frac{1}{\varepsilon}I - HR^{-1}H' - 2G(D + D')^{-1}G' > 0.$$

由 LQ 理论知,Riccati 矩阵方程(14)存在正定解.因此,对于满足匹配条件的线性时滞系统,总可以用无记忆线性定常状态反馈控制律达到无源控制的目的.

4 例子(Example)

考虑由图1所示的反馈环,其中的 F 表示刻划环中不确定性或非线性的一个无源系统,G 是一个线性时滞系统,其状态空间模型是

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t-d) +$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t),$$
$$z(t) = [0 \quad 1]x(t) + w(t),$$
$$y(t) = x(t).$$

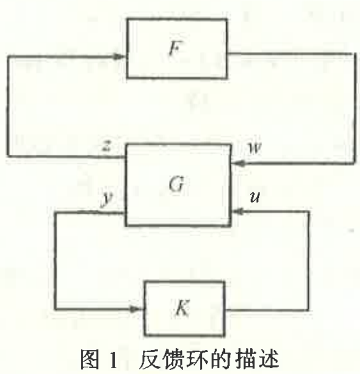

图1 反馈环的描述
Fig. 1 Description of feedback loop

如果对系统 G,能设计一个无记忆线性状态反馈控制律 $u(t) = Kx(t)$,使得相应的闭环系统是内部稳定的且具有严格无源性,则根据文献[8]中的定理3.5.7知,整个反馈环是稳定的.

由于系统 G 满足匹配条件(13),且 $H = [0 \quad 1], G = 1$.根据本文提出的结论知,该系统能达到无源控制的目的.特别的,取 $Q = I, S = I, R = I$,则相应 Riccati 方程(14)是

$$\begin{bmatrix}0 & -2\\1 & 1\end{bmatrix}P + P\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & 1\end{bmatrix} - (\frac{1}{\varepsilon} - 2)P \cdot$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[0 \quad 1]P + (2+\varepsilon)I = 0. \tag{15}$$

取 $\varepsilon = 0.45$，得到Riccati方程(15)的一个正定解 P，进而根据式(9)得到系统 G 的一个无源化控制律

$$u(t) = -[0.6352 \quad 5.9385]x(t).$$

5 结束语(Conclusion)

本文研究了线性时滞系统的无源化控制问题，提出了使得闭环系统是严格无源的无记忆线性定常状态反馈控制律的设计方法.利用本文提出的结论可以进一步讨论非线性和鲁棒控制问题，以及具有参数不确定性的时滞系统的鲁棒无源控制问题，等等.目前，这方面的研究工作正在进行之中.

参考文献(References)

1 Haddad W M and Bernstein D S. Robust stabilization with positive real uncertainty: beyond the small gain theorem. Systems and Control Letters, 1991, 17(3): 191 – 208

2 Safonov M G, et al. Synthesis of positive real multivariable feedback systems. Int. J. Control, 1987, 45(3): 817 – 842

3 Sun W, Khargonekar P P and Shim D. Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(10): 2034 – 2046

4 Vidyasagar M. Nonlinear Systems Analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993

5 Petersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. Systems and Control Letters, 1987, 8(5): 351 – 357

6 Burton T A. Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. New York: Academic, 1985

7 Yu Li, Chu Jian and Su Hongye. Robust memoryless H_∞ controller design for linear time-delay systems with norm-bounded time-varying uncertainty. Automatica, 1996, 32(12): 1759 – 1762

8 Green M and Limebeer D J N. Linear Robust Control. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1995

本文作者简介

俞 立 1961年生.1982年获南开大学控制理论与应用专业学士学位，1988年获浙江大学工业自动化专业硕士学位，1993年至1995年获瑞士联邦政府奖学金留学瑞士联邦洛桑理工学院，现为浙江工业大学信息工程学院副教授.主要研究领域包括不确定系统的鲁棒控制，H_∞控制，大系统的分散控制和时滞系统的控制等.发表论文70余篇.

陈国定 1962年生.1984年在浙江工业大学获学士学位，1990年在浙江大学获硕士学位，现任浙江工业大学副教授.主要研究方向为不确定系统的鲁棒控制理论与应用，工业过程计算机控制技术等.