关于 Morgan 问题的一个充分条件*

孙振东
(清华大学自动化系·北京, 100084)

摘要: 提出关于线性系统的一个结构分解算法, 并利用它讨论非方块系统的静态反馈解耦问题, 得到一类构造性的充分条件. 在某些特殊情形, 得到构造性的充分必要条件.

关键词: 线性系统; Morgan 问题; 本性阶; Silverman 算法; Morse 分解

A Sufficient Condition for Morgan's Problem

Sun Zhendong
(Department of Automation, Tsinghua University·Beijing, 100084, P.R.China)

Abstract: An algorithm to structurally decompose right-invertible linear systems is offered. Based on this algorithm, a sufficient condition for Morgan's problem is obtained. For a specific class of systems, a necessary and sufficient condition is presented.

Key words: linear systems; Morgan's problem; essential orders; Silverman algorithm; Morse decomposition

1 引言(Introduction)

Morgan 问题即线性系统一般(非正则)反馈解耦问题. 它是线性系统理论中具有挑战性的经典问题之一. 自该问题被提出以来, 许多学者对其进行了不懈的探索, 得到了很多深入的结果. 这些结果丰富了人们对线性系统本质结构的认识.

本文提出探讨 Morgan 问题的一个新思路. 这个思路是建立在关于线性系统的一个新的结构分解算法之上的. 该算法综合 Morse 的结构化分解[1]、Silverman 的左逆算法[2], Descusse et al. 的移动算法(Shifting Procedure[3])的思想, 包含丰富的系统耦合信息. 利用该算法, 我们得到关于 Morgan 问题有解的一类充分条件. 对满足特定条件的系统类, 可得到 Morgan 问题的完全的刻画.

考虑线性时不变系统 $\sum(C,A,B)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$.

我们假设系统 $\Sigma(C,A,B)$ 右可逆 (right invertible), 矩阵 B 列满秩, 矩阵 C 行满秩. 本文还假定 $m > p$, 即系统是非方块的.

记系统 $\Sigma(C,A,B)$ 的无穷结构 (infinite structure) 为 $\{n_i'\}_p, n_1' \geqslant n_2' \geqslant \cdots \geqslant n_p'$. Morse List I_2 为 $\{\sigma_i\}_{m-p}, \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_{m-p}$. 相应于输出 $y_i = c_i x$ 的本性阶(essential order) 为 n_{ie}.

2 扩展的结构分解算法(Extended algorithm of structural decomposition)

设与系统 $\Sigma(C,A,B)$ 相对应的齐次阶系统 (shifted system, 参见[3]) 为 $\Sigma(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$. 易知系统 $\Sigma(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$ 的所有本性阶均等于 $n_e \overset{\text{def}}{=} \max\{n_{ie}\}_p$. 对其实施 Silverman 算法(参见文[2]), 得到(必要时可调整 $\bar{y}_i$ 的顺序)

$$\begin{cases} \bar{y}_1^{(n_1)} = \bar{v}_1, \\ \quad\vdots \\ \bar{y}_k^{(n_k)} = \sum\limits_{j<k}^{l \leqslant n_k} \tilde{d}_{k,j}^l \bar{y}_j^{(l)} + \bar{v}_k, \\ \quad\vdots \\ \bar{y}_p^{(n_p)} = \sum\limits_{j<p}^{l \leqslant n_p} \tilde{d}_{p,j}^l \bar{y}_j^{(l)} + \bar{v}_p. \end{cases}$$

上述表达式可以重新表述为系统 $\Sigma(C,A,B)$ 的输入-输出耦合关系:

$$\begin{cases} y_1^{(r_1)} = \bar{v}_1, \\ \quad\vdots \\ y_k^{(r_k)} = \sum\limits_{j<k}^{r_j \leqslant l \leqslant n_{je}} \bar{d}_{k,j}^l y_j^{(l)} + \bar{v}_k, \\ \quad\vdots \\ y_p^{(r_p)} = \sum\limits_{j<p}^{r_j \leqslant l \leqslant n_{je}} \bar{d}_{p,j}^l y_j^{(l)} + \bar{v}_p. \end{cases} \tag{2a}$$

* 国家自然科学基金(69684001)、国家攀登计划和博士后科学基金资助课题.
本文于 1996 年 10 月 28 日收到. 1998 年 1 月 27 日收到修改稿.

由 Morse 结构分解理论,对应于系统 $\Sigma(C,A,B)$ 能控且不能观部分可提取积分串:

$$(\xi_i^{\sigma_i-k+1})^{(k)}=\sum_{1\leqslant j\leqslant p}^{0\leqslant l<k}\bar{e}_{i,j}^{l}y_j^{(l)}+w_i, \tag{2b}$$
$$i=1,\cdots,m-p,k=1,\cdots,\sigma_i.$$

式(2a)(2b)刻划了系统 $\Sigma(C,A,B)$ 的一些结构特性,本文中将称上述由系统(1)获得(2)的算法为"扩展的结构分解算法".

3 主要结果(Main results)

定义 $\bar{\sigma}_i=\max\{k\leqslant\sigma_i:\bar{e}_{i,j}^{l}=0,\forall j=1,\cdots p,n_{je}<l<k\}$. 定义有序集

$$\bar{\Theta}=\{\bar{\sigma}_1,\cdots,\bar{\sigma}_{m-p}\},\quad \Theta=\{\sigma_1,\cdots,\sigma_{m-p}\}.$$

依字典顺序升序排列,设介于 $\bar{\Theta}$ 和 Θ 之间的(含 $m-p$ 个自然数的)全体有序集为

$$\bar{\Theta}\overset{\text{def}}{=}\Theta_1<\Theta_2<\cdots<\Theta_{k_0}=\Theta.$$

对应于集 $\Theta_s=\{\tilde{\sigma}_1,\cdots,\tilde{\sigma}_{m-p}\},1\leqslant s\leqslant k_0$,给定 $1\leqslant k\leqslant p$,记 y_k 在式(2a)及式 $\sum_{i=1}^{\rho}\sum_{l=0}^{\tilde{\sigma}_i-1}\sum_{j\geqslant1}^{\rho}\bar{e}_{i,j}^{l}y_j^{(l)}$ 中出现的最高方次为 ε_k. 定义集合

$$\Psi_s=\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p\},\ \Lambda_s=\{\varepsilon_i-r_i:\varepsilon_i-r_i\neq0\}.$$

给定两个非零数集 $D_i=\{a_1^i,\cdots,a_{j_i}^i\},i=1,2$,称 $D_1\overset{\triangleright}{-}D_2$,若 $j_2\leqslant j_1$ 且存在集合 D_1 的一种部分 $D_1=\oplus_{k=1}^{j_2}D_{1k}$,使得

$$a_k^2\leqslant\sum_{l\in D_{1k}}l,\quad k=1,\cdots,j_2.$$

定理 1 若存在 $s_0,1\leqslant s_0\leqslant k_0$,使得

$$\Theta_{s_0}\overset{\triangleright}{-}\Lambda_{s_0}, \tag{3}$$

则系统 $\Sigma(C,A,B)$ 可静态反馈解耦.

证 首先,由于行对行可解耦性不依赖系统的初始条件,不防假设 $x(0)=0,y^{(l)}(0)=0,l=1,2,\cdots$.

设 $\Psi_{s_0}=\{\tilde{\varepsilon}_1,\cdots,\tilde{\varepsilon}_p\}$,及 $\Theta_{s_0}=\{\tilde{\sigma}_1,\cdots,\tilde{\sigma}_{m-p}\}$. 定义集合 $S=\{j\in N:r_j<\tilde{\varepsilon}_j\}\overset{\text{def}}{=}(k_i)_\rho$. 定义 $q_i=\tilde{\varepsilon}_{k_i}-r_{k_i},i=1,\cdots,\rho$,及 $q=\sum_{i=1}^{\rho}q_i$.

记 $z_i=(y_{k_i}^{(r_{k_i})},\cdots,y_{k_i}^{(\tilde{\varepsilon}_{k_i}-1)})^{\mathrm{T}},i=1,\cdots,\rho;\tilde{v}=(y_1^{(\tilde{\varepsilon}_1)},\cdots,y_p^{(\tilde{\varepsilon}_p)})^{\mathrm{T}}$. 于是有

$$\dot{z}_i=A_iz_i+B_i\tilde{v}_{k_i},\quad i=1,\cdots,\rho. \tag{4}$$

其中 (A_i,B_i) 为 q_i 阶 Brunovsky 能控标准对. 定义 $z=(z_1^{\mathrm{T}},\cdots,z_\rho^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. 易知存在矩阵 $\hat{F}_1$ 及 $\hat{G}_1$ 满足

$$\ddot{v}=\hat{F}_1z+\hat{G}_1\tilde{v}. \tag{5}$$

由(2b)知 $(\xi_i^{\sigma_i-\tilde{\sigma}_i+1})^{(\tilde{\sigma}_i)}=M_i\tilde{x}+L_iz+\bar{w}_i,\quad i=1,\cdots,m-p$,其中 M_i,L_i 分别是 n 维及 q 维行向量.

由题设知存在集 $\{1,\cdots,m-p\}$ 的部分:$\{1,\cdots,m-p\}=\oplus_{i=1}^{\rho}D_i$ 满足 $q_i\leqslant\sum_{k\in D_i}\tilde{\sigma}_k,\ i=1,\cdots,\rho$. 设 $D_i=\{d_i^1,\cdots,d_i^{l_i}\},i=1,\cdots,\rho$,令

$$\bar{w}_{d_i^j}=\xi_{d_i^{j+1}}^{\sigma_{d_i^{j+1}}-\tilde{\sigma}_{d_i^{j+1}}+1}-M_{d_i^j}\tilde{x}-L_{d_i^j}z, \tag{6}$$
$$i=1,\cdots,\rho;\quad j=1,\cdots,l_i-1.$$

由(3)可知,任给 $i,1\leqslant i\leqslant\rho$,存在 $j_i,1\leqslant j_i\leqslant l_i$ 和 $\pi_i,0\leqslant\pi_i<\tilde{\sigma}_{d_i^{j_i}}$,使得 $q_i=\sum_{k=j_i}^{l_i}\tilde{\sigma}_{d_i^k}-\pi_i$. 定义

$$\zeta_i=\xi_{d_i^{j_i}}^{\sigma_{d_i^{j_i}}-\tilde{\sigma}_{d_i^{j_i}}+\pi_i+1},\quad i=1,\cdots\rho.$$

由(6)可得 $\zeta_i^{(q_i)}=M_{d_i^{l_i}}\tilde{x}+L_{d_i^{l_i}}z+\bar{w}_{d_i^{l_i}}$. 取 $\hat{z}_i=(\zeta_i,\cdots,\zeta_i^{(q_i-1)})^{\mathrm{T}}$. $i=1,\cdots,\rho$,于是有

$$\dot{\hat{z}}_i=A_i\hat{z}_i+B_i(M_{d_i^{l_i}}\tilde{x}+L_{d_i^{l_i}}z+\bar{w}_{d_i^{l_i}}),\quad i=1,\cdots,\rho. \tag{7}$$

记 $\hat{z}=(\hat{z}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\hat{z}_\rho^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. 由(2b)知 $\hat{z}$ 是变量 $\tilde{x}$ 与 z 的线性组合,故可表示为

$$\hat{z}=L^1z+L^2\tilde{x}. \tag{8}$$

不难验证 $\det(I_q-L^1)=1\neq0$. 于是由(8)得

$$(I-L^1)^{-1}L^2\tilde{x}=z+(I-L^1)^{-1}(\hat{z}-z). \tag{9}$$

定义反馈变换

$$\begin{cases}\bar{w}_{d_i^{l_i}}=\tilde{v}_{k_i}-M_{d_i^{l_i}}\tilde{x}-L_{d_i^{l_i}}z,\\ \bar{w}_{d_i^{l_i}}(0)=\tilde{v}_{k_i}(0)=0,\end{cases}\quad i=1,\cdots,\rho. \tag{10}$$

由前述的初始条件假设及(4)(7)(10),根据微分方程解的唯一性理论可知 $\hat{z}(t)=z(t),t\in\mathbb{R}$. 再由(9)知

$$z=(I-L^1)^{-1}L^2\tilde{x}.$$

综合以上各式,可知在静态反馈变换(5)(6)(10)下,闭环系统满足

$$\begin{cases}y_i^{(l)}=y_i^{(l)}(\tilde{x}),i=1,\cdots,p;l=1,\cdots,\tilde{\varepsilon}_i-1,\\ y_i^{(\tilde{\varepsilon}_i)}=\tilde{v}_i,\quad i=1,\cdots,p.\end{cases}$$

于是系统 $\Sigma(C,A,B)$ 可行对行静态解耦. 证毕.

注 1 定理 1 的一个贡献是它可以处理非最小本性结构解耦实现的系统,这些系统本身可静态解耦,但任一解耦了的闭环系统的无穷结构都不同于与原系统的本性结构. 目前可处理这类系统的结果尚不多见(参见文[4]).

记 $\bar{\varepsilon}_i$ 为 y_i 在(2b)中出现的最高方次. k_0 是 $\Sigma(C,A,B)$ 的传递函数的交互圈(interactor)在无穷远点的列秩[3].

推论 设 $k_0=p-1$,及 $\bar{\varepsilon}_i\leqslant n_{ie},i=1,\cdots,p$,则 $\Sigma(C,A,B)$ 可静态解耦的充分必要条件为

$$\sum_{i=1}^{p} n_{ie} - \sum_{i=1}^{p} n_i' \leqslant \sum_{j=1}^{m-p} \sigma_j.$$

证　由前面的讨论知集合 $\{n_{ie} - r_i\}_p$ 只有1个非零元,记为 q_1. 易知 $q_1 = \sum_{i=1}^{p} n_{ie} - \sum_{i=1}^{p} n_i'$. 于是根据定理1可知充分性成立.

必要性很容易由文[1]之 Theorem 3.1,文[3]之 Proposition 4.4 推出.　　证毕.

注2　文[5]也给出了在 $k_0 = p - 1$ 时系统可解耦的一个充分必要条件. 可以指出,推论1与文献[5]中的 Theorem 4.2 是互不蕴含的.

例　考察 R^{22} 上的系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (u_1, u_2, u_3, x_5, u_4, u_5, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, u_6, x_3 + x_{13}, x_{14}, \\ \qquad x_1 + x_{15}, x_{16}, u_7, x_{18}, x_2 + x_{19}, x_{20}, u_8, u_9, u_{10})^{\mathrm{T}}, \\ y = (x_1, x_2, x_3, x_3 - x_4, x_6, x_3 - x_4 + x_6 + x_7)^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{11}$$

可验证该系统不可能在保持本性阶的条件下解耦.

对(11)实施扩展的结构分解算法,可以验证定理1成立,故而系统(11)可解耦. 由定理1的证明过程,反馈

$$u_1 = x_{21},\ u_2 = x_{22},\ u_3 = x_5 + x_{13},$$
$$u_4 = v_3 - x_{14},\ u_5 = x_{17},$$
$$u_6 = v_6 - v_4 - v_5,\ u_7 = v_4 - v_1,$$
$$u_8 = v_5 - v_2,\ u_9 = v_1,\ u_{10} = v_2.$$

使系统(11)解耦.

4　结束语(Conclusion)

本文提出一个探讨 Morgan 问题的新思路,该思路的出发点是一个新的结构分解算法. 利用此算法我们得到右逆非方系统可行对行静态反馈解耦的一类充分条件,并在某些特殊情形获得 Morgan 问题完全的刻划. 定理1覆盖了非最小本性结构解耦实现的情形,而在已有的文献中对这一情形缺乏充分的讨论.

参考文献(References)

1　Loiseau J J. Sur la Modifucation de la Structure a l'Infini par un Retour d'Etat Statique. SIAM J. Contr. Optimiz., 1988, 26(2): 251 - 273

2　Silverman L M. Inversion of multivariable linear systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1969, 14(3): 270 - 276

3　Descusse J, Lafay J F and Malabre M. The solution to Morgan's problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, 33(8): 732 - 739

4　Zagalak P, et al. The row-by-row decoupling via state feedback: a polynomial approach. Automatica, 1993, 29(6): 1491 - 1499

5　Herrera A N and Lafay J F. New results about Morgan's problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, 38(12): 1834 - 1838

本文作者简介

孙振东　1968年生. 1990年毕业于青岛海洋大学应用数学系. 1993年于厦门大学系统科学系获硕士学位. 1996年于北京航空航天大学第七研究室获博士学位. 目前在清华大学自动化系从事博士后研究. 研究兴趣包括非线性反馈控制,混合动态系统等.