第 16 卷第 4 期
1999 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.16,No.4
Aug.,1999

时变系统线性二次型问题:无约束条件时的一般结果和有控制能量约束条件时的讨论*

陈阳舟
(北京工业大学自动化系·北京,100022)

摘要: 本文中我们首先对无约束条件时的有限时间区间上时变系统线性二次型(FH-LQ)问题进行了分类,并给出了问题属于每一类的充分必要条件(定理 2).其次证明了对于 FH-LQ 问题其下确界有限与其可达是等价的(定理 1).在此基础上给出了问题为正则的一些新的条件(定理 3).最后,我们通过新的途径讨论了有控制能量约束时的 FH-LQ 问题.

关键词: 线性二次型问题; 有限时区上的时变系统; 正则与奇异问题; 控制能量有界; 不亏损 S-过程

Linear Quadratic Problem for Time-Varying Systems: the Cases without Constraints and with the Control Energy Constraint

Chen Yangzhou
(Department of Automation Control, Beijing Polytechnic University·Beijing,100022,P.R.China)

Abstract: In the paper, we first make a classification for general finite-horizon time-varying linear quadratic(FH-LQ) problems and give out a necessary and sufficient condition on which the problem belongs to some class (Them 2). We prove that for the FH-LQ problems the statements of finite infimum and achieved finite infimum are equivalent to each other(Them 1). Basing on this we derive some new conditions for the regular case (Them 3). Finally, we discuss the FH-LQ problem with control energy constraint via an approach called "lossless S-procedure".

Key words: linear-quadratic problem; finite-horizon time-varying systems; singular and regular problems; boundary control energy; lossless S-procedure

1 引言(Introduction)

线性二次型(最优控制)问题就是在一个由线性动态方程描述的容许过程空间 $P[x_0]$ 中通过极小化一个给定的二次型泛函 Φ 来寻找一个最优过程,用符号 LQ($P[x_0],\Phi$) 表示该问题,其中 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 为给定的初始状态.将$\mathbb{R}^n$ 分划为三个互不相交的集合 X_-, X_0, X_+ 并且使得 X_- 为所有使 LQ($P[x_0],\Phi$) 无(有限)下确界的初态 x_0 构成,X_+ 为所有使 LQ($P[x_0],\Phi$) 的下确界有限且在 $P[x_0]$ 中唯一一点达到的初态 x_0 构成,X_0 为$\mathbb{R}^n$ 中所有其它类型的初态 x_0 构成.当 $X_- = \mathbb{R}^n$ 时称问题 LQ($P[x_0],\Phi$) 为完全下界的,$X_+ = \mathbb{R}^n$ 时称问题 LQ($P[x_0],\Phi$) 为正则的,其余情况时称问题 LQ($P[x_0],\Phi$) 为奇异的.对(带稳定性要求的)无限时区上时不变系统线性二次型问题我们知道有且仅有以下三种情况出现[1]: a) $X_- = \mathbb{R}^n$; b) $X_+ = \mathbb{R}^n$; c) $X_0 \cup X_+ = \mathbb{R}^n$, $X_0 \neq \emptyset$.对于 FH-LQ 问题情况有很大的不同.本文的主要目的之一是证明 FH-LQ 问题的有界性和有界可达性是等价的.其次,我们将给出 FH-LQ 问题为正则,奇异或完全无下界的充要条件.在此基础上导出问题为正则的一些新判据.最后,应用这些结果以及 S-过程方法讨论有控制能量约束时的 FH-LQ 问题.

2 无约束条件时的有限时区上时变线性二次型问题的一般结果(General results for FH-LQ problem without constraints)

设容许过程空间 $P[x_0]$ 为满足如下线性微分方程的过程之集合

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + B(t)u,\ x(0) = x_0,\ t \in [0,T], \tag{1}$$

$$x(\cdot) \in L_2^{(n)},\quad u(\cdot) \in L_2^{(m)}, \tag{2}$$

* 国家教委留学回国人员科研基金(95806)资助项目.
本文于 1995 年 9 月 27 日收到.1997 年 10 月 10 日收到修改稿.

这里 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 为状态变量,$u(t)\in\mathbb{R}^m$ 为控制变量,$L_2^{(k)}=L_2\{[0,T]\to\mathbb{R}^k\}$ 为勒贝格平方可积向量函数空间,$\mathbb{R}^k$ 为实欧空间. T 为给定的终端时刻. 二次型泛函 Φ 表示为

$$\Phi[x,u]=\frac{1}{2}\int_0^T\phi(t,x(t),u(t))\mathrm{d}t+\frac{1}{2}x(T)^*Qx(T),\tag{3a}$$

$$\phi(t,x,u)=x^*G(t)x+2x^*g(t)u+u^*\Gamma(t)u.\tag{3b}$$

其中上标 $*$ 表示向量和矩阵的转置. 那么有限时区 $[0,T]$ 上时变系统线性二次型(FH-LQ)问题就是在 $P[x_0]$ 中通过极小化泛函 Φ 来寻找一个最优过程,简记该问题为 LQ($P[x_0],\Phi$),这里(1),(3)式中的矩阵具有适当的维数且其元素均为实连续函数,并且 $G(t),\Gamma(t)$(对任意 $t\in[0,T]$)和 Q 为实对称的.

首先,我们对问题 LQ($P[x_0],\Phi$) 作如下分类.

定义 1　将 $\mathbb{R}^n$ 分划为三个互不交集合 X_-,X_0,X_+ 使得 X_- 为所有使 LQ($P[x_0],\Phi$) 无下界(或下确界为 $-\infty$)的初态 x_0 构成,X_+ 为所有使 LQ($P[x_0],\Phi$) 有下界(或下确界有限)且下确界在 $P[x_0]$ 中唯一一点达到(即在 $P[x_0]$ 中存在唯一的最优过程)的初态 x_0 构成,X_0 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有其它类型的初态 x_0 构成. 当 $X_-=\mathbb{R}^n$ 时称问题 LQ($P[x_0],\Phi$) 为完全无下界的,当 $X_+=\mathbb{R}^n$ 时称问题 LQ($P[x_0],\Phi$) 为正则的,其余情况时称问题 LQ($P[x_0],\Phi$) 为奇异的.

我们知道对无限时区上时不变线性二次型问题,其下确界有限时并不总是在 $P[X_0]$ 中达到[1]. 而对 FH-LQ 问题的情况不一样,我们有下面的结论. 其证明见第 4 节.

定理 1　设 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 给定,若 LQ($P[x_0],\Phi$) 有有限的下确界,则其下确界必在 $P[x_0]$ 中达到.

现在我们来给出问题 LQ($P[x_0],\Phi$) 为正则和奇异等的充分必要条件. 其证明放在第 4 节.

定理 2　1) LQ($P[x_0],\Phi$) 完全无下界的充分必要条件是

$$\exists(x,u)\in P[0],(x,u)\neq(0,0):\quad\Phi[x,u]<0.$$

2) LQ($P[x_0],\Phi$) 为正则的充分必要条件是

$$\forall(x,u)\in P[0],(x,u)\neq(0,0):\quad\Phi[x,u]>0.$$

3) LQ($P[x_0],\Phi$) 为奇异的充分必要条件是

$$\forall(x,u)\in P[0]:\quad\Phi[x,u]\geqslant 0,$$

且等号对于某个 $(x,u)\neq(0,0)$ 成立.

我们知道,对于无限时区上时不变线性二次型问题奇异情况只能是[1] $X_0\cup X_+=\mathbb{R}^n$ 且 $X_0\neq\varnothing$. 而对于 FH-LQ 问题则可能有两种情况: a) 对部分初态 LQ($P[x_0],\Phi$) 有有限下确界(参见[2],第 27 页的例); b) 对任意初态 LQ($P[x_0],\Phi$) 有有限下确界但不总是唯一可达(例如,当 $G(t)\geqslant 0,g(t)=0,\Gamma(t)\geqslant 0(\forall t\in[0,T])$ 但存在 $t\in[0,T]$ 使 $\det\Gamma(t)=0$ 时).

对于正则问题已经获得了十分完美的结果. 现在我们总结如下:

定理 3　设对任意的 $t\in[0,T]$ 有 $\Gamma(t)>0$,则

1) 下列断言是等价的.

i) LQ($P[x_0],\Phi$) 为正则的,即对任意初态 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 问题 LQ($P[x_0],\Phi$) 有唯一的最优过程.

ii) LQ($P[x_0],\Phi$) 为完全有下界的,即对任意初态 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 问题 LQ($P[x_0],\Phi$) 的下确界为有限数.

iii) 带边界条件 $Z(T)=\begin{bmatrix}I&0\\-Q&I\end{bmatrix}$ 的哈米顿方程 $J\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=H(t)z$ 的解

$$Z(t)=\begin{bmatrix}X(t)&X_1(t)\\\Psi(t)&\Psi_1(T)\end{bmatrix}$$

满足条件 $\det X(t)\neq 0(\forall t\in[0,T])$,这里及下面 I 为适当维数的单位矩阵,

$$H(t)=\begin{bmatrix}-G+g\Gamma^{-1}G^*&A^*-g\Gamma^{-1}B^*\\A-B\Gamma^{-1}g^*&B\Gamma^{-1}B^*\end{bmatrix}(t),$$

$$J=\begin{bmatrix}0&-I\\I&0\end{bmatrix}.\tag{4}$$

iv) 黎卡提微分方程

$$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}=[I\quad -R(t)]H(t)[I\quad -R(t)]^*,$$

$$R(T)=Q$$

有唯一一个定义在 $[0,T]$ 上的绝对连续的实对称矩阵解 $R(\cdot)$,这里 $H(t)$ 由(4)定义.

v) 存在二次型 $V(t,x)=x^*R(t)x$(这里 $R(\cdot)$ 为满足 $R(T)=Q$ 的绝对连续实对称矩阵)和 $n\times m$ 实矩阵 $r(\cdot)$ 使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}+\phi=|\Gamma(t)^{1/2}(u-r^*t)x)|^2,$$

$$\forall t\in[0,T],\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad u\in\mathbb{R}^m,$$

这里 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}$ 指 V 沿着(1)式的导数,$|\cdot|$ 表示通常的欧氏范数. ϕ 由式(3b)定义.

vi) 存在一个定义在 $[0,T]$ 上的绝对连续实对

称矩阵 $R_0(\cdot)$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}R_0(t)}{\mathrm{d}t} \geqslant [I - R_0]H(t)[I - R_0]^*,$$

$$R_0(T) \leqslant Q,$$

这里 $H(t)$ 由(4)定义.

vii) 对任意非零的 $(x,u) \in P[0]$ 有 $\Phi[x,u] > 0$.

2) 如果条件 i) ~ vii)之一满足,则 iv)和 v)中的 $R(t) = -\Psi(t)X(t)^{-1}, r(t) = -(R(t)B(t) + g(t))\Gamma(t)^{-1}$. 问题 $\mathrm{LQ}(P[x_0],\Phi)$ 的最优过程由方程(1) 和控制器 $u = r(t)^* x$ 确定,其最优值为 $\frac{1}{2}x_0^* R(0)x_0$.

对于奇异问题可通过正则化方法求解. 即在泛函 Φ 中加上 $\tau\int_0^T u^2\mathrm{d}t$ 或 $\tau\int_0^T (x^2 + u^2)\mathrm{d}t$,将 Φ 变为 Φ_τ,然后考虑正则问题 $\mathrm{LQ}(P[x_0],\Phi_\tau)$,其最优过程当 $\tau \to 0$ 时的极限过程即为奇异问题的解. 另一种方法则是通过系数矩阵变换的途径将奇异问题转化为正则问题[2].

3 有控制能量约束时的线性二次型问题(LQ problem with the control energy constraint)

设 $P_c[x_0]$ 为满足(1),(2)和控制能量约束条件

$$\| u(\cdot) \|_2^2 =: \int_0^T | u(t) |^2 \mathrm{d}t \leqslant 1 \tag{5}$$

的过程空间. 泛函 Φ 由(3) 定义,但本节中为简单起见假定对任意的 $t \in [0,T]$ 有 $G(t) \geqslant 0, g(t) = 0, \Gamma(t) \geqslant 0$. 让 $\Phi_\tau = \Phi + \tau \| u(\cdot) \|_2^2, \Gamma_\tau(t) = \Gamma(t) + \tau I$. 本节我们讨论有控制能量约束条件(5) 时的问题 $\mathrm{LQ}(P_c[x_0],\Phi)$.

下面的引理 1 是[3]中定理 2 的一个直接推论. 这一去掉约束的方法称为"不亏损的 S-过程"方法.

引理 1 a) 下面式子恒成立

$$\inf\{\Phi : (x,u) \in P_c[x_0]\} = \sup_{\tau \geqslant 0} \inf\{\Phi_\tau - \frac{1}{2}\tau : (x,u) \in P[x_0]\}, \tag{6}$$

并且(6)式右边的上确界一定在某个非负数 $\tau = \tau'$ 处达到(若右边的inf部分对每个 $\tau \geqslant 0$ 都等于 $-\infty$,则左边也等于 $-\infty$),其中 $P[x_0]$ 为由(1),(2) 定义的过程空间.

b) (6) 式中左边问题的最优过程(x^0, u^0)(若存在) 一定是右边问题的解,并且 a) 中的 τ' 满足条件

$$\tau'(\int_0^T | u^0(t) |^2 \mathrm{d}t - 1) = 0. \tag{7}$$

反过来,若(6)式右边问题的解 (x^0, u^0, τ') 存在且满足条件(5) 和(7),则(x^0, u^0) 必为(6) 式左边问题的最优过程.

由上面的简单化假定可知对任意的正数 τ,问题 $\mathrm{LQ}(P[x_0],\Phi_\tau)$ 是正则的. 其最优过程(x_τ, u_τ) 由调节器

$$u = r_\tau(t)^* x \tag{8}$$

和对象(1) 确定,而最优值为 $\frac{1}{2}x_0^* R_\tau(0)x_0$, 这里 $r_\tau(t), R_\tau(t)$ 满足下列方程

$$\begin{cases} r_\tau(t) = -R_\tau(t)B(t)\Gamma_\tau(t)^{-1}, \\ \dfrac{\mathrm{d}R_\tau(t)}{\mathrm{d}t} = [I - R_\tau(t)]H_\tau(t)[I - R_\tau(t)]^*, \\ R_\tau(T) = Q, \end{cases} \tag{9}$$

其中

$$H_\tau(T) = \begin{bmatrix} -G(t) & A(t)^* \\ A(t) & B(t)\Gamma_\tau(t)^{-1}B(t)^* \end{bmatrix}.$$

引理 2 对任意给定的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $s \in [0,T]$, $x_0^* R_\tau(s)x_0$ 是 $\tau \in (0,\infty)$ 的连续可微且单调上升的上凸函数,而且恒等式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}R_\tau(s)}{\mathrm{d}\tau} = \displaystyle\int_s^T \Phi(t,s)^* r_\tau(t) r_\tau(t)^* \Phi(t,s)\mathrm{d}t, \\ x_0^* \dfrac{\mathrm{d}R_\tau(0)}{\mathrm{d}\tau}x_0 = \displaystyle\int_0^T | u_{\tau,x_0}(t) |^2 \mathrm{d}t, \end{cases} \tag{10}$$

这里 $\Phi(t,s)$ 为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (A(t) + B(t)r_\tau(t)^*)x$ 的状态转移矩阵, u_{τ,x_0} 为由(1)和调节器(8)所确定的最优控制.

由引理 1 和引理 2 我们不难得到如下结果. 我们略去其证明过程.

定理 4 设对任意 $t \in [0,T]$,式(3) 中的 $G(t) \geqslant 0, g(t) = 0, \Gamma(t) \geqslant 0$ 且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 使 $P_c[x_0] \neq \varnothing$. 对任意 $\tau > 0$ 让 $R_\tau(t), r_\tau(t)$ 由(9) 定义. 那么,若方程 $\mathrm{d}(x_0^* R_\tau(0)x_0)/\mathrm{d}\tau = 1$ 有解 $\tau_{x_0} > 0$, 则 $\mathrm{LQ}(P_c[x_0],\Phi)$ 的最优过程由(1) 和(8)(其中取 $\tau = \tau_{x_0}$) 确定. 否则 $\mathrm{LQ}(P_c[x_0],\Phi)$ 的最优过程是 $\mathrm{LQ}(P[x_0],\Phi_\tau)$ 的由(1) 和(8) 确定的最优过程(x_τ, u_τ) 当 $\tau \to 0$ 时极限过程. 进一步 $\mathrm{LQ}(P_c[x_0],\Phi)$ 的最优值为$\frac{1}{2}(x_0^* R_{\tau_{x_0}}(0)x_0 - \tau_{x_0})$(非奇异情况) 或者 $\lim\limits_{\tau \to 0}\frac{1}{2}x_0^* R_\tau(0)x_0$ (奇异情况).

4 定理 1,2,3 和引理 2 的证明(Proof of Theorems 1,2,3 and Lemma 2)

定理 1 的证明. 设 $K(t,s)$ 为 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = A(t)x$ 的转移矩阵,即

$$\frac{\partial K(t,s)}{\partial t} = A(t)K(t,s), \quad K(s,s) = I.$$

我们将泛函 Φ 写成如下抽象形式

$$\Phi_{x_0}[u] = \frac{1}{2}(\Xi u,u) + (g_{x_0},u) + \frac{1}{2}x_0^* P(0)x_0,$$

其中

$$\Xi =: \Omega^* G(t)\Omega + \Omega^* g(t) + g(t)\Omega + \Theta + \Gamma(t),$$

$$g_{x_0} =: [\Omega^* G(t)K(t,0) + g(t)^* K(t,0) + K(T,t)^* K(T,0)]x_0,$$

$$P(t) =: K(T,t)^* QK(T,t) + \int_t^T K(s,t)^* G(s)K(s,t)\mathrm{d}s,$$

$$(\Omega u)(t) =: \int_0^t K(t,s)B(s)u(s)\mathrm{d}s,$$

$$(\Theta u)(t) =: K(T,t)^* \int_0^T K(T,s)B(s)u(s)\mathrm{d}s,$$

Ω^* 为 Ω 的共轭算子,且它们均为全连续算子(见[4],例4).Θ 为有界自共轭线性算子.从而 Ξ 为有界自共轭线性算子.于是,问题 $\mathrm{LQ}(P[x_0],\Phi)$ 等价于问题 $\inf\{\Phi_{x_0}[u]: u\in L_2^{(m)}\}$.

对给定的 x_0 设 $\mathrm{LQ}(P[x_0],\Phi)$ 有下界,即存在实数 C 使得 $\Phi_{x_0}[u]\geqslant C(\forall u\in L_2^{(m)})$.首先不难推出 $\Xi\geqslant 0$,否则存在 $u\in L_2^{(m)}$ 使 $(\Xi u,u)<0$,则对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}^1$ 有

$$\Phi_{x_0}[\lambda u] = \frac{1}{2}\lambda[\lambda(\Xi u,u) + 2(g_{x_0},u)] + \frac{1}{2}x_0^* P(0)x_0 \to -\infty(\lambda\to+\infty).$$

其次因 Ξ 为有界线性算子,所以 $Y =: \Xi L_2^{(m)}$ 为 $L_2^{(m)}$ 的线性子空间.在 Y 上定义一个线性泛函 $\Lambda(y) = (g_{x_0},u)$,这里 u 为 $\Xi u = y$ 的解(可以证明 $\Lambda(y)$ 有意义).事实上,若 $u_1,u_2\in L^{(m)}$ 使得 $\Xi u_1 = \Xi u_2 = y$,则因 $\Xi\Delta u = 0,\Delta u = u_1 - u_2$,故对任意 $\lambda\in\mathbb{R}^1$ 有

$$\Phi_{x_0}[\lambda\Delta u] = \lambda(g_{x_0},\Delta u) + \frac{1}{2}x_0^* P(0)x_0 \geqslant C,$$

从而有 $(g_{x_0},\Delta u) = 0$,即 $(g_{x_0},u_1) = (g_{x_0},u_2)$.据 Hahn-Banach 定理[4]将 $\Lambda(y)$ 保范延拓到 $L_2^{(m)}$ 上.又据 Riesz 定理[4],存在 $u^0\in L_2^{(m)}$ 使对任意 $u\in L_2^{(m)}$ 有 $\Lambda(u) = (u^0,u)$.对任意 $u\in L_2^{(m)}$ 让 $y = \Xi u$,则 $\Lambda(y) = \Lambda(\Xi u) = (u^0,\Xi u) = (g_{x_0},u)$.由此推出 $\Xi u^0 = g_{x_0}$.进一步,由 $\Xi>0$ 和 $\Xi u^0 = g_{x_0}$ 即可推出 $\Phi_{x_0}[u]$ 在 $L_2^{(m)}$ 中的一 u^0 处达到下确界.事实上,不难验证下面的等式

$$\Phi_{x_0}[u] = \frac{1}{2}[(\Xi(u+u^0),(u+u^0)) - (\Xi u^0,u^0) + x_0^* P(0)x_0].$$

证毕.

定理2的证明. 不难据等式 $\{\Phi[x,u]:(x,u)\in P[0]\} = \Phi_0[u] = \frac{1}{2}(\Xi u,u)$ 从定理1的证明中导出,我们略去详细推导.

定理3的证明. 可按如下两链进行:i)⇒ii)⇒iii)⇒iv)⇒v)⇒vi)⇒ii),v)⇒i)⇒vii)⇒i).略去详细过程.

引理2的证明. 设

$Z(t) = \begin{bmatrix} X_\tau(t) & X_{1\tau}(t) \\ \Psi_\tau(t) & \Psi_{1\tau}(t)\end{bmatrix}$ 是哈米顿方程 $J\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = H_\tau(t)Z$ 的满足边界条件 $Z_\tau(T) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -Q & I\end{bmatrix}$ 的解,则有

$$R_\tau(t) = -\Psi_\tau(t)X_\tau(t)^{-1},\quad Z_\tau(t)^* JZ_\tau(t)\equiv J,$$

$$r_\tau(t) = -R_\tau(t)B(t)\Gamma_\tau(t)^{-1},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} X_\tau(t) \\ \Psi_\tau(t)\end{bmatrix} = J^{-1}H_\tau(t)\begin{bmatrix} X_\tau(t) \\ \Psi_\tau(t)\end{bmatrix}. \tag{11}$$

将(11)式两边对 τ 求导后在 $[s,T]$ 上积分可得(注意,这里函数上面的点表示对 τ 的导数)

$$\begin{bmatrix} \dot X_\tau(s) \\ \dot\Psi_\tau(s)\end{bmatrix} = -Z_\tau(s)\int_s^T Z_\tau(t)^{-1}J^{-1}\dot H_\tau(t)\begin{bmatrix} X_\tau(t) \\ \Psi_\tau(t)\end{bmatrix}\mathrm{d}t.$$

有了上面的准备,我们可以计算(10)式中的 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}R_\tau(s)$.略去详细的推导过程.

最后可根据关系式 $x_0^* R_\tau(s)x_0 = 2\inf\{\Phi_\tau:(x,u)\in P[x_0]\}$ 来直接验证其关于 τ 的上凸性.引理的其余部分易检验.

参考文献(References)

1 Megretskii A V and Yakubovich V A. Singular stationary nonhomogeneous linear quadratic optimal control. Amer. Math. Soc. Transl., 1993, 155(2):129-167

2 Clements D J and Anderson B D O. Singular Optimal Control: The Linear Quadratic Problem. New York: Springer-Verlag. 1978(中译本:北京,科学出版社,1985)

3 Yakubovich V A. Nonconvex optimization problem: the infinite-horizon linear quadratic control problem with quadratic constraints. Syst. Contr. Lett., 1992, 16(19):13-22

4 夏道行,严绍宗.实变函数与应用泛函分析基础.上海:上海科技出版社,1987

本文作者简介

陈阳舟 1963年生.1984年毕业于湖北大学数学系获理学学士学位.1994年俄罗斯圣-彼得堡大学数学力系获数理博士学位.1996年12月至1998年3月于哈尔滨工业大学航天工程与力学系从事博士后研究工作.目前主要研究兴趣为微分对策,最优控制,鲁棒控制,非线性系统绝对稳定性分析等.