

含有有色噪声的随机系统在实用稳定意义下的变结构控制^{*}

邓飞其 刘永清 冯昭枢

(华南理工大学自动控制工程系·广州, 510640)

摘要: 研究含有典型环境随机噪声——Ornstein-Uhlenbeck 有色噪声的连续时间随机系统在实用稳定意义下的变结构控制, 构造了变结构控制律, 证明了滑动模的可达性, 估计了系统运动达到滑动模的时间, 证明了滑动模运动的实用稳定性和鲁棒性, 文末用仿真实例验证了本文的结果。

关键词: 有色噪声; 随机系统; 实用稳定性; 滑动模; 变结构控制

Variable Structure Control of Stochastic Systems with Colored Noises in Terms of Practical Stability

Deng Feiqi, Liu Yongqing and Feng Zhaoshu

(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology, Guangzhou, 510640, P. R. China)

Abstract: In this paper, variable structure control of stochastic systems of continuous time with a typical stochastic noise, i.e. the Ornstein-Uhlenbeck colored noises is investigated in terms of practical stability, variable structure control law is structured, the achievability of the sliding mode is proved and the time for a motion of the system to achieve the sliding mode is estimated and the practical stability and robustness of the sliding mode is proved. A simulation example is given at the end of the paper to illustrate the result of the paper.

Key words: colored noise; stochastic system; practical stability; sliding mode; variable structure control

1 引言(Introduction)

关于随机系统的变结构控制, 已有一些工作^[1~4]. 文[1, 2]讨论了离散随机系统的变结构控制, 文[3]讨论了一类有色噪声随机系统的变结构控制, 文[4]讨论了一般连续 Itô 型随机系统的变结构控制. 在文[1~3]中, 滑动模的稳定性采用依概率稳定性. 关于依概率的稳定性, 参考[5, 6]等文献. 这种稳定性常用来描述随机系统的稳定性. 除了依概率稳定性, 还有矩稳定性^[6, 7]. 用 Chebyshev 不等式可证: 任意阶矩的稳定性均蕴涵依概率稳定性^[6], 这样, 一个在一阶矩、二阶矩稳定性意义下不稳定的系统, 可能是依概率稳定的^[7]. 由此可见, 用矩稳定性描述随机系统的稳定性较合适. 对于工程应用, 用矩稳定性更合适些. 文[4]在均方稳定性意义下讨论了具有白噪声的 Itô 随机系统的变结构控制, 对随机系统的变结构控制作了初步的探讨. 其实, 在工程实际中, 还大量存在着含有有色噪声的随机系统, 因此有必要研究含有有色噪声的随机系统的变结构控制. 本文研究含有 Ornstein-Uhlenbeck 有色噪声的随机系统的变结构控制. 对滑动模运动本身的稳定性, 我

们采用均方实用稳定性描述. 实用稳定性是一种非 Lyapunov 意义下的稳定性质, 这种稳定性对系统运动给出了一种有界性估计, 并且通过限制系统运动的初始位置, 可使系统在预定的有界集内运动, 使系统具有较好的稳定性质和良好的动态特性. 由于在我们所讨论的系统中, 既含有外界干扰, 使系统没有平衡点, 又存在有色噪声, 所以, 不便采用 Lyapunov 意义下的均方稳定来描述系统运动的稳定性, 而实用稳定性是较合适的. 因此, 对滑动模运动, 我们建立实用稳定性. 文末的实例仿真说明了本文结果的效果.

2 系统描述(System statement)

设 $\alpha, \sigma = \text{const} > 0$, Itô 型随机微分方程

$$d\eta(t) = -\alpha\eta(t)dt + \sigma dw(t), \quad \eta(t_0) = 0,$$

(1)

称为 Langevin 方程, 其中 $W(t) (t \geq 0)$ 是标准的标量 Wiener 过程; 由此方程确定的随机过程 $\{\eta(t), t \geq 0\}$ 称为 Ornstein-Uhlenbeck 过程^[6, 8].

考虑含有 Ornstein-Uhlenbeck 有色噪声的随机系统

^{*} 国家自然科学基金(69874015)、广东省自然科学基金(970497)资助项目.

本文于 1997 年 3 月 7 日收到. 1998 年 5 月 4 日收到修改稿.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F(t) + \eta(t)G(t), \quad (2)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, G \in \mathbb{R}^n, \eta(t)$ 由(1)定义. 设 (A, B) 可控, B 是列满秩的, 存在 $n \times n$ 非奇异矩阵 T 使

$$TB = [O \quad I_m]^T. \quad (3)$$

令

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{A}(t) = \begin{bmatrix} A & G(t) \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}(t) = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \end{bmatrix}, \quad (4)$$

则(2)可增广为标准的 Itô 型随机系统

$$dY(t) = [\bar{A}Y(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}(t)]dt + \Theta dW(t). \quad (5)$$

设(5)所确定的流 $\{Y(t)\}$ 所定义的分生成元为 $\tilde{L}$, 我们将用 $\tilde{L}$ 讨论滑动模的可达性及滑动模运动的稳定性.

3 变结构控制律 (Variable structure control law)

记

$$y(t) = Tx(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix},$$

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$TF(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix},$$

$$TG(t) = \begin{bmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \end{bmatrix},$$

其中

$$A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}, \quad F_1, G_1, y_1 \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

则(2)可化成

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + F_1(t) + \eta(t)G_1(t), \\ \dot{y}_2(t) = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \mu(t) + F_2(t) + \eta(t)G_2(t). \end{cases} \quad (7)$$

由[9], 当 (A, B) 可控时, (A_{11}, A_{12}) 亦可控, 从而存在增益矩阵 $K \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ 使 $A_{11} - A_{12}K$ 稳定: $\operatorname{Re} \lambda(A_{11} - A_{12}K) < 0$.

将(2)的相应确定系统的变结构控制律应用于(2), 给出(2)的变结构控制律如下:

$$u(t) = -[K, I_m]T[Ax(t) + F(t) - [kS(t) + \varepsilon \operatorname{sgn} S(t)], \quad (8)$$

其中 $k = \operatorname{const} > 0$,

$$\begin{cases} S = [K, I_m]Tx, \quad \varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) > 0, \\ \operatorname{sgn} S = [\operatorname{sgn}(S)_1, \operatorname{sgn}(S)_2, \dots, \operatorname{sgn}(S)_m]^T. \end{cases} \quad (9)$$

在变结构控制律(8)作用下, (2)的闭环系统为

$$\dot{x}(t) = [I - B[K, I_m]T][Ax(t) + F(t)] + \eta(t)G(t) - B[kS(t) + \varepsilon \operatorname{sgn} S(t)]. \quad (10)$$

4 滑动模的可达性 (The reachability of the sliding mode)

在本文, 滑动模 $S = 0$ 的可达性是指均值意义下的可达性. 设

$$\begin{aligned} \|F_1(t)\| &\leq \bar{F}_{1M}, \quad \|G_1(t)\| \leq \bar{G}_{1M}, \\ \|G_2(t)\| &\leq \bar{G}_{2M}, \quad \bar{F}_{1M}, \bar{G}_{1M}, \bar{G}_{2M} = \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (11)$$

引入记号

$$\begin{aligned} \bar{G}_M &= \sqrt{\bar{G}_1^2 + \bar{G}_2^2}, \\ \varepsilon_0 &= \min[\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, m], \\ \beta &= \|[K, I_m]T\|, \quad g = \beta \bar{G}_M, \quad \gamma = \varepsilon_0 - \frac{g\sigma}{\sqrt{2\alpha}}. \end{aligned} \quad (12)$$

选取 ε 使

$$\varepsilon_0 > \|[K, I_m]T\| \bar{G}_M \sigma / \sqrt{2\alpha}, \quad (13)$$

则有 $\gamma > 0$.

定理 1 在变结构控制律(8)作用下, 闭环系统(10)从任意初始位置出发的运动均在有限时间内达到滑动流形 $S = 0$, 实现 $E\|S\| = 0$

证 设 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 是系统(10)具有初始条件 $x(t_0) = x_0$ 的解. 对 $x_0 = 0$ 的情形, 定理1的结论成立. 下设 $x_0 \neq 0$.

由(9), (10)有

$$\dot{S}(t) = [K, I_m]T\eta(t)G(t) - kS(t) - \varepsilon \operatorname{sgn} S(t). \quad (14)$$

记 $v = \|S\|$ 则有

$$\begin{aligned} \tilde{L}v &= \frac{1}{\|S\|} (S^T[K, I_m]T\eta(t)G(t) - kS^T S(t) - S^T \varepsilon \operatorname{sgn} S(t)) \leq g + \eta - \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (15)$$

由(1)有 $E[\eta^2(t)] \leq \sigma^2/2\alpha$, 于是有: $(E + \eta)^2 \leq E|E + \eta|^2 \leq \sigma^2/2\alpha$, 故得

$$\begin{aligned} E\tilde{L}v &\leq g + \sqrt{E|\eta|^2} - \varepsilon_0 \leq -\gamma, \\ [Ev]' &= E\tilde{L}v \leq -\gamma, \end{aligned} \quad (16)$$

积分(16)即得到(10)从 (t_0, x_0) 出发的运动到达滑

动流形 $S = 0$, 实现 $E \| S \| = 0$ 的时间估计:

$$T \leq E \| S(t_0) \| / \gamma \leq \beta E \| x(t_0) \| / \gamma. \quad (17)$$

定理 1 证毕.

注 同上易证: 在条件(13)之下, $[E \| S \|^2]' \leq -kE \| S \|^2$, 从而有 $[E \| S \|^2] \leq E \| S(t_0) \|^2 e^{-k(t-t_0)}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} E \| S(t) \|^2 = 0$.

5 滑动模的实用稳定性(The practical stability of sliding mode)

定义^[10,11] 设 $0 < \lambda < \Lambda$. $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 是系统(10)具有初始条件 $x(t_0) = x_0$ 的解过程. 若存在 $t_0 \in \mathbb{R}^+$ 使得 $E \| x_0 \|^2 < \lambda$ 蕴涵 $E \| x(t, t_0, x_0) \|^2 < \Lambda, t \geq t_0$, 则称系统(10)关于 (λ, Λ) 均方实用稳定; 若 $\forall t_0 \in \mathbb{R}^+, E \| x_0 \|^2 < \lambda$ 蕴涵 $E \| x(t, t_0, x_0) \|^2 < \Lambda, t \geq t_0$, 则称系统(10)关于 (λ, Λ) 均方一致实用稳定.

设 $0 < \lambda < \Lambda$, 记 $\hat{A} = A_{11} - A_{12}K$, 设 Lyapunov 矩阵方程

$$\hat{A}^T P + P \hat{A} = -I_{n-m} \quad (18)$$

的正定解矩阵为 P .

记

$$\begin{aligned} \lambda_M &= \lambda_{\max}(P) = \| P \|, \\ \delta &= 4\lambda_M [\bar{F}_{1M} + \bar{G}_{1M}\sigma^2/(2\alpha)], \\ \zeta &= \| T^{-1} \|^2 (1 + \| K \|^2) \text{cond}(P), \\ \Theta(\lambda) &= \max[\| I_{n-m}, 0 \| T \|^2 \lambda, 2\delta]. \end{aligned} \quad (19)$$

定理 2 若 $\zeta\Theta(\lambda) < \Lambda$, 则滑动模运动关于 (λ, Λ) 均方一致实用稳定.

另外

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} E \| x(t) \|^2 \leq 2\text{cond}(P)\delta. \quad (20)$$

证 由(7), (8), 滑动模方程可写为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = A_{12}y_1 + A_{12}y_2 + F_1(t) + \eta(t)G_1(t), \\ \dot{y}_2 = -KA_{12}y_1 - KA_{12}y_2 - KF_1(t) - [kS(t) + \varepsilon \text{sgn}S(t)]. \end{cases} \quad (21)$$

作 Lyapunov 函数 $V = y_1^T P y_1$, 则由(21)有

$$\begin{aligned} \tilde{L}V &= 2y_1^T P [A_{12}y_1 + A_{12}y_2 + \\ &F_1(t) + \eta(t)G_1(t)] = \\ &- y_1^T y_1 + 2y_1^T P A_{12} S + \\ &2y_1^T P F_1(t) + 2y_1^T P \eta(t) G_1(t). \end{aligned}$$

由于在滑动模上有 $E \| S \|^2 = 0$, 于是也有 $E y_1^T P A_{12} S = 0$. 这样由上式有

$$\begin{aligned} E \tilde{L}V &\leq -E \| y_1 \|^2 + \\ &2E y_1^T P F_1(t) + 2E y_1^T P \eta(t) G_1(t) \leq \\ &-E \| y_1 \|^2 + \frac{1}{4} E \| y_1 \|^2 + \\ &4 \| P \|^2 \| F_1^T(t) F_1(t) \| + \frac{1}{4} E \| y_1 \|^2 + \\ &4 \| P \|^2 \| G_1^T(t) G_1(t) \| \eta^2(t) \leq \\ &-\frac{1}{2} E \| y_1 \|^2 + \delta \leq -\frac{1}{2\lambda_M} EV + \delta. \end{aligned} \quad (22)$$

由于 $(EV)' = E \tilde{L}V$, 所以由(22)得 $(EV)' \leq -\frac{1}{2\lambda_M} EV + \delta$, 从而得估计式:

$$\begin{aligned} EV &\leq e^{-(t-t_0)/(2\lambda_M)} EV(t_0) + \\ &2\lambda_M \delta [1 - e^{-(t-t_0)/(2\lambda_M)}] = \\ &[EV(t_0) - 2\lambda_M \delta] e^{-(t-t_0)/(2\lambda_M)} + 2\lambda_M \delta. \end{aligned} \quad (23)$$

若 $EV(t_0) \geq 2\lambda_M \delta$, 则由(23)有

$$EV \leq EV(t_0) - 2\lambda_M \delta + 2\lambda_M \delta EV(t_0). \quad (24)$$

由(24)有

$$E \| y_1 \|^2 \leq \text{cond}(P) E \| y_1(t_0) \|^2. \quad (25)$$

若 $EV(t_0) \leq 2\lambda_M \delta$, 则由(23)有

$$\begin{aligned} EV &\leq e^{-(t-t_0)/(2\lambda_M)} 2\lambda_M \delta + \\ &2\lambda_M \delta [1 - e^{-(t-t_0)/(2\lambda_M)}] = 2\lambda_M \delta. \end{aligned}$$

此时

$$E \| y_1 \|^2 \leq 2\text{cond}(P)\delta. \quad (26)$$

由(25), (26)有

$$E \| y_1 \|^2 \leq \text{cond}(P) \max[E \| y_1(t_0) \|^2, 2\delta]. \quad (27)$$

另外

$$\begin{aligned} E \| y_2 \|^2 &= \\ E \| S - Ky_1 \|^2 &\leq \\ E \| S \|^2 + 2E \| S \| \| Ky_1 \| + E \| Ky_1 \|^2 &\leq \\ 0 + \sqrt{E \| S \|^2} \sqrt{E \| Ky_1 \|^2} + E \| Ky_1 \|^2 &\leq \\ \| K \|^2 E \| y_1 \|^2. \end{aligned}$$

于是由(27)有

$$\begin{aligned} E \| y \|^2 &= E \| y_1 \|^2 + E \| y_2 \|^2 \leq \\ (1 + \| K \|^2) E \| y_1 \|^2 &\leq \\ (1 + \| K \|^2) \text{cond}(P) \max[E \| y_1(t_0) \|^2, 2\delta]. \end{aligned} \quad (28)$$

当 $E \| x_0 \|^2 < \lambda$ 时,

$$\begin{aligned} E \|x(t)\|^2 &\leq \|T^{-1}\|^2(1 + \|K\|^2)\text{cond}(P) \\ &\max[\| [I_{n-m}, 0] T \|^2 \lambda, 2\delta] = \\ &\zeta \Theta(\lambda) < \Lambda. \end{aligned} \quad (29)$$

按定义 1, 定理 2 的结论得证.

注 1 在定理 1、定理 2 的条件中, 对 $F_2(t)$ 没有限制, 也就是说: 上述的变结构控制设计对 $F_2(t)$ 具有完全适应性.

6 滑动模的鲁棒性(The robustness of the sliding mode)

当系统中含有外界噪声干扰时, 等效控制法不再适应, 因此, 本文的变结构控制律是构造出来. 由此得到的滑动模运动也具有好的鲁棒性质.

定理 3 滑动模运动(10) 对于系统(2) 中 A 与 F 的形如 BE_A, BE_F 的系数扰动具有鲁棒性(不变性).

证 由变结构控制律(8), 当系统(2) 中 A 与 F 具有形如 BE_A, BE_F 的系数扰动时, 变结构控制律为

$$\begin{aligned} u = & -[K, I_m]T[Ax + F + BE_Ax + \\ & BE_F] - (kS + \varepsilon \text{sgn}S) = \\ & -[K, I_m]T[Ax + F] - \\ & (kS + \varepsilon \text{sgn}S) - E_Ax - E_F, \end{aligned}$$

而滑动模方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} = & Ax + BE_Ax + F + BE_F + \eta G - \\ & B[K, I_m]T[Ax + F] - BE_Ax - \\ & BE_F - B(kS + \varepsilon \text{sgn}S) = \\ & [I - B[K, I_m]T][Ax + F] - \\ & B(kS + \varepsilon \text{sgn}S). \end{aligned}$$

即此时滑动模方程仍为(10). 证毕.

7 仿真实例(Simulation example)

考虑具有 Ornstein-Uhlenbeck 有色噪声的随机系统

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^t \end{bmatrix} + \eta(t) \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{1+t} \\ 2\sin t \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $\eta(t)$ 由(1) 确定, $\alpha = 2, \sigma = 1$.

取 $K = [-1]$, 由本文定理 1 和定理 2, 在变结构控制律

$$\begin{aligned} u(t) = & -[-x_1(t) + 7x_2(t)] + e^{-t} - e^t - \\ & [-x_1(t) + x_2(t)] - \end{aligned}$$

$$3\text{sgn}[-x_1(t) + x_2(t)] \quad (31)$$

作用下, 系统(30) 从 $x_1(0) = 3, x_2(0) = 4$ 出发的运动于时间 $[0, 6]$ 内到达滑动模运动, 且滑动模运动关于 $(2, 2.5)$ 均方一致实用稳定. 滑动流形为 $E \|S\| = 0, S = -x_1 + x_2$. 取步长 $h = 0.1$, 得仿真曲线如图 1, 2. 在图 2 中, $x_1(0) = x_2(0) = 0.9$.

仿真结果说明了滑动模的有限时间可达性和实用稳定性, 从而验证了本文的结论, 由仿真结果也看出: 对随机系统的变结构控制, 抖动现象也是存在的.

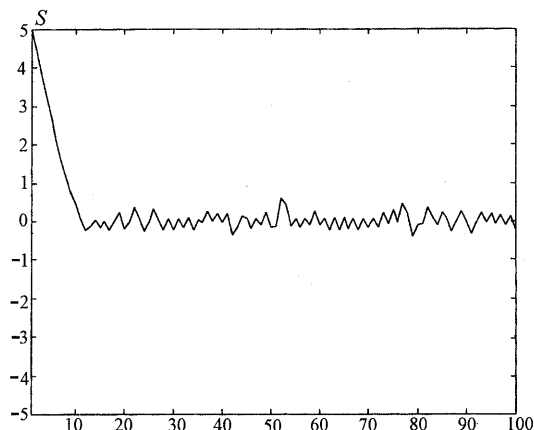


图1 滑动模的可达性

Fig.1 The reachability of the sliding mode

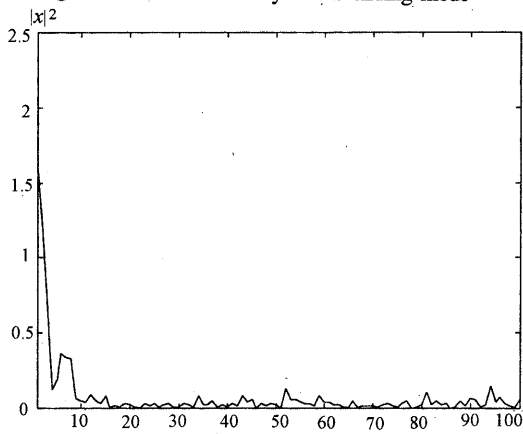


图2 滑动模的实用稳定性

Fig.2 The practical stability of sliding mode

8 结论(Conclusion)

本文研究了具有 Ornstein-Uhlenbeck 有色噪声的随机系统的变结构控制, 设计了变结构控制律, 证明了滑动模的可达性和实用稳定性, 并用仿真实例说明了本文结果的有效性. 可以看出: 本文给出的变结构控制律与噪声参数无关, 只是 ε 的界限与噪声有关. 因为系统(2) 含有有色噪声, 它没有通常意义下的平衡态, 我们不能讨论它在均方稳定意义下的控制问题, 所以我们在均方实用稳定意义下讨论它的变结构控制. 这对于工程中的实际问题可接受的.

参考文献(References)

- 1 郑锋,程勉,高为炳.随机系统的变结构控制.控制与决策,1992,7(1):2-12
- 2 Zheng Feng, Chen Mian and Gao Weibin. Variable structure control of stochastic systems. Systems & Control Letters, 1994, 22(3): 209-222
- 3 夏常弟,李治.具有随机量测噪声的变结构控制.控制与决策,1994,9(3):226-229
- 4 邓飞其等.随机系统的变结构控制.自动化学报,1997,23(2):124-127
- 5 Kushner H J. Stochastic Stability and Control. New York: Academic Press, 1967
- 6 Michael C Mackey and Irina G Nechaeva. Noise and stability in differential delay equations. J. of Dynamics and Differential Equations. 1994, 6(3):395-426
- 7 Soong T T. Random Differential Equations in Science and Engineering. New York: Academic Press, 1973
- 8 Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. New York: John Wiley and Sons, 1974
- 9 高为炳.变结构控制理论基础.北京:科学出版社,1995
- 10 Lakshmikantham V, Leela S and Martynylk A A. Practical Stability of Nonlinear Systems, Singapore: World Scientific, 1991
- 11 Feng Zhaoshu and Liu Yongqing. Stability Analysis and Stabilization Synthesis of Stochastic Large-Scale Systems. Beijing & New York: Science Press, 1995

本文作者简介

邓飞其 1962年生.1983年毕业于湖南大学应用数学系,获理学学士学位,1997年毕业于华南理工大学自动控制工程系,获工学博士学位,广东省十佳博士生,现为华南理工大学系统工程研究所副教授、副所长、硕士生导师.感兴趣的研究方向是:随机系统与滞后系统的稳定、镇定与综合,发表论文120多篇,获得省部级科技奖励2项.

刘永清 见本刊1999年第1期第122页.

冯昭枢 见本刊1999年第3期第348页.

(上接第495页)

6 结论(Conclusion)

本文给出了由对象脉冲响应直接设计内模控制器的方法,为防止产生过大控制作用并保证闭环系统输出对阶跃输入的无静差特性,引入了对预估控制作用的二次约束和对控制器的静态增益约束,从而保证了内模控制系统的合理性.

参考文献(References)

- 1 Garcia C E and Morari M. Internal model control—1. a unifying reviews and some new results. Ind. Engng. Chem. Process Des. Dev., 1982, 21(3):308-323
- 2 Garcia C E, Prett D M and Morari M. Model predictive control: theory and practice—a survey. Automatica, 1989, 25(3):335-348
- 3 Grimble M J. Relationship between internal model control and LQG control structure. Automatica, 1989, 25(1):41-53
- 4 席裕庚.预测控制.北京:国防工业出版社,1993,18-28
- 5 华建兴.基于FIR型控制器的内模控制策略研究:[博士学位论文].上海:上海交通大学,1998

本文作者简介

华建兴 见本刊1999年第1期第116页.

席裕庚 见本刊1999年第1期第116页.