脉冲时滞微分不等式及鲁棒控制设计中的应用*

岳 东 许世范 刘永清
(中国矿业大学信电学院·徐州,221008) (华南理工大学电子与信息学院·广州,510640)

摘要: 本文首先建立脉冲微分不等式的稳定性结果.利用此结果并结合 Riccati 方程方法,对含变时滞测度型脉冲微分系统给出了其鲁棒控制设计.最后给出一设计实例.

关键词: 测度型脉冲微分系统; 时滞; 鲁棒控制; Riccati 方程

Differential Inequality with Delay and Impulse and Its Applications to Design of Robust Control

Yue Dong and Xu Shifan
(College of Information and Electrical Engineering, China University of Mining and Technology·Xuzhou, 221008, P. R. China)
Liu Yongqing
(College of Electronic and Information, South China University of Technology·Guangzhou, 510640, P. R. China)

Abstract: A stability result of differential inequality with impulse is first developed in this paper. By using the result and Riccati equation method, the new design method of robust control is proposed for measure differential systems with time-varying delays and impulse. Finally, a numerical example is given to illustrate the design process.

Key words: measure differential systems with impulse; delay; robust control; Riccati equation

1 引言(Introduction)

测度型脉冲系统在生态、物理、神经网络、最优控制等领域有广泛应用背景.近年来对此系统的研究受到人们的关注[2~4].

关于测度型脉冲系统控制的研究还不多见,主要工作有[2,5].而这些文献仅研究了当系统是确定的且不含时滞的情形.众所周知,实际中,由于建模误差及扰动等因素的影响,系统往往是不确定的.因此,对系统鲁棒控制的研究尤为重要.另外,由于时滞的出现,往往给控制的设计及动态性能的分析带来困难.本文对一类含变时滞的测度型脉冲系统提出其鲁棒控制设计.首先建立脉冲微分不等式的稳定性结果,而后利用此结果并结合 Riccati 方程方法,我们研究了在所给控制作用下闭环的动态品质.最后给出一设计实例.

2 准备工作(Preliminaries)

考虑如下时滞测度型脉冲微分系统

$$Dx(t) = (A + \Delta A)x + A_1 x(t - r(t)) + [(P + \Delta P)x + Gx(t - \tau(t))]Dw(t) + (B + \Delta B)u(t), \tag{1}$$

这里 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 表示状态变量,$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制. $A, \Delta A, A_1, P, \Delta P, G, B$ 和 ΔB 为适当维的确定或不确定矩阵. Dx, Dw 分别表示 x 和 w 的分布导数. w: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 为右连续的有界变差函数. $r(t), \tau(t)$ 表示时滞.

定义 函数 $w: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 称为属于 S^* 类的,如果

i) w 是右连续的,它在 $\mathbb{R}_+$ 的每个紧子区间上是有界变差的.

ii) 不连续点 $t_1 < t_2 < \cdots$ 是孤立点,当 $k \to +\infty$, $t_k \to +\infty$ 且 $t_0 \in \mathbb{R}_+$ 不是间断点.

iii) u 在 $\mathbb{R}_+$ 的子区间 $[t_k, t_{k+1})$, $k = 1,2,\cdots$ 可微,这里在 t_k 处的导数为右导数.

假定 $w \in S^*$,且具有如下形式

$$w(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k H_k(t), \tag{2}$$

这里

$$H_k(t) = \begin{cases} 0, & t < t_k, \\ 1, & t \geq t_k. \end{cases}$$

α_k 是实数.因此

* 国家自然科学基金(69874042)资助项目.
本文于 1996 年 9 月 10 日收到. 1998 年 10 月 26 日收到修改稿.

$$Dw(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta_k(t_k),$$

其中 $\delta(t_k)$ 是集中在 t_k 的 Dirac 测度, $t_k - t_{k-1} \geqslant \delta\sigma$, $\delta > 1$.

假设 1 $\Delta A, A_1, \Delta P$ 及 G 满足匹配条件,即存在 E_1, E_2, E_3, E_4 使

$$\Delta A = BE_1, \quad A_1 = BE_2, \quad \Delta P = BE_3, \quad G = BE_4$$

且 $E_i(i = 1,2,3,4)$ 可表示为

$$E_1 = \sum_{i=1}^{k_1} d_i e_i^{\mathrm{T}} s_i, \quad E_2 = \sum_{i=1}^{k_2} f_i g_i^{\mathrm{T}} \gamma_i,$$

$$E_3 = \sum_{i=1}^{k_3} l_i q_i^{\mathrm{T}} v_i, \quad E_4 = \sum_{i=1}^{k_4} h_i w_i^{\mathrm{T}} z_i,$$

其中 d_i, f_i, l_i, h_i 均为 m 维向量, e_i, g_i, q_i, w_i 均为 n 维向量, s_i, γ_i, v_i, z_i 为不确定量.

引入记号

$$T_1 = \bar{s}\sum_{i=1}^{k_1} d_i d_i^{\mathrm{T}}, \quad U_1 = \bar{s}\sum_{i=1}^{k_1} e_i e_i^{\mathrm{T}},$$

$$T_2 = \bar{\gamma}\sum_{i=1}^{k_2} f_i f_i^{\mathrm{T}}, \quad U_2 = \bar{\gamma}\sum_{i=1}^{k_2} g_i g_i^{\mathrm{T}},$$

$$T_3 = \bar{v}\sum_{i=1}^{k_3} l_i l_i^{\mathrm{T}}, \quad U_3 = \bar{v}\sum_{i=1}^{k_3} q_i q_i^{\mathrm{T}},$$

$$T_4 = \bar{z}\sum_{i=1}^{k_4} h_i h_i^{\mathrm{T}}, \quad U_4 = \bar{z}\sum_{i=1}^{k_4} w_i w_i^{\mathrm{T}},$$

其中

$$\bar{s} \geqslant \sup\{|s_i|, i = 1,2,\cdots,k_1\},$$
$$\bar{\gamma} \geqslant \sup\{|\gamma_i|, i = 1,2,\cdots,k_2\},$$
$$\bar{v} \geqslant \sup\{|v_i|, i = 1,2,\cdots,k_3\},$$
$$\bar{z} \geqslant \sup\{|z_i|, i = 1,2,\cdots,k_4\}.$$

假设 2 存在某非奇异矩阵 $N \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 及 E_5 使

$$\Delta BN = BNE_5,$$

且

$$\frac{1}{2}\lambda_{\min}[E_5 + E_5^{\mathrm{T}}] \geqslant \rho, \quad \rho > -1. \tag{3}$$

注 1 当 $N = I$ 时,上假设即为通常所给出的有关 ΔB 的假设.因此,假设 2 要比以往假设要求要宽.如: $\Delta B = B\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \eta & 0 \end{bmatrix}$, $|\eta| \leqslant 3$. 显然, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \eta & 0 \end{bmatrix}$ 不满足(3), 但若取 $N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则有 $\Delta BN = BN\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\eta}{2} & 0 \end{bmatrix}$, 而 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\eta}{2} & 0 \end{bmatrix}$ 满足条件(3).

假设 3 $0 < \gamma(t) \leqslant \sigma, 0 < \tau(t) \leqslant \sigma, \sigma > 0$.

为以后的分析,首先给出引理

引理 1 (脉冲时滞微分不等式)

考虑如下微分不等式

$$\begin{cases} \dot{f}(t) \leqslant -\alpha f(t) + \beta \| f_t \|, & t \neq t_k, \\ f(t_k) \leqslant a_k f(t_{k-}) + b_k \| f_{t_k} \|, \end{cases} \tag{$*$}$$

其中 $f(t) \geqslant 0, f_t = f(t+\theta), \theta \in [t-\sigma, t]$, $\| f_t \| = \sup\limits_{t-\sigma\leqslant s\leqslant t} f(s)$, $\| f_{t-} \| = \sup\limits_{t-\sigma\leqslant s< t} f(s)$, f_{t_0} 是连续函数.如果

i) $\alpha > \beta \geqslant 0$;

ii) $t_k - t_{k-1} > \delta\sigma, \delta > 1$ 且存在 $\gamma > 0, M > 0$, 使

$$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_{k+1} (\mathrm{e}^{\lambda\sigma})^k \leqslant M \mathrm{e}^{\gamma(t_k - t_0)},$$

其中 $\rho_i = \max\{1, a_i + b_i \mathrm{e}^{\lambda\sigma}\}$, λ 是方程 $\lambda = \alpha - \beta \mathrm{e}^{\lambda\sigma}$ 的唯一正根.

则系统解满足指数关系

$$f(t) \leqslant M \| f_{t_0} \| \mathrm{e}^{-(\lambda-\gamma)(t-t_0)}.$$

证 由于 $\alpha > \beta \geqslant 0$, 则 $\lambda = \alpha - \beta \mathrm{e}^{\lambda\sigma}$ 存在唯一正根.当 $t \in [t_0, t_1)$ 时,

$$\dot{f}(t) \leqslant -\alpha f(t) + \beta \| f_t \|,$$

由[1]的结果知

$$f(t) \leqslant \| f_{t_0} \| \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, t_1].$$

而当 $t = t_1$ 时

$$\begin{aligned} f(t_1) &\leqslant a_1 f(t_{1-}) + b_1 \| f_{t_{1-}} \| \leqslant \\ & a_1 \| f_{t_0} \| \mathrm{e}^{-\lambda(t_1 - t_0)} + b_1 \\ & \| f_{t_0} \| \mathrm{e}^{\lambda\sigma} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda(t_1 - t_0)} = \\ & (a_1 + b_1 \mathrm{e}^{\lambda\sigma}) \| f_{t_0} \| \mathrm{e}^{\lambda\sigma} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda(t_1 - t_0)}. \end{aligned}$$

进一步,当 $t \in [t_1, t_2)$ 时有

$$\dot{f}(t) \leqslant -\alpha f(t) + \beta \| f_t \|, \quad t \neq t_2,$$
$$f(t_2) \leqslant a_2 f(t_{2-}) + b_2 \| f_{t_{2-}} \|.$$

我们要证明 $f(t)$ 满足

$$f(t) \leqslant \rho_1 \| f_{t_0} \| \mathrm{e}^{\lambda\sigma} \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \in [t_1, t_2).$$

由于 $t \in [t_0, t_1)$ 时 $f(t) \leqslant \rho_1 \| f_{t_0} \| \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}$ 且 $f(t_1) \leqslant \rho_1 \| f_{t_0} \| \mathrm{e}^{\lambda\sigma} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda(t_1-t_0)}$,

因此有

$$\| f_t \| \leqslant \rho_1 \| f_{t_0} \| \mathrm{e}^{\lambda\sigma} \mathrm{e}^{-\lambda(t_1-t_0)}, \quad t \in [t_1 - \sigma, t_1].$$

在 $[t_1 - \sigma, t_1]$ 上构造一连续函数 $g_1(t)$, 它满足

$$f(t) \leqslant g_1(t), \quad t \in [t_1 - \sigma, t_1],$$

$$\| g_{1t_1} \| = \sup_{t_1-\sigma\leqslant s\leqslant t_1} g_1(s) = \rho_1 \| f_{t_0} \| \mathrm{e}^{\lambda\sigma} \mathrm{e}^{-\lambda(t_1-t_0)}, t \in [t_1 - \sigma, t_1].$$

例如取

$$g_1(t) = \rho_1 \| f_{t_0} \| e^{\lambda\sigma} e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \in [t_1 - \sigma, t_1].$$

考虑系统

$$\dot g_1(t) = -\alpha g_1(t) + \beta \| g_{1t} \|, \quad t \in [t_1, t_2],$$
$$g_1(s) = \rho_1 \| f_{t_0} \| e^{\lambda\sigma} e^{-\lambda(s-t_0)}, \quad s \in [t_1 - \sigma, t_1].$$

由[1]知

$$g_1(t) \leqslant \| g_{1t_1} \| e^{-\lambda(t-t_1)} \leqslant \rho_1 \| f_{t_0} \| e^{\lambda\sigma} e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \in [t_1, t_2).$$

下面证明

$$f(t) < \xi g_1(t) = P(t),\ \xi > 1,\ t \in [t_1 - \sigma, t_2]. \tag{4}$$

当 $t \in [t_1 - \sigma, t_1]$ 时,由于 $\xi > 1$,则

$$f(t) < P(t).$$

考虑 $t \in [t_1, t_2)$.若 $\exists t'$ 使

$$f(t') = P(t'), \tag{5}$$

则 $t' > t_1$.而

$$f'(t') \leqslant \alpha f(t') + \beta \| f_{t'} \| < -\alpha\xi g_1(t') + \beta\xi \| g_{1t'} \| = -\xi g'_1(t') = P'(t').$$

此结论将推知(5)式不可能出现,从而(4)式成立.令 $\xi \to 1$,得

$$f(t) \leqslant \rho_1 \| f_{t_0} \| e^{\lambda\sigma} e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \in [t_1, t_2).$$

进一步有

$$f(t_2) \leqslant a_2 f(t_{2-}) + b_2 \| f_{t_{2-}} \| \leqslant \rho_1(a_2 + b_2 e^{\lambda\sigma}) e^{\lambda\sigma} \| f_{t_0} \| e^{-\lambda(t_2-t_0)} \leqslant \rho_1\rho_2 e^{\lambda\sigma} \| f_{t_0} \| e^{-\lambda(t_2-t_0)}.$$

设 $t \in [t_{k-1}, t_k)$ 时

$$f(t) \leqslant \rho_1\rho_2\cdots\rho_{k-1}(e^{\lambda\sigma})^{k-2} \| f_{t_0} \| e^{-\lambda(t-t_0)},$$
$$f(t_k) \leqslant \rho_1\rho_2\cdots\rho_k(e^{\lambda\sigma})^{k-1} \| f_{t_0} \| e^{-\lambda(t_k-t_0)}.$$

在 $[t_k - \sigma, t_k]$ 上构造函数 $g_k(t)$ 满足:

$$f(t) \leqslant g_k(t), \quad t \in [t_k - \sigma, t_k],$$
$$\| g_{kt_k} \| = \sup_{t_k-\sigma\leqslant s\leqslant t_k} g_k(s) = \rho_1\rho_2\cdots\rho_k(e^{\lambda\sigma})^{k-1} \| f_{t_0} \| e^{-\lambda(t_k-t_0)}, \quad t \in [t_k - \sigma, t_k].$$

如取

$$g_k(t) = \rho_1\rho_2\cdots\rho_k(e^{\lambda\sigma})^{k-1} \| f_{t_0} \| e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \in [t_k - \sigma, t_k].$$

考虑系统

$$\dot g_k(t) = -\alpha g_k(t) + \beta \| g_{kt} \|, \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$
$$g_k(s) = \rho_1\rho_2\cdots\rho_k \| f_{t_0} \| (e^{\lambda\sigma})^{k-1} e^{-\lambda(s-t_0)}, \quad s \in [t_k - \sigma, t_k].$$

类似前面的证明方法可得:

$$f(t) \leqslant \rho_1\rho_2\cdots\rho_k(e^{\lambda\sigma})^{k-1} \| f_{t_0} \| e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}],$$
$$f(t_{k+1}) \leqslant \rho_1\rho_2\cdots\rho_{k+1}(e^{\lambda\sigma})^k \| f_{t_0} \| e^{-\lambda(t_{k+1}-t_0)}.$$

综上有

$$f(t) \leqslant \rho_1\rho_2\cdots\rho_{k+1}(e^{\lambda\sigma})^k \| f_{t_0} \| e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}]. \tag{6}$$

由条件 $\rho_1 \cdot \rho_2\cdots\rho_{k+1}(e^{\lambda\sigma})^k \leqslant M e^{\gamma(t_k-t_0)}$,因此有

$$f(t) \leqslant M \| f_{t_0} \| e^{-(\lambda-\gamma)(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0.$$

证毕.

推论 1 在定理1条件下,取 $\theta = \sup_{K\in(1,2,\cdots)}\{1, a_k + b_k e^{\lambda\sigma}\}$,则有

$$f(t) \leqslant \theta \| f_{t_0} \| e^{-(\lambda - \frac{\ln(\theta e^{\lambda\sigma})}{\delta\sigma})(t-t_0)}.$$

证 对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$,存在 k 使 $t \in [t_k, t_{k+1})$.由条件及(6)式得

$$f(t) \leqslant \rho_1\rho_2\cdots\rho_{k+1}(e^{\lambda\sigma})^k \| f_{t_0} \| e^{-\lambda(t-t_0)} \leqslant \theta(\theta e^{\lambda\sigma})^k \| f_{t_0} \| e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \in [t_k, t_{k+1})$$

而 $(\theta e^{\lambda\sigma})^k \leqslant e^{\frac{\ln(\theta e^{\lambda\sigma})}{\delta\sigma}(t_k-t_0)}$,因此得

$$f(t) \leqslant \theta \| f_{t_0} \| e^{-(\lambda - \frac{\ln(\theta e^{\lambda\sigma})}{\delta\sigma})(t-t_0)}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}).$$

因为 t 可任取,则有

$$f(t) \leqslant \theta \| f_{t_0} \| e^{-(\lambda - \frac{\ln(\theta e^{\lambda\sigma})}{\delta\sigma})(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0.$$

证毕.

注 2 若 $\delta > \dfrac{\ln(\theta e^{\lambda\sigma})}{\lambda\sigma}$,则由推论1易知,系统(*)的解指数渐近稳定.

3 控制设计(Design of control)

本文设计如下控制

$$u(t) = -NR^{-1}N^{\mathrm T}B^{\mathrm T}Lx. \tag{7}$$

其中 L 是某Riccati方程(将在下面给出)的正定解,$R = rI, r > 0$.

将其代入(1)得

$$\begin{aligned} Dx(t) = {} & (A + \Delta A)x(t) + A_1 x(t - \gamma(t)) + \\ & [(P + \Delta P)x(t) + Gx(t - \tau(t))]Dw(t) - \\ & (BN + \Delta BN)R^{-1}N^{\mathrm T}B^{\mathrm T}Lx(t). \end{aligned} \tag{8}$$

构选Lyapunov函数

$$V(t) = x^{\mathrm T}(t)Lx(t).$$

由于当 $t\in[t_k,t_{k+1})$ 时

$$\dot{x}(t)=(A+P)x(t)+(\Delta A+\Delta P)x(t)+A_1x(t-\gamma(t))+Gx(t-\tau(t))-(BN+\Delta BN)R^{-1}N^{\mathrm T}B^{\mathrm T}Lx(t),$$

因此

$$V'(t)=2x^{\mathrm T}L[(A+P)x+(\Delta A+\Delta P)x+A_1x(t-\gamma(t)))+Gx(t-\tau(t))-BN(I+E_5)R^{-1}N^{\mathrm T}B^{\mathrm T}Lx],$$

注意

$$2x^{\mathrm T}L(A+P)x=x^{\mathrm T}[(A+P)^{\mathrm T}L+L(A+P)]x,$$

$$2x^{\mathrm T}L(\Delta A+\Delta P)x\leqslant \frac{1}{d_1}x^{\mathrm T}LB(T_1+T_3)B^{\mathrm T}Lx+d_1x^{\mathrm T}(U_1+U_3)x= \frac{1}{d_1}x^{\mathrm T}LBNN^{-1}(T_1+T_3)(N^{\mathrm T})^{-1}N^{\mathrm T}B^{\mathrm T}Lx+d_1x^{\mathrm T}(U_1+U_3)x,$$

$$2x^{\mathrm T}LA_1x(t-\gamma(t))\leqslant \frac{1}{d_2}x^{\mathrm T}LBT_2B^{\mathrm T}Lx+d_2x^{\mathrm T}(t-\gamma(t))U_2x(t-\gamma(t))= \frac{1}{d_2}x^{\mathrm T}LBNN^{-1}T_2(N^{\mathrm T})^{-1}N^{\mathrm T}B^{\mathrm T}Lx+d_2x^{\mathrm T}(t-\gamma(t))U_2x(t-\gamma(t)),$$

$$2x^{\mathrm T}LGx(t-\tau(t))\leqslant \frac{1}{d_3}x^{\mathrm T}LBT_4B^{\mathrm T}Lx+d_3x^{\mathrm T}(t-\tau(t))U_4x(t-\tau(t))= \frac{1}{d_3}x^{\mathrm T}LBNN^{-1}T_4(N^{\mathrm T})^{-1}N^{\mathrm T}B^{\mathrm T}Lx+d_3x^{\mathrm T}(t-\tau(t))U_4x(t-\tau(t)),$$

$$-2x^{\mathrm T}LBN(I+E_5)R^{-1}N^{\mathrm T}B^{\mathrm T}Lx\leqslant -2(1+\rho)x^{\mathrm T}LBNR^{-1}N^{\mathrm T}B^{\mathrm T}Lx.$$

则有

$$V'(t)\leqslant x^{\mathrm T}[(A+P)^{\mathrm T}L+L(A+P)-LBN\hat{R}N^{\mathrm T}B^{\mathrm T}L]x+d_2x^{\mathrm T}(t-\gamma(t))U_2x(t-\gamma(t))+d_3x^{\mathrm T}(t-\tau(t))U_4x(t-\tau(t)),$$

其中

$$\hat{R}=2(1+\rho)R^{-1}-N^{-1}[\frac{1}{d_1}(T_1+T_3)+\frac{1}{d_2}T_2+\frac{1}{d_3}T_4](N^{\mathrm T})^{-1}.$$

如果存在正定矩阵 Q,L 使

$$(A+P)^{\mathrm T}L+L(A+P)-LBN\hat{R}N^{\mathrm T}B^{\mathrm T}L+d_1(U_1+U_2)=-Q$$

成立.则有

$$V'(t)\leqslant -x^{\mathrm T}Qx+d_2x^{\mathrm T}(t-\gamma(t))U_2x(t-\gamma(t))+d_3x^{\mathrm T}(t-\tau(t))U_4x(t-\tau(t)),$$

而

$$x^{\mathrm T}(t-\gamma(t))U_2x(t-\gamma(t))=x^{\mathrm T}(t-\gamma(t))L^{\frac12}L^{-\frac12}U_2L^{-\frac12}L^{\frac12}x(t-\gamma(t))\leqslant \lambda_{\max}(L^{-\frac12}U_2L^{-\frac12})x^{\mathrm T}(t-\gamma(t))Lx(t-\gamma(t))\leqslant \lambda_{\max}(L^{-\frac12}U_2L^{-\frac12})\sup_{t-\sigma\leqslant s\leqslant t}V(s).$$

同理

$$x^{\mathrm T}(t-\tau(t))U_4x(t-\tau(t))\leqslant \lambda_{\max}(L^{-\frac12}U_4L^{-\frac12})\sup_{t-\sigma\leqslant s\leqslant t}V(s),$$

因此有

$$V'(t)\leqslant -x^{\mathrm T}Qx+\{d_2\lambda_{\max}(L^{-\frac12}U_2L^{-\frac12})+d_3\lambda_{\max}(L^{-\frac12}U_4L^{-\frac12})\}\sup_{t-\sigma\leqslant s\leqslant t}V(s)\leqslant -\lambda_{\min}(Q)\lambda_{\max}^{-1}(L)V(t)+\{d_2\lambda_{\max}(L^{-\frac12}U_2L^{-\frac12})+d_3\lambda_{\max}(L^{-\frac12}U_4L^{-\frac12})\}V(t),\tag{9}$$

这里 $V_t=\sup_{t-\sigma\leqslant s\leqslant t}V(s)$.

由系统(2)知

$$x(t_k)-x(t_{k-})=\int_{t_{k-}}^{t_k}[(P+\Delta P)x(t)+Gx(t-\tau(t))]\mathrm{d}w(t)=\alpha_k(P+\Delta P)x(t_k)+\alpha_kGx(t_k-\tau(t_k)).$$

若 $I-\alpha_k(P+\Delta P)$ 可逆,则令 $M_k=I-\alpha_k(P+\Delta P)$ 有

$$x(t_k)=M_k^{-1}x(t_{k-})+\alpha_kM_k^{-1}Gx(t_k-\tau(t_k)).$$

因此

$$\begin{aligned}V(t_k)&=x^{\mathrm T}(t_k)Lx(t_k)=\\&[x^{\mathrm T}(t_{k-})(M_k^{\mathrm T})^{-1}+\alpha_kx^{\mathrm T}(t_k-\tau(t_k))G^{\mathrm T}(M_k^{\mathrm T})^{-1}]\cdot[M_k^{-1}x(t_{k-})+\alpha_kM_k^{-1}Gx(t_k-\tau(t_k))]=\\&x^{\mathrm T}(t_{k-})(M_k^{\mathrm T})^{-1}M_k^{-1}x(t_{k-})+2\alpha_kx^{\mathrm T}(t_{k-})(M_k^{\mathrm T})^{-1}M_k^{-1}Gx(t_k-\tau(t_k))+\\&\alpha_k^2x^{\mathrm T}(t_k-\tau(t_k))G^{\mathrm T}(M_k^{\mathrm T})^{-1}M_k^{-1}G_x(t_k-\tau(t_k))\leqslant\\&x^{\mathrm T}(t_{k-})(1+\alpha_k)(M_k^{\mathrm T})^{-1}M_k^{-1}x(t_{k-})+(\alpha_k+\alpha_k^2)x^{\mathrm T}(t_k-\tau(t_k))\cdot G^{\mathrm T}(M_k^{\mathrm T})^{-1}M_k^{-1}Gx(t_k-\tau(t_k)).\end{aligned}$$

由于 $\tau(t)>0$,因此有

$$V(t_k)\leqslant(1+|\alpha_k|)\lambda_{\max}(L^{-\frac{1}{2}}(M_k^{\mathrm{T}})^{-1}M_k^{-1}L^{-\frac{1}{2}})\cdot V(t_{k-})(|\alpha_k|+\alpha_k^2)\cdot \lambda_{\max}(L^{-\frac{1}{2}}G^{\mathrm{T}}(M_k^{\mathrm{T}})^{-1}M_k^{-1}GL^{-\frac{1}{2}})V_{t_k}, \tag{10}$$

这里 $V_{t_{k-}}=\sup\limits_{t_k-\sigma\leqslant s\leqslant t_k}V(s)$.

定理 1 若对 $d_1>0,d_2>0,d_3>0$ 及 $R>0$ 下 Riccati 方程有一正定解 L

$$(A+P)^{\mathrm{T}}L+L(A+P)-LBN\{2(1+\rho)R^{-1}-N^{-1}[\frac{1}{d_1}(T_1+T_3)+\frac{1}{d_2}T_2+\frac{1}{d_3}T_4](N^{\mathrm{T}})^{-1}\}\cdot N^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}L+Q+d_1(U_1+U_2)=0, \tag{11}$$

而且满足:

i) $\lambda_{\min}(Q)>\lambda_{\max}(L)\{d_2\lambda_{\max}(L^{-\frac{1}{2}}U_2L^{-\frac{1}{2}})+d_3\lambda_{\max}(L^{-\frac{1}{2}}U_4L^{-\frac{1}{2}})\}$;

ii) 令 $\theta=\sup\limits_{k\in\{1,2,\cdots\}}\{1,(1+|\alpha_k|)\lambda_{\max}(L^{-\frac{1}{2}}(M_k^{\mathrm{T}})^{-1}M_k^{-1}L^{-\frac{1}{2}})+(|\alpha_k|+\alpha_k^2)\lambda_{\max}(L^{-\frac{1}{2}}G^{\mathrm{T}}(M_k^{\mathrm{T}})^{-1}M_k^{-1}GL^{-\frac{1}{2}})\mathrm{e}^{\lambda\sigma}\}$,有 $\frac{\ln(\theta\mathrm{e}^{\lambda\sigma})}{\delta\sigma}<\lambda$,其中 λ 是方程 $\lambda=\lambda_{\min}(Q)\lambda_{max}^{-1}(L)-\{d_2\lambda_{\max}(L^{-\frac{1}{2}}U_2L^{-\frac{1}{2}})+d_3\lambda_{\max}(L^{-\frac{1}{2}}U_4L^{-\frac{1}{2}})\}\mathrm{e}^{\lambda\sigma}$ 的正根,则系统(1)在控制(7)作用下是指数渐近稳定的.

证 定义

$$f(t)=V(t),\ \|f_t\|=\sup_{t-\sigma\leqslant s\leqslant t}V(s),$$

$$\|f_{t-}\|=\sup_{t-\sigma\leqslant s\leqslant t}V(s),$$

$$\alpha_k=(1+|\alpha_k|)\lambda_{\max}(L^{-\frac{1}{2}}(M_k^{\mathrm{T}})^{-1}M_k^{-1}L^{-\frac{1}{2}}),$$

$$b_k=(|\alpha_k|+\alpha_k^2)\lambda_{\max}(L^{-\frac{1}{2}}G^{\mathrm{T}}(M_k^{\mathrm{T}})^{-1}M_k^{-1}GL^{-\frac{1}{2}}),$$

$$\alpha=\lambda_{\min}(Q)\lambda_{\max}^{-1}(L),$$

$$\beta=d_2\lambda_{\max}(L^{-\frac{1}{2}}U_2L^{-\frac{1}{2}})+d_3\lambda_{\max}(L^{-\frac{1}{2}}U_4L^{-\frac{1}{2}}),$$

则(9),(10)可化为引理 1 中的微分不等式,因此由推论 1 及注 2 并结合定理中的条件可推得结论.

证毕.

注 3 因为

$$[BN\quad ABN\quad A^2BN\quad\cdots\quad A^{n-1}BN]=[B\quad AB\quad A^2B\quad\cdots\quad A^{n-1}B]\begin{bmatrix}I&&&&\\&N&&&\\&&N&&\\&&&\ddots&\\&&&&N\end{bmatrix},$$

显然 $\mathrm{rank}[BN\quad ABN\quad A^2BN\quad\cdots\quad A^{n-1}BN]=\mathrm{rank}[B\quad AB\quad A^2B\quad\cdots\quad A^{n-1}B]$.因此,若$(A+P,B)$可控时,则$(A+P,BN)$也可控.

定理 2 若$(A+P,B)$可控,则对某 $Q>0$ 存在 $d_i(i=1,2,3,4)$ 和 $r>0$ 使(11)有解 $L>0$ 且满足条件 i).

证 取 $r>0$ 及 $d_i(i=2,3)$ 满足 $\hat{R}=2(1+\rho)R^{-1}-N^{-1}[\frac{1}{d_1}(T_1+T_3)+\frac{1}{d_2}T_2+\frac{1}{d_3}T_4](N^{\mathrm{T}})^{-1}>0$ 和条件 i).由注 3 知$(A+P,BN)$可控,因此对 $Q>0$ 及 $R_0=\hat{R}^{-1}>0$,存在 $L>0$ 满足

$$(A+P)^{\mathrm{T}}L+L(A+P)-LBNR_0^{-1}N^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}L+d_1(U_1+U_2)+Q=0.$$

因此,对 Q 及 $R=rI$,矩阵方程(11)有解 L 且满足条件 i). 证毕

控制 u 的设计步骤:

1) 寻求可逆矩阵 N,使 $\frac{1}{2}\lambda_{\min}[E_5+E_5^{\mathrm{T}}]\geqslant\rho I$, $\rho>-1$ 成立.若不存在 N,则停止;

2) 取 $r>0$ 及 $d_i(i=2,3)$ 满足

$$\hat{R}=2(1+\rho)R^{-1}-N^{-1}[\frac{1}{d_1}(T_1+T_3)+\frac{1}{d_2}T_2+\frac{1}{d_3}T_4](N^{\mathrm{T}})^{-1}>0$$

和

$$\lambda_{\min}(Q)>\lambda_{\max}(L)\{d_2\lambda_{\max}(L^{-\frac{1}{2}}U_2L^{-\frac{1}{2}})+d_3\lambda_{\max}(L^{-\frac{1}{2}}U_4L^{-\frac{1}{2}})\};$$

3) 对 $Q>0$ 及 $R_0=\hat{R}^{-1}>0$,求解 $L>0$ 满足 $(A+P)^{\mathrm{T}}L+L(A+P)-LBNR_0^{-1}N^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}L+d_1(U_1+U_2)+Q=0$;

4) 设计控制 $u(t)$ 为

$$u(t)=-NR^{-1}N^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Lx,$$

这里 $R=rI$.

4 例子(Example)

考虑系统

$$Dx(t)=(\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\eta\end{bmatrix})x(t)+\{(\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\xi&0&0\end{bmatrix})x(t)+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\omega_1&\omega_2&0\end{bmatrix}x(t-\tau(t))\}\mathrm{d}w(t)+$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\left(I+\begin{bmatrix}0&0\\s&0\end{bmatrix}\right)u(t). \qquad (12)$$

这里，$x(t)\in\mathbb{R}^3, 0<\tau(t)<\sigma, \sigma>0, |\eta|\leqslant 1, |\xi|\leqslant 1, |\omega_1|\leqslant 1, |\omega_2|\leqslant 1, |s|\leqslant 3.$

此时

$$T_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\quad U_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$T_3=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\quad U_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$T_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix},\quad U_4=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

取

$$N=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{bmatrix},\ d_1=1,\ d_2=d_3=\frac{1}{2},\ r=\frac{1}{60},$$

则对

$$Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad R=\frac{1}{60}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

可求得

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0.1377&0\\0&0&0.1379\end{bmatrix},$$

设计控制 $u(t)$ 为

$$u(t)=-\begin{bmatrix}0&16.5242&0\\0&0&16.5027\end{bmatrix}x(t).$$

进一步，若脉冲间隔 δ 满足定理1中条件ii)，则在上面设计的控制作用下，系统(12)是指数渐近稳定的.

参考文献(References)

1 Driver R D. Ordinary and Delay Differential Equations. New York: Spinger-Verlag, 1977

2 Deo S G and Pandit S G. Differential Systems Involving Impulses. New York: Springer-Verlag, 1982

3 徐远通.泛函微分方程与测度微分方程.广州:中山大学出版社，1988

4 Guan Zhihong and Liu Yongqing. The stability properties of nonlinear large scale systems with impulse effect. Int. J. Computer and Math., Appl., 1994, 28(9): 89 – 99

5 Liu Yongqing et al. The application of auxiliary simultaneous equations to the problem in the stabilization of singular and impulsive large scale systems. IEEE Trans. on Circuits and Systems, 1995, 42(1): 46 – 51

本文作者简介

岳　东　1964年生.副教授，硕士生导师.1995年在华南理工大学自动控制系获博士学位，1995年～1997年在中国矿业大学电工站作博士后研究.在国际和国内刊物及国际会议上发表40余篇论文，出版两部专著，获两项省部级奖励.目前研究兴趣有模糊控制，变结构控制和鲁棒控制以及CIMS理论与应用.

许世范　1931年生.教授，博士生导师.1956年在北京矿业学院研究生毕业.现任煤炭学会煤矿自动化专业委员会主任.主持了三项“863”计划项目，并在国内外刊物和会议上发表80篇论文.研究兴趣包括CIMS应用，煤矿机机器人和控制理论.

刘永清　见本刊1999年第1期第122页.