第 16 卷第 4 期
1999 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.16, No.4
Aug., 1999

广义线性系统的鲁棒稳定性分析与综合*

张庆灵　张立茜
(东北大学理学院·沈阳, 110006)
戴冠中
(西北工业大学信息科学与工程学院·西安, 710012)
聂义勇
(中国科学院现代制造 CAD/CAM 技术开放实验室·沈阳, 110003)

摘要: 研究广义线性系统的鲁棒稳定性分析与综合问题.基于广义线性系统的 Lyapunov 方程和 Riccati 方程,给出了相关的鲁棒稳定性分析与综合方法.

关键词: 广义线性系统; 鲁棒稳定性; Lyapunov 方程; Riccati 方程

Analysis and Synthesis of Robust Stability for Linear Time-Invariant Descriptor Systems

Zhang Qingling　and　Zhang Liqian
(College of Science, Northeastern University·Shenyang, 110006, P.R.China)
Dai Guanzhong
(College of Information Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University·Xi'an, 710072, P.R.China)
Nie Yiyong
(Open Laboratory of CAD/CAM Technology for Advanced Manufacturing, Academia Sinica·Shenyang, 110003, P.R.China)

Abstract: In this paper, the problems of robust stability analysis and synthesis for linear time-invariant descriptor systems are discussed. Based on the results of Lyapunov equation and Riccati equation of the systems, related robust stability and stabilizability methods are proposed.

Key words: linear time-invariant descriptor systems; robust stability; Lyapunov equation; Riccati equation

0 引言(Introduction)

由于广义线性系统具有正常系统所不具有的脉冲行为,而使有关鲁棒控制问题的研究变得复杂而富于新颖性.虽然这类问题的研究目前已取得了一些进展[1~4],但仍然有许多工作需要去做.

本文基于广义线性系统的 Lyapunov 方程和 Riccati 方程,研究该系统的渐近(鲁棒)稳定性分析与综合问题,得到了广义线性系统正则、无脉冲和渐近稳定的充要条件.还对相关的鲁棒稳定性分析与稳定问题进行了探讨,得到了一些基础性的结果.限于篇幅,本文的一些证明从略.

1 稳定性分析(Stability analysis)

考虑不带有输入项的广义线性系统:

$$E\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = Ax. \tag{1}$$

其中, x 为 n^- 维状态向量; E, A 分别为 $n \times n$ 阶矩阵.假定 $\mathrm{rank}(E) = r$, 广义线性系统(1)的 Lyapunov 函数和 Lyapunov 方程分别为[5,6]:

$$v(Ex) = x^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}VEx. \tag{2}$$

$$E^{\mathrm{T}}VA + A^{\mathrm{T}}VE = -E^{\mathrm{T}}WE. \tag{3}$$

其中, V 为 $n \times n$ 阶半正定矩阵,满足: $v(Ex) > 0$, 如果 $Ex \neq 0$; $v(Ex) = 0$, 如果 $Ex = 0$. W 为 $n \times n$ 阶正定矩阵.

引理 1[7]　设广义线性系统(1)正则,则它渐近稳定且没有脉冲的充要条件是 Lyapunov 方程(3)对任意给定的 $W > 0$ 有解 $V \geqslant 0$, 满足: $\mathrm{rank}(E^{\mathrm{T}}VE) = \mathrm{rank}(V) = r$.

引理 2　设广义线性系统(1)正则,则 Lyapunov 方程(3)当 $\mathrm{rank}(E^{\mathrm{T}}VE) = \mathrm{rank}(V) = r$ 时,存在唯一解的充要条件是广义线性系统(1)没有脉冲且它的特征值 λ_i 满足:

$$\lambda_i + \bar{\lambda}_j \neq 0, \quad i \neq j. \tag{4}$$

证　充分性: 当广义线性系统(1)正则且没有脉冲时,存在可逆矩阵 P 和 Q, 使

$$P(EQ \quad AQ) = \{\mathrm{diag}[I_1 \quad 0]\mathrm{diag}[A_1 \quad I_2]\}.$$

* 中国博士后科学基金(95 博)、国家自然科学基金(69574004)和辽宁省科学技术基金(971046)资助.
本文于 1996 年 2 月 26 日收到. 1998 年 12 月 28 日收到修改稿.

其中，A_1 为 $n_1\times n_1$ 阶矩阵；其它各矩阵块分别具有相应的阶数(以后总假定各矩阵分块具有适当的阶数).代入式(3)得到：

$$A_1^{\mathrm T}V_{11}+V_{11}A_1=-W_{11},\quad V_{12}=0.$$

其中

$$P^{-\mathrm T}VP^{-1}=\begin{bmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{12}^{\mathrm T} & V_{22}\end{bmatrix},\ P^{-\mathrm T}WP^{-1}=\begin{bmatrix}W_{11} & W_{12}\\ W_{12}^{\mathrm T} & W_{22}\end{bmatrix}.$$

由式(4)知，V_{11} 唯一被确定.并且由 $V_{12}=0$ 得到：

$$\mathrm{rank}(E^{\mathrm T}VE)=\mathrm{rank}(V_{11})=\mathrm{rank}(\mathrm{diag}[V_{11}\quad V_{22}]),$$
$$V_{22}=0,$$

则 V 唯一被确定.

必要性：不失一般性，设

$$[E\quad A]=\begin{bmatrix}I & 0 & A_{11} & A_{12}\\ 0 & 0 & A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},$$

代入式(3)得到：

$$\begin{cases}A_{11}^{\mathrm T}V_1+V_1A_{11}+V_2A_{21}+A_{21}^{\mathrm T}V_2^{\mathrm T}=-W_1,\\ V_1A_{12}+V_2A_{22}=0.\end{cases}\tag{5}$$

其中

$$V=\begin{bmatrix}V_1 & V_2\\ V_2^{\mathrm T} & V_3\end{bmatrix},\quad W=\begin{bmatrix}W_1 & W_2\\ W_2^{\mathrm T} & W_3\end{bmatrix}.$$

当 $\mathrm{rank}(E^{\mathrm T}VE)=\mathrm{rank}(V)=r$ 时，V_1 可逆.由式(5)得到：

$$V_1^{-1}V_2A_{22}=-A_{12}.$$

并由假定知，$V_1^{-1}V_2$ 唯一被确定(V 唯一)，所以 A_{22} 满秩.进一步有

$$(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{\mathrm T}V_1+V_1^{\mathrm T}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})=-W_1$$

由 W_1 给定，V_1 唯一被确定得：矩阵 $(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$ 的特征值满足式(4).由

$$\det(sE-A)=\det(-A_{22}^{-1})\det(sI_1-A_{11}+A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$$

得证必要性. 证毕.

我们有如下基本定理：

定理 1 广义线性系统(1)正则，没有脉冲且渐近稳定的充要条件是 Lyapunov 方程(3)对任意给定的 $W>0$ 有满足 $\mathrm{rank}(E^{\mathrm T}VE)=\mathrm{rank}(V)=r$ 的唯一半正定解 V.

证 由上两引理知必要性显然.

充分性：由相同引理知，只需要证明广义线性系统(1)正则.由奇异矩阵束理论知[8]，如果矩阵束 $(sE-A)$ 奇异，则它的标准型一般表示为：

$$\mathrm{diag}(sE_0-A_0\cdots sL_k-J_k\cdots sM_k-N_k\cdots 0),\tag{6}$$

其中，(sE_0-A_0) 为正则矩阵束，

$$(sL_k-J_k)=\begin{bmatrix}s & -1 & & & \\ & s & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & s & -1\end{bmatrix},$$

$$(sM_k-N_k)=\begin{bmatrix}s & & & \\ -1 & s & & \\ & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & s\\ & & & -1\end{bmatrix}.$$

构造

$$\begin{cases}L_k^{\mathrm T}V_{kk}J_k+J_k^{\mathrm T}V_{kk}L_k=-L_k^{\mathrm T}W_{kk}L_k,\\ M_k^{\mathrm T}V_{kk}N_k+N_k^{\mathrm T}V_{kk}M_k=-M_k^{\mathrm T}W_{kk}M_k.\end{cases}\tag{7}$$

有如下结论：当矩阵 $W=(W_{ij})$ 正定时，式(7)中第一个方程不存在半正定解 V_{kk}；第二个方程不存在唯一解 V_{kk}，这里 $V=(V_{ij})$.两种情况都与给定条件不符合.另外，当 Lyapunov 方程(3)解唯一时，矩阵束 $(sE-A)$ 的标准型在对角线上不会含有零矩阵块，从而正则性得证. 证毕.

当用矩阵不等式描述广义线性系统(1)的渐近稳定性时，有：

定理 2 广义线性系统(1)正则、没有脉冲且渐近稳定的充要条件是当 $Ex\neq 0$ 时，Lyapunov 函数(2)满足：$\mathrm dv/\mathrm dt\angle 0$，且下式之一成立.

$$\mathrm{rank}([E\quad A])=n,\quad \mathrm{rank}([E^{\mathrm T}\quad A^{\mathrm T}])=n.\tag{8}$$

证 必要性：根据定理1有

$$\mathrm dv/\mathrm dt=-x^{\mathrm T}E^{\mathrm T}WEx\angle 0$$

对 $Ex\neq 0$ 成立.式(8)成立显然.必要性得证.

充分性：不失一般性，设 $(sE-A)$ 具有标准型(6)，由式(8)知此时对角线上无零块.由

$$\mathrm dv/\mathrm dt=x^{\mathrm T}(E^{\mathrm t}VA+A^{\mathrm T}VE)x\angle 0,$$

取 $x^{\mathrm T}E^{\mathrm T}=[0\ \cdots\ 0\ x_k^{\mathrm T}L_k^{\mathrm T}\ 0\ \cdots\ 0]\neq 0$ 时，根据假定得到：

$$\mathrm dv/\mathrm dt=x_k^{\mathrm T}(L_k^{\mathrm T}V_{kk}J_k+J_k^{\mathrm T}V_{kk}L_k)x_k\angle 0.$$

进一步取 x_k 为单位向量 e_1 时有 $L_ke_1\neq 0$，且 $J_ke_1=0$.则此时有 $\mathrm dv/\mathrm dt=0$.这些说明不存在形如 (sL_k-J_k) 的子矩阵束.类似的可推出：式(6)也不存在形如 (sM_k-N_k) 的子矩阵束.则广义线性系统(1)正则.

下面证明该系统无脉冲且渐近稳定.仍不失一般性，设

$$\mathrm dv/\mathrm dt=x^{\mathrm T}(E^{\mathrm T}VA+A^{\mathrm T}VE)x=x^{\mathrm T}\begin{bmatrix}V_1^{\mathrm T}A_{11}+A_{11}^{\mathrm T}V_1+V_2A_{21}+A_{21}^{\mathrm T}V_2^{\mathrm T} & V_1A_{12}+V_2A_{22}\\ A_{12}^{\mathrm T}V_1+A_{22}^{\mathrm T}V_2^{\mathrm T} & 0\end{bmatrix}x\angle 0\tag{9}$$

对 $x^{\mathrm T}E^{\mathrm T}=[x_1^{\mathrm T}\quad 0]\neq 0$ 成立. 记 $x^{\mathrm T}=[x_1^{\mathrm T}\quad x_2^{\mathrm T}]$. 则有

$$x_1^{\mathrm T}(V_1^{\mathrm T}A_{11}+A_{11}^{\mathrm T}V_1+V_2A_{21}+A_{21}^{\mathrm T}V_2^{\mathrm T})x_1\angle 0,$$

即

$$V_1^{\mathrm T}A_{11}+A_{11}^{\mathrm T}V_1+V_2A_{21}+A_{21}^{\mathrm T}V_2^{\mathrm T}=-W_1\angle 0. \tag{10}$$

由式(9)进一步得到:

$$2x_2^{\mathrm T}(A_{12}^{\mathrm T}V_1+A_{22}^{\mathrm T}V_2^{\mathrm T})x_1\angle x_1^{\mathrm T}W_1x_1.$$

由 x_1 取定 x_2 任意推出

$$A_{12}^{\mathrm T}V_1+A_{22}^{\mathrm T}V_2^{\mathrm T}=0, \tag{11}$$

另外, 由 $v(Ex)>0, Ex\neq 0$ 及

$$E^{\mathrm T}VE=\begin{bmatrix}V_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

得 V_1 正定. 于是, 从

$$A_{22}^{\mathrm T}V_2^{\mathrm T}V_1^{-1}=-A_{12}^{\mathrm T}$$

对 $V_2^{\mathrm T}V_1^{-1}$ 的可解性得

$$\mathrm{rank}(A_{22}^{\mathrm T})=\mathrm{rank}(A_{22}^{\mathrm T}\quad A_{12}^{\mathrm T}),$$

由系统正则性得 A_{22} 满秩, 即该系统无脉冲. 进一步由式(10)和式(11)得到

$$(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{\mathrm T}V_1+V_1^{\mathrm T}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})=-W_1,$$

则该系统渐近稳定. 充分性得证. 　　证毕.

2 鲁棒稳定性分析(Robust stability analysis)

设带扰动的广义线性系统为

$$E\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=(A+\Delta A)x. \tag{12}$$

其中, ΔA 为 $n\times n$ 阶系数扰动矩阵. 由于目前研究的广义线性系统只有在解存在唯一时, 它的控制才有实际意义[6], 因此我们总假定:

$$\mathrm{rank}([E^{\mathrm T}\quad A^{\mathrm T}+\Delta A^{\mathrm T}])=n. \tag{13}$$

容易证明(这里证明略去):

定理 3 如果

$$\mathrm{rank}([E^{\mathrm T}\quad A^{\mathrm T}])=n,$$
$$\|(E^{\mathrm T}E+A^{\mathrm T}A)^{-1}\|(2\|A\|\,\|\Delta A\|+\|\Delta A\|^2)<1, \tag{14}$$

则有式(13)成立. 这里使用的范数满足相应的运算要求[9].

由于广义线性系统(1)存在脉冲时, 微小的非结构扰动也有可能导致系统不稳定. 所以本文只讨论广义线性系统(1)无脉冲情况下的鲁棒稳定性问题.

记对称矩阵 M 当 $MEx\neq 0$ 时的最小(大)特征值为 $\lambda_{\min}(M)(\lambda_{\max}(M))$.

定理 4 设广义线性系统(1)正则、没有脉冲且渐近稳定, 式(14)成立, 还存在常数 $\alpha\geqslant 0$, 满足:

$$\Delta A^{\mathrm T}V\Delta A\leqslant\alpha E^{\mathrm T}VE,\quad 1+\alpha\angle\lambda_{\min}(W)/\lambda_{\max}(V), \tag{15}$$

则广义线性系统(12)正则, 没有脉冲且渐近稳定.

证　在给定条件下, 由定理 1 知, 存在 $V\geqslant 0$, $\mathrm{rank}(E^{\mathrm T}VE)=\mathrm{rank}(V)=r$, 满足 Lyapunov 方程(3). 将式(12)代入 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 得到:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}v/\mathrm{d}t &\leqslant x^{\mathrm T}[(1+\alpha)E^{\mathrm T}VE-E^{\mathrm T}WE]x\leqslant\\ &[(1+\alpha)\lambda_{\max}(V)-\\ &\lambda_{\min}(W)]x^{\mathrm T}E^{\mathrm T}Ex\leqslant 0,\end{aligned}$$

当 $Ex\neq 0$ 时, 有 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t<0$. 注意到式(14)成立, 则由定理 3 和定理 2 得证结论. 　　证毕.

3 鲁棒镇定方法(Robust stabilizability method)

根据前面的分析, 对于带有输入项的广义线性系统

$$E\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=Ax+Bu. \tag{16}$$

其中, u 为 m^- 维输入向量; B 为具有相应阶数的矩阵, 构造 Riccati 方程为:

$$E^{\mathrm T}VA+A^{\mathrm T}VE-E^{\mathrm T}VBR^{-1}B^{\mathrm T}VE=-E^{\mathrm T}WE. \tag{17}$$

其中, R 为 $m\times m$ 阶正定矩阵. 当广义线性系统(16)正则且没有脉冲时, 式(17)在标准型下等价于

$$\begin{bmatrix}V_1A_1 & V_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_1^{\mathrm T}V_1 & 0\\ V_2^{\mathrm T} & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}V_1 & V_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}\cdot$$

$$R^{-1}[B_1^{\mathrm T}\quad B_2^{\mathrm T}]\begin{bmatrix}V_1 & 0\\ V_2^{\mathrm T} & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}W_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

其中, $B^{\mathrm T}=[B_1^{\mathrm T}\quad B_2^{\mathrm T}]$.

令 $V_2=0$, 得到:

$$V_1A_1+A_1^{\mathrm T}V_1-V_1B_1R^{-1}B_1^{\mathrm T}V_1=-W_1.$$

由此不难证明如下结论:

定理 5 如果广义线性系统(16)正则、没有脉冲且 R- 能稳, 则 Riccati 方程(17)对于给定的 $W>0$ 有满足

$$\mathrm{rank}(E^{\mathrm T}VE)=\mathrm{rank}(V)=r$$

的半正定解 V.

定理 6 如果广义线性系统(16)正则、没有脉冲且 R- 能稳, 则它在状态反馈

$$u=-R^{-1}B^{\mathrm T}VEx \tag{18}$$

作用下得到的闭环广义系统

$$E\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=(A-BR^{-1}B^{\mathrm T}VE)x \tag{19}$$

正则、没有脉冲且渐近稳定. 这里 V 为 Riccati 方程(17)满足

$$\mathrm{rank}(E^{\mathrm T}VE)=\mathrm{rank}(V)=r$$

的半正定解.

当广义线性系统(16)存在脉冲时, 可以进一步

证明:

定理7 设广义线性系统(16)正则、脉冲能控且 R- 能稳，则存在状态反馈

$$u = -(K + R^{-1}B^{\mathrm{T}}VE)x, \tag{20}$$

其中，K为$m \times n$阶状态反馈矩阵，使闭环广义线性系统

$$E\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = (A - BK - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}VE)x \tag{21}$$

正则、无脉冲且渐近稳定.这里的 K 用于消除系统的脉冲;V是如下 Riccati 方程

$$E^{\mathrm{T}}VA_K + A_K^{\mathrm{T}}VE - E^{\mathrm{T}}VBR^{-1}B^{\mathrm{T}}VE = -E^{\mathrm{T}}WE \tag{22}$$

满足

$$\mathrm{rank}(E^{\mathrm{T}}VE) = \mathrm{rank}(V) = r$$

的半正定解.其中，$A_K = A - BK$.

将式(22)改写为:

$$E^{\mathrm{T}}V(A_K - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}VE) + (A_K - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}VE)^{\mathrm{T}}VE = -E^{\mathrm{T}}(W + VBR^{-1}B^{\mathrm{T}}V)E.$$

根据定理4,闭环广义线性系统(21)的动态鲁棒稳定性指标为:

$$1 + \alpha\angle\lambda_{\min}(W + VBR^{-1}B^{\mathrm{T}}V)/\lambda_{\max}(V), \tag{23}$$

可以调整

$$J = \int_0^{+\infty}(x^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}WEx + u^{\mathrm{T}}Ru)\mathrm{d}t \tag{24}$$

中的矩阵 W 和 R,通过求解广义线性系统(16)在约束条件(23)和性能指标(24)下的线性最优控制问题来取得满意的动态鲁棒稳定性指标 α.

4 结束语(Conclusion)

容易想到:可以像正常系统那样,利用 Lyapunov 方程和 Riccati 方程,进一步处理广义线性系统的鲁棒控制问题.有关的结果将另文撰述.

作者对审者提出的宝贵意见表示衷心的感谢.

参考文献(References)

1 王朝珠,戴立意,贾迎春.一类不确定广义线性系统稳定控制.控制理论与应用,1990,7(2):18-25

2 Fang C H and Chang F R. Analysis of stability robustness for generalized state-space systems with structured perturbations. Systems & Control Letters, 1993,21(2):109-114

3 Qiu L and Davison E J. The stability robustness of generalized eigenvalues. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992,37(5):886-891

4 Nichols N K. Robust control system designs for generalized state-space systems. In: Proc. 25th IEEE Conf. Decision and Control, USA, 1986,538-540

5 Zhang Q L and Xu X H. Robust control for descriptor systems. In: Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control, USA,1994,2981-2982

6 张庆灵.广义大系统的分散控制与鲁棒控制.西安:西北工业大学出版社,1997

7 张庆灵.广义系统结构稳定判别的李亚谱诺夫方法.系统科学与数学,1994,14(2):117-120

8 Gantmacher F R. The Theory of Matrices. New York:Chelsea, 1974

9 黄琳.系统与控制理论中的线性代数.北京:科学出版社,1984

本文作者简介

张庆灵 1956年生.东北大学理学院院长,控制理论与控制工程学科教授,博士生导师.主要研究方向为分散控制,鲁棒控制和广义系统理论.

张立茜 1968年生.东北大学力学系讲师.主要研究方向为模型化简与鲁棒控制.

戴冠中 见本刊1999年第1期第5页.

聂义勇 1940年生.中国科学院沈阳计算技术研究所室主任、研究员.主要研究方向为计算方法,网络技术和大系统稳定性理论等.