关于鞅超收敛定理与遗忘因子最小二乘算法的收敛性分析*

丁　锋　杨家本
(清华大学自动化系·北京,100084)

摘要：鞅超收敛定理是研究随机时变系统辨识算法有界收敛性的一个有效数学工具,它是鞅收敛定理在随机时变系统中的推广.文[1]用它证明了遗忘因子最小二乘算法参数估计误差的有界收敛性.但是文[1]假设系统的输入输出信号是各态遍历的,且协方差阵是用它的数学期望代替的,所得到的结果是近似的.而本文精确地给出了协方差阵的上下界,改进了文[1]的结果.

关键词：时变系统；鞅收敛定理；鞅超收敛定理；参数估计；最小二乘法

Remarks on Martingale Hyperconvergence Theorem and the Convergence Analysis of the Forgetting Factor Least Squares Algorithms

Ding Feng　and　Yang Jiaben
(Department of Automation, Tsinghua University·Beijing,100084,P.R.China)

Abstract: The martingale hyperconvergence theorem (MHCT) is an effective mathematical tool of analyzing the bounded convergence of identification algorithms and the extension of the martingale convergence theorem in stochastic time-varying systems. The upper boundedness of the parameter estimation error of forgetting factor least squares algorithms was given by using MHCT in Ref.[1], but the upper boundedness of the covariance matrix was replacecd with its expectation approximately. In this paper the upper and lower boundedness of the covariance matrix is given and the results of Ref.[1] are improved.

Key words: time-varying system; martingale convergence theorem; martingale hyperconvergence theorem; parameter estimation; least squares algorithm

1　引言(Introduction)

回顾稳定性和收敛性的发展历史,许多重大的突破和进展,往往不在于分析了某个具体系统的稳定性,而在于建立了某个新的稳定性或收敛性判据方法,即数学分析工具的诞生.每一个稳定性判据都有其使用的条件和适用的范围.例如：1)劳斯(Routh)判据简化了求解特征方程的根的困难；2)李雅普诺夫(Lyapunov)稳定性定理可以判断动力学系统的稳定性；3)波波夫(Popov)超稳定性理论给时不变系统模型参考自适应控制这一特定的非线性系统,提供了新的分析方法[2]；4)70年代末和80年代初,正是鞅收敛定理的诞生及其在控制中的应用,使得随机时不变系统的自适应控制及辨识的收敛性研究取得了突破性进展[2~8],它相当于李雅普诺夫稳定性定理在随机系统中推广；5)在此之后,随机时变系统辨识算法的收敛性便成为辨识领域的又一个难题,正是鞅超收敛定理的建立为解决这一难题提供了新方法,开辟了新思路[1].如果加强收敛性和稳定性判据方法的研究,可望解决随机时变系统乃至非线性随机时变系统自适应控制及辨识方法的收敛性和稳定性问题.本文给出了鞅超收敛定理的另一个证明,并完善了文[1]的结果.

2　鞅超收敛定理(Martingale hyperconvergence theorem)

鞅超收敛定理(MHCT)　考虑非负定函数

$$T(t)\triangleq T[x(t)]$$

和集

$$R_t=[x(t):g[x(t)]\leqslant\eta_t<\infty,\text{a.s.}],$$

若对于 $x(t)\in\mathbb{R}_t^c$ 有下式成立($\mathbb{R}_t^c$ 是$\mathbb{R}_t$ 的补集)

$$\mathrm{E}[T(t+1)\mid F_t]-T(t)\triangleq\Delta T(t+1)\leqslant-b(t+1),\quad \text{a.s.}\quad \text{for } x(t)\in\mathbb{R}_t^c,\tag{1}$$

其中 $g(x)=(a^{\mathrm{T}}x)^2$ 称为收敛变量,a 是一个非零的时变或时不变向量,$\eta_t\geqslant0$ 是一个非降有界随机变量(即$\mathbb{R}_t\subset\mathbb{R}_{t+1}$),$b(t)$ 是一个随机变量,$(x(t),$

* 国家自然科学基金(69374034)资助项目.
本文于1997年2月28日收到.1998年7月7日收到修改稿.

F_t)是一个适应序列.如果 $x(t)\in\mathbb{R}_t^c$ 时,$\sum_{t=t_0}^{\infty}b(t)=\infty$,a.s.($t_0<\infty$),则对于充分大 t,有 $x(t)\in\mathbb{R}_t$,a.s. 成立,或 $\lim_{t\to\infty}x(t)\in\mathbb{R}_\infty$,a.s..

证 设 $x(t)\in\mathbb{R}_t$ 的示性函数(indicator function)[9,10] 为 I_t,$x(t)\in\mathbb{R}_t^c$ 的示性函数为 $\bar{I}_t$. 式(1)两边取数学期望得

$$\mathrm{E}[T(t+1)]=\mathrm{E}[T(t)]+\mathrm{E}[\Delta T(t+1)],\quad(2)$$

而

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[T(t+1)\bar{I}_{t+1}]=\\&\mathrm{E}[T(t+1)]-\mathrm{E}[T(t+1)I_{t+1}]=\\&\mathrm{E}[T(t)]+\mathrm{E}[\Delta T(t+1)]-\mathrm{E}[T(t+1)I_{t+1}]=\\&\mathrm{E}[T(t_0)]+\sum_{i=t_0+1}^{t+1}\mathrm{E}[\Delta T(i)]-\mathrm{E}[T(t+1)I_{t+1}]\leqslant\\&\mathrm{E}[T(t_0)]+\sum_{i=t_0+1}^{t+1}\{\mathrm{E}[\Delta T(i)\bar{I}_i]+\mathrm{E}[\Delta T(i)I_i]\}.\end{aligned}\quad(3)$$

由于 $\mathbb{R}_t$ 非降,故有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[T(t+1)\bar{I}_{t+1}]\leqslant\\&\mathrm{E}[T(t_0)]+\mathrm{E}\Big[\sum_{i=t_0+1}^{t+1}\Delta T(i)\bar{I}_{t_0+1}\Big]+\\&\sum_{i=t_0+1}^{t+1}\mathrm{E}[\Delta T(i)I_i]\end{aligned}$$

或

$$\mathrm{E}[T(t)\bar{I}_t]\leqslant\mathrm{E}[T(t_0)]+\mathrm{E}\Big[\sum_{i=t_0+1}^{t}\Delta T(i)\bar{I}_{t_0+1}\Big]+\sum_{i=t_0+1}^{t}\mathrm{E}[\Delta T(i)I_i].\quad(4)$$

当 $x(t)\in\mathbb{R}_t^c$ 时,对于 $t\geqslant t_0$,有

$$\mathrm{E}[T(t)\bar{I}_t]=\mathrm{E}[T(t_0)]+\mathrm{E}\Big[\sum_{i=t_0+1}^{t}\Delta T(i)\bar{I}_{t_0+1}\Big]\leqslant\mathrm{E}[T(t_0)]-\mathrm{E}\Big[\sum_{i=t_0+1}^{t}b(t)\Big],\quad(5)$$

其中 $T(t_0)$ 为任意有限随机变量. 由于 $\sum_{t=t_0}^{\infty}b(t)=\infty$,a.s.,故当 t 充分大时,有

$$T(t_0)-\sum_{i=t_0+1}^{t}b(t)\leqslant\frac{\eta_t}{\|a\|^2},\quad\text{a.s.}$$

成立.这意味着 $\lim_{t\to\infty}\bar{I}_t=0$, a.s.即 $\lim_{t\to\infty}I_t=1$, a.s.或 $\lim_{t\to\infty}x(t)\in\mathbb{R}_\infty$, a.s.. 证毕.

注 如果 η_t 不是一个非降随机变量,但有上界 $\eta_{\max}$,则用 $\eta_{\max}$ 代替定理中的 η_t,定理的结论亦成立.

3 主要结果(Main results)

考虑文[1]的线性回归时变系统

$$y(t)=\varphi^{\mathrm{T}}(t)\theta(t-1)+v(t),\quad(6)$$

其中各变量的定义同文[1].

估计系统(6)时变参数 $\theta(t)$ 的遗忘因子最小二乘法(FFLS)可表述为

$$\hat{\theta}(t)=\hat{\theta}(t-1)+L(t)[y(t)-\varphi^{\mathrm{T}}(t)\hat{\theta}(t-1)],\quad(7)$$

$$L(t)=P(t)\varphi(t)=\frac{P(t-1)\varphi(t)}{\lambda+\varphi^{\mathrm{T}}(t)P(t-1)\varphi(t)},\quad(8)$$

$$P^{-1}(t)=\lambda P^{-1}(t-1)+\varphi(t)\varphi^{\mathrm{T}}(t),\ 0<\lambda\leqslant1.\quad(9)$$

其中 $\hat{\theta}(t)$ 为 $\theta(t)$ 的估计,λ 为遗忘因子,I 为单位阵,$\hat{\theta}(0)$ 为任意有界随机向量,$P(0)=P_0>0$.

引理 1 对于系统(6)和算法(7)~(9),如果下列强持续激励条件(SPE)成立

$$\text{(A1)}\quad\alpha I\leqslant\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(t+i)\varphi^{\mathrm{T}}(t+i)\leqslant\beta I,$$
$$\text{a.s. for any } t>0,$$
$$0<\alpha\leqslant\beta<\infty,\quad N\geqslant n=\dim\theta(t).$$

则协方差矩阵 $P(t)$ 满足

$$\begin{aligned}&\lambda^NP^{-1}(t-N)+\lambda^{N-1}N\alpha I\leqslant\\&P^{-1}(t)\leqslant\lambda^NP^{-1}(t-N)+N\beta I.\end{aligned}$$

若记 $t=Ni+k,0\leqslant k<N$,有

$$\begin{aligned}&\lambda^{Ni}P^{-1}(k)+\lambda^{N-1}\frac{1-\lambda^{Ni}}{1-\lambda^N}N\alpha I\leqslant\\&P^{-1}(t)\leqslant\lambda^{Ni}P^{-1}(k)+\frac{1-\lambda^{Ni}}{1-\lambda^N}N\beta I,\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}&\lambda^{N-1}\frac{1-\lambda^{Ni}}{1-\lambda^N}N\alpha I\leqslant\\&P^{-1}(t)\leqslant\lambda^{Ni}P^{-1}(k)+\frac{1-\lambda^{Ni}}{1-\lambda^N}N\beta I,\\&\frac{\lambda^{N-1}N\alpha}{1-\lambda^N}I\leqslant\lim_{t\to\infty}P^{-1}(t)\leqslant\frac{N\beta}{1-\lambda^N}I.\end{aligned}$$

证

$$\begin{aligned}&P^{-1}(t)=\\&\lambda P^{-1}(t-1)+\varphi(t)\varphi^{\mathrm{T}}(t)=\\&\lambda^2P^{-1}(t-2)+\lambda\varphi(t-1)\cdot\\&\varphi^{\mathrm{T}}(t-1)+\varphi(t)\varphi^{\mathrm{T}}(t)=\\&\lambda^NP^{-1}(t-N)+\sum_{k=0}^{N-1}\lambda^k\varphi(t-k)\varphi^{\mathrm{T}}(t-k).\end{aligned}$$

由于 $0<\lambda<1$, 利用 SPE 条件可得

$$P^{-1}(t) \leqslant \lambda^N P^{-1}(t-N) + \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(t-k)\varphi^{\mathrm{T}}(t-k) \leqslant \lambda^N P^{-1}(t-N) + N\beta I,$$

$$P^{-1}(t) \geqslant \lambda^N P^{-1}(t-N) + \lambda^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} \varphi(t-k)\varphi^{\mathrm{T}}(t-k) \geqslant \lambda^N P^{-1}(t-N) + \lambda^{N-1} N\alpha I,$$

$$P^{-1}(t = Ni+k) \leqslant \lambda^N P^{-1}[N(i-1)+k] + N\beta I \leqslant \lambda^{2N} P^{-1}[N(i-2)+k] + (1+\lambda^N) N\beta I \leqslant \lambda^{Ni} P^{-1}(k) + (1+\lambda^N+\cdots+\lambda^{N(i-1)}) N\beta I = \lambda^{Ni} P^{-1}(k) + \frac{1-\lambda^{Ni}}{1-\lambda^N} N\beta I.$$

同理

$$P^{-1}(t = Ni+k) \geqslant \lambda^{Ni} P^{-1}(k) + \lambda^{N-1}\frac{1-\lambda^{Ni}}{1-\lambda^N} N\alpha I.$$

当 $i \to \infty$ 时,$t \to \infty$,立即得知定理的诸结论成立.

证毕.

引理 2 在引理 1 的条件下,协方差矩阵 $P(t)$ 满足

$$\frac{\lambda^{N-1}[1-\lambda^{t-N+1}]}{1-\lambda}\alpha I + \lambda^t P_0^{-1} \leqslant P^{-1}(t) \leqslant \frac{N\beta}{1-\lambda} I + \lambda^t P_0^{-1},$$

$$\frac{\lambda^{N-1}}{1-\lambda}\alpha I \leqslant \lim_{t\to\infty} P^{-1}(t) \leqslant \frac{N\beta}{1-\lambda} I, \quad 0 < \lambda < 1.$$

证

$$P^{-1}(t) = \lambda P^{-1}(t-1) + \varphi(t)\varphi^{\mathrm{T}}(t) = \sum_{i=1}^{t} \lambda^{t-i}\varphi(i)\varphi^{\mathrm{T}}(i) + \lambda^t P^{-1}(0) \leqslant \sum_{i=1}^{t} \lambda^{t-i}\Big[\sum_{k=0}^{N-1} \varphi(i+k)\varphi^{\mathrm{T}}(i+k)\Big] + \lambda^t P^{-1}(0) \leqslant \sum_{i=1}^{t} \lambda^{t-i}[N\beta I] + \lambda^t P^{-1}(0) = \frac{1-\lambda^t}{1-\lambda} N\beta I + \lambda^t P_0^{-1} \leqslant \frac{N\beta}{1-\lambda} I + \lambda^t P_0^{-1},$$

$$NP^{-1}(t) = N\sum_{i=1}^{t} \lambda^{t-i}\varphi(i)\varphi^{\mathrm{T}}(i) + N\lambda^t P^{-1}(0) \geqslant \sum_{i=1}^{t-N+1} \lambda^{t-i}\varphi(i)\varphi^{\mathrm{T}}(i) + \sum_{i=2}^{t-N+2} \lambda^{t-i}\varphi(i)\varphi^{\mathrm{T}}(i) + \sum_{i=3}^{t-N+3} \lambda^{t-i}\varphi(i)\varphi^{\mathrm{T}}(i) + \cdots + \sum_{i=N}^{t} \lambda^{t-i}\varphi(i)\varphi^{\mathrm{T}}(i) + N\lambda^t P^{-1}(0) =$$

$$\sum_{i=1}^{t-N+1} \lambda^{t-i}\varphi(i)\varphi^{\mathrm{T}}(i) + \sum_{i=1}^{t-N+1} \lambda^{t-i-1}\varphi(i+1)\varphi^{\mathrm{T}}(i+1) + \sum_{i=1}^{t-N+1} \lambda^{t-i-2}\varphi(i+2)\varphi^{\mathrm{T}}(i+2) + \cdots + \sum_{i=1}^{t-N+1} \lambda^{t-i-N+1}\varphi(i+N-1)\varphi^{\mathrm{T}}(i+N-1) + N\lambda^t P^{-1}(0) =$$

$$\sum_{i=1}^{t-N+1} \lambda^{t-i}\Big[\sum_{k=0}^{N-1} \lambda^{-k}\varphi(i+k)\varphi^{\mathrm{T}}(i+k)\Big] + N\lambda^t P^{-1}(0) = \sum_{i=1}^{t-N+1} \lambda^{t-i}\Big[\sum_{k=0}^{N-1} \varphi(i+k)\varphi^{\mathrm{T}}(i+k)\Big] + N\lambda^t P^{-1}(0) \geqslant \sum_{i=1}^{t-N+1} \lambda^{t-i}[N\alpha I] + N\lambda^t P^{-1}(0) =$$

$$\frac{\lambda^{N-1}-\lambda^t}{1-\lambda} N\alpha I + N\lambda^t P_0^{-1} = \frac{\lambda^{N-1}(1-\lambda^{t-N+1})}{1-\lambda} N\alpha I + N\lambda^t P_0^{-1}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

因此

$$P^{-1}(t) \geqslant \frac{\lambda^{N-1}(1-\lambda^{t-N+1})}{1-\lambda}\alpha I + \lambda^t P_0^{-1}.$$

引理 2 证毕.

定理 文[1]定理 1 的假设条件下,FFLS 算法给得出参数估计误差 $\tilde{\theta}(t) \triangleq \hat{\theta}(t) - \theta(t)$ 均方有界,即

$$\lim_{t\to\infty} E\|\tilde{\theta}(t)\|^2 \leqslant \frac{nN\beta(1-\lambda^N)^2}{(1-\lambda)(\lambda^{N-1}N\alpha)^2}\sup E\|v(t)\|^2 + \frac{\beta}{(1-\lambda)\lambda^{N-1}\alpha}\sup E\|w(t)\|^2 \leqslant \frac{nN\beta(1-\lambda)}{(\alpha\lambda^{N-1})^2}\sup E\|v(t)\|^2 + \frac{\beta}{\alpha\lambda^{N-1}(1-\lambda)}\sup E\|w(t)\|^2 \leqslant \frac{nN\beta(1-\lambda)}{(\alpha\lambda^{N-1})^2}\sigma_v^2 + \frac{\beta}{\alpha\lambda^{N-1}(1-\lambda)}\sigma_w^2 \triangleq f(\lambda).$$

证 证明过程完全同文[1],这里略.

下面研究遗忘因子取何值时,参数估计误差上界最小.

推论 1 对于随机时变系统 $y(t) = \varphi^{\mathrm{T}}(t)\theta(t-1) + v(t)$,令定理 1 中 $f'(\lambda) = 0$, 可得

$$k_1[(2N-3)(1-\lambda)+1](1-\lambda)^2 = k_2[N\lambda - N + 1]\lambda^{N-1}, \tag{10}$$

式中

$$k_1 = \frac{nN\beta}{\alpha^2}\sigma_v^2, \quad k_2 = \frac{\beta}{\alpha}\sigma_w^2.$$

式(10)是一个 N 次方程,共有 N 个根,可以用数值方法求解这 N 个根,其中使 $f(\lambda)$ 为最小的根 $\lambda = \lambda_0$,即为最佳遗忘因子,$f(\lambda_0)$ 为最小估计误差上界.

推论 2 对于时不变随机系统(令 $\theta(t) \equiv \theta$, $\sigma_w^2 = 0$), $y(t) = \varphi^{\mathrm{T}}(t)\theta + v(t)$, 则

$$\lim_{t\to\infty} E\|\tilde{\theta}(t)\|^2 \leqslant \frac{nN\beta(1-\lambda)}{(\alpha\lambda^{N-1})^2}\sigma_v^2 \triangleq f_1(\lambda),$$

当 $\lambda \to 1$ 时,$f_1(\lambda) = 0 = \min$,$\lim\limits_{t\to\infty} E\|\tilde{\theta}(t)\|^2 = 0$,故常规最小二乘法可以给出时不变随机系统参数的一致估计;而 FFLS 算法($0 < \lambda < 1$)只能给出有界估计.当 $\lambda \to 0, N > 1$ 时,$f_1(\lambda) \to \infty$,即参数估计误差 $\tilde{\theta}(t)$ 的上界为无穷大.这与已有结果是相吻合的.

推论 3 对于确定性时变系统(令 $v(t) \equiv 0$, $\sigma_v^2 = 0$), $y(t) = \varphi^{\mathrm{T}}(t)\theta(t-1)$, 则

$$\lim_{t\to\infty} E\|\tilde{\theta}(t)\|^2 \leqslant \frac{\beta}{\alpha\lambda^{N-1}(1-\lambda)}\sigma_w^2 \triangleq f_2(\lambda),$$

当 $N = n = 1$(即 $\dim\theta(t) = 1$) 时,$f_2(\lambda) = \frac{\beta}{\alpha(1-\lambda)}\sigma_w^2$,只有当 $\lambda = 0$ 时,$f_2(\lambda) = \frac{\beta}{\alpha}\sigma_w^2 = \min$.也就是说,对于单参数系统,投影算法的估计误差上界最小.当 $N > 1$ 时,令 $f_2'(\lambda) = 0$ 可得 $\lambda = \frac{N-1}{N}$,此时

$$\lim_{t\to\infty} E\|\tilde{\theta}(t)\|^2 \leqslant \frac{\beta N}{\alpha}\left(\frac{N}{N-1}\right)^{N-1}\sigma_w^2,$$

故确定性时变系统的最佳遗忘因子为

$$\lambda = \lambda_o = \frac{N-1}{N}.$$

文[11~13]给出的参数估计误差为

$$\lim_{t\to\infty} E\|\tilde{\theta}(t)\|^2 = O\left((1-\lambda)\sigma_v^2 + \frac{\sigma_w^2}{1-\lambda}\right),$$

当 $\lambda \to 0$ 时,$\lim\limits_{t\to\infty} E\|\tilde{\theta}(t)\|^2 < \infty$,也就是说估计误差是有界的.如果没有各态遍历的假设,这个结论是错误的.因为当 $\lambda \to 0$ 时,协方差矩阵 $P(t) \to \infty$,不可能得到有界参数估计误差.

4 结语(Conclusion)

文[1]定理中条件(A7) $0 \leqslant \|\varphi(t)\|^2 \leqslant M < \infty$ 可以去掉,它已隐含在本文的条件(A1)中,并且可以直接得到 $M = nN\beta$.数据的平稳性(α 越大,β 越小,或 α 和 β 越接近)可以减小估计误差上界和提高辨识精度.

参考文献(References)

1 丁锋.鞅超收敛定理与遗忘因子最小二乘算法的收敛性分析.控制理论与应用,1997,14(1):90-95

2 冯纯伯,史维.自适应控制.北京:电子工业出版社,1986

3 袁震东.自适应控制理论及其应用.上海:华东师范大学出版社,1988

4 丁锋.多变量系统的辅助模型辨识方法的收敛性分析.控制理论与应用,1997,14(2):192-200

5 丁锋,谢新民.多变量系统的辅助模型辨识算法.北京:清华大学学报,1992,32(4):100-106

6 Solo V. The convergence of AML. IEEE Trans. Automat. Contr., 1979,24(6):958-962

7 Goodwin G C and Sin K S. Adaptive filtering prediction and control. INC., Englewood Cliffs, New Jersey:Prentice-Hall,1984

8 丁锋.时变参数系统辨识及其应用:[博士学位论文].北京:清华大学自动化系,1994

9 Moustafa K A F. Identification of stochastic time-varying systems. IEE Proc. Pt. D., 1983,130(4):137-142

10 郭雷.时变随机系统——稳定性、估计与控制.吉林:吉林科学技术出版社,1993

11 Ljung L and Priouret P. A result on the mean square error obtained using general tracking algorithms. Int. J. Adaptive Control and Signal Processing, 1991,5(4):231-250

12 Ljung L and Priouret P. Remarks on the mean square tracking error. Int. J. Adaptive Control and Signal Processing,1991,5(6):395-403

13 Guo L, Ljung L and Priouret P. Performance analysis of the forgetting factor RLS algorithm. Int. J. Adaptive Control and Signal Processing, 1993,7(6):525-527

本文作者简介

丁 锋 1963年生.1990年和1994年在清华大学自动化系分别获得硕士学位和博士学位,现任清华大学自动化系副教授.研究兴趣为自适应辨识与控制及其应用.已发表论文40余篇.

杨家本 1935年生.1959年毕业于清华大学动力系,现任清华大学自动化系教授,博士生导师.主要学术方向为系统工程和复杂系统的自组织理论与应用.