第16卷第4期　　控制理论与应用　　Vol.16,No.4
1999年8月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Aug.,1999

频域结构不确定性模型有效性分析——正切结构 Nevanlinna-Pick 插值法

黄 勇
(华中理工大学自动控制系·武汉,430074)
王书宁　　王长红　潘　锋
(清华大学自动化系·北京,100084)　(中国科学院声学研究所·北京,100080)

摘要: 利用正切结构 Nevanlinna-Pick 插值理论,研究了扰动集有结构的具有线性分式传递函数的模型有效性分析问题.模型有效性与参数辨识相结合是本领域目前的研究热点问题,故这里讨论的模型集的不确定性不仅有扰动集的不确定,还有不易观测的部分名义模型的不确定.我们将这类模型集的有效性分析问题转化为双线性矩阵不等式(BMI)求解问题,构造了双迭代算法进行求解,并给出了算法的理论分析,得到了在有限步迭代后可判定模型集是否无效的结论.

关键词: 鲁棒辨识; 模型有效性; 正切结构 Nevanlinna-Pick 插值; 双线性矩阵不等式(BMI)

Frequency Domain Validation of Structured Uncertain Models——A Structured Tangential Nevanlinna-Pick Interpolation Approach

Huang Yong
(Department of Automatic Control, Huazhong University of Science and Technology·Wuhan, 430074, P.R.China)
Wang Shuning
(Department of Automation, Tsinghua University·Beijing, 100084, P.R.China)
Wang Changhong　and　Pan Feng
(Institute of Acoustics Academia Sinica·Beijing, 100080, P.R.China)

Abstract: The frequency domain model validation for structured uncertain is discussed with the structured tangential Nevanlinna-Pick interpolation theory. The model uncertainty include both the part of normal model uneasy to measured uncertainty and the perturbations uncertainty, for the combination of identification and validation is a new point in this domain. We convert this problem into finding a feasible solution of a biaffine matrix inequality (BMI), It can be solved by a biaffine iteration algorithm. The theoretical analysis show that we can drove the conclusion of whether the uncertain model set is invalidation in finite step.

Key words: robust identification; model validation; structured tangential Nevanlinna-Pick interpolation; biaffine matrix inquality (BMI)

1 引言(Introduction)

面向鲁棒控制的模型有效性分析由文献[1]和[2]分别在频域和时域中进行了研究,随后文献[3]在时域中研究了结构不确定性模型有效性问题.这里在文[3]的基础上首次利用文[4],[5]的两类 Nevanlinna-Pick 插值理论,在频域内研究扰动集有结构的具有线性分式传递函数的模型的有效性分析问题.模型有效性与参数辨识相结合是本领域目前的研究热点问题,故这里模型的不确定集不仅有扰动集的不确定还有不易观测的部分名义模型的不确定.我们将这类模型集的有效性分析问题转化为双线性矩阵不等式(BMI)求解问题.利用双迭代算法进行求解,并给出了算法的理论分析,在有限步迭代后可判定模型集是否无效.

2 有关符号及问题描述(Notation and problem formulation)

2.1 有关符号(Notation)

$Z_{+,n}$ 表示不大于 n 的正整数;$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$ 分别为实数,复数集;$\mathbb{R}^N$,$\mathbb{C}^N$ 分别为 N 维实,复向量空间;$v \in \mathbb{C}^N$,$\| v \|$ 为其 Euclidean 范数;D_ρ 为$\mathbb{C}$上半径 $\rho > 1$

本文于1996年5月29日收到.1997年8月4日收到修改稿.

的开圆盘,即 $D_\rho := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$;$\partial D_\rho$ 为 D_ρ 的边界,$\partial D_\rho := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \rho\}$;$\mathrm{H}_\rho^\infty(\mathbb{C}^N)$ 为 D_ρ 上的有界解析向量函数空间 $\{f: D_\rho \to \mathbb{C}^N \mid f$ 在 D_ρ 上解析且 $\|f\|_{\infty,\rho} := \sup_{z\in D_\rho}\|f(z)\| < \infty\}$;$\mathbb{C}^{N\times M}$ 为复 $N\times M$ 矩阵空间,其范数 $\|\cdot\|_{\infty,\rho}$ 为 $v \in \mathbb{C}^{N\times M}$, $\|v\|_{\infty,\rho} := \bar{\sigma}(v)$,这里,$\bar{\sigma}(v)$ 为 v 的最大奇异值,$\underline{\sigma}(v)$ 为 v 的最小奇异值;$\otimes$ ——Kronecker 积. $\mathrm{H}_\rho^\infty(\mathbb{C}^{N\times M}$ 为 D_ρ 上的有界解析矩阵函数空间 $\{f: D_\rho \to \mathbb{C}^{N\times M} \mid, f$ 在 D_ρ 上解析且 $\|f\|_{\infty,\rho} := \sup_{z\in D_\rho}\|f(z)\|_{\infty,\rho} < \infty\}$;对 $M \in \mathbb{C}^{N\times M}$,$M^{\mathrm{T}}$ 为 M 的转置;M^* 为 M 的共轭转置;对 $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$,$\lambda_i(M)$ 为 M 的特征值;$\rho(M)$ 为 M 的谱半径;$\rho(M) := \max_i |\lambda_i(M)|$;若 $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$ 满足 $M = M^*$,则 $M > 0$ 表示 M 为正定矩阵;$x, y \in \mathbb{C}^N$, $< x, y > = x^* y$.

定义 $\Delta := \{\mathrm{diag}[\Delta_1, \cdots, \Delta_s] \mid \Delta_j \in \mathrm{H}_\rho^\infty(\mathbb{C}^{m_j\times m_j}), j \in Z_{+,s}\}$.其中,$\sum_{j=1}^{s} m_j = N$.

对 $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$,其结构奇异值 $\mu_{\bar{\Delta}(M)}$ 定义为 $(\inf\{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \Delta \in \bar{\Delta}, \det(I - M\Delta) = 0\})^{-1}$;进一步定义 $\hat{\mu}_{\bar{\Delta}(M)} = \inf\{\|DMD^{-1}\|_\infty \mid D$ 可逆,$D \in \bar{\Delta}'\}$.这里 $\bar{\Delta}' := \{T \in \mathbb{C}^{N\times N} \mid \Delta T = T\Delta, \Delta \in \bar{\Delta}\}$.由文[3]知 $\bar{\Delta}' = \{\mathrm{diag}[d_1 I_{m_1}, \cdots, d_s I_{m_s}], d_j > 0, d_j \in \mathbb{R}, j \in Z_{+,s}\}$.

注意,$\|\cdot\|_{\infty,\rho}$ 可分别表示 $\mathrm{H}_\rho^\infty(\mathbb{C}^N)$, $\mathrm{H}_\rho^\infty(\mathbb{C}^{N\times M})$ 上的范数,通过上下文可以看出是哪个空间上的范数.

2.2 Nevanlinna-Pick 类插值定理(Nevanlinna-Pick class interpolation theory)

设 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 为 D_ρ 内的不同点,$u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{C}^N$ 为非零向量,$v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{C}^N$ 为任意向量,我们的问题是:是否存在一解析函数 $F: D_\rho \to \mathrm{H}_\rho^\infty(\mathbb{C}^{N\times M})$?满足插值条件

$$F(\beta_j)u_j = v_j, \quad j \in Z_{+,n}, \tag{1}$$

且对不同情况,还要满足结构奇异值或范数约束条件 a),b).

a) 对于经典 Nevanlinna-Pick(简称 N-P,下同)插值问题,F 满足范数界

$$\|F\|_{\infty,\rho} := \sup\{\|F(z)\|_\infty \mid z \in D_\rho\} \leqslant 1/\gamma. \tag{2}$$

其中,γ 为给定正数,下同.

b) 对于正切结构 N-P 问题,F 满足结构奇异值约束

$$\|F\|_{\hat{\mu}} := \sup\{\hat{\mu}_{\bar{\Delta}}(F(z)) \mid z \in D_\rho\} \leqslant \gamma. \tag{3}$$

当圆盘半径 $\rho = 1$ 时,对上述问题,文[5]和[4]分别给出了相应的 N-P 插值定理.这里将它们推广到 $\rho > 1$ 的圆盘 D_ρ 上,得到如下两个 N-P 类插值定理.

定理 1(经典 N-P 插值定理) 对范数约束情况 a),存在 $F: D \to \mathrm{H}_\rho^\infty(\mathbb{C}^{N\times M})$,满足插值条件(1)及范数约束 a),当且仅当

$$\left[\frac{< u_j, u_i > - \gamma^2 < v_j, v_i >}{1 - \beta_j^* \beta_i/\rho^2}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant n} > 0. \tag{4}$$

定理 2(正切结构 N-P 插值定理) 对结构奇异值约束情况 b),存在 $F: D \to \mathrm{H}_\rho^\infty(\mathbb{C}^{N\times M})$,满足插值条件(1)及范数约束 b),当且仅当存在 $D_j \in \bar{\Delta}'$, $j \in Z_{+,s}$, D_j 可逆,$\bar{\Delta}'$ 的定义同前,使得

$$\left[\frac{\gamma^2 < D_j u_j, D_i u_i > - < D_j v_j, D_i v_i >}{1 - \beta_j^* \beta_i/\rho^2}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant n} > 0. \tag{5}$$

2.3 模型有效性分析的问题描述(Problem formulation for model validation)

考虑可由如下方程描述的鲁棒控制模型

$$\begin{cases} y = M_{11}u + M_{12}v, \\ z = M_{21}u + M_{22}v, \\ v = \Delta z. \end{cases} \tag{6}$$

其中,$(u, y) \in \mathbb{C}^L \times \mathbb{C}^M$ 为输入/输出向量;矩阵函数 $M_{11} \in \mathrm{H}_\rho^\infty(\mathbb{C}^{M\times L})$, $M_{12} \in \mathrm{H}_\rho^\infty(\mathbb{C}^{M\times N})$, $M_{21} \in \mathrm{H}_\rho^\infty(\mathbb{C}^{N\times L})$, M_{11}, M_{12}, M_{21} 是已知的矩阵函数. $(v, z) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ 为未知的内部输出/输入向量;$M_{22} \in \mathrm{H}_\rho^\infty(\mathbb{C}^{N\times N})$ 未知,但要求 $\hat{\mu}_{\bar{\Delta}}(M_{22}) \leqslant \gamma$.

本文只研究 Δ 有结构且 $\Delta \in \bar{\Delta}$ 的模型有效性分析问题,无结构的情况是有结构情况的特例.要求 $\|\Delta\|_{\infty,\rho} \leqslant 1/\gamma$.为了体现问题的本质,我们将噪声扰动合并到模型扰动集中,而不象文献[3]那样单独考虑噪声的影响.

上述模型的有效性分析问题可描述如下:

在 D_ρ 内单位圆周 ∂D 上给定 n 个不同点 $\beta_1, \cdots, \beta_n$;给定矩阵函数 $M_{11}(\beta), M_{12}(\beta), M_{21}(\beta)$,及给定相应的输入/输出向量 (u_j, y_j), $j \in Z_{+,n}$.

问:是否存在 (M_{22}, Δ, z, v) 满足如下方程

$$\begin{cases} y_j = M_{11}(\beta_j)u_j + M_{12}(\beta_j)v_j, \\ M_{22}(\beta_j)v_j = z_j - M_{21}(\beta_j)u_j, \quad j \in Z_{+,n}, \\ \Delta_k z_j^k = v_j^k, \\ \| M_{22} \|_{\rho} \leqslant \gamma, \\ \| \Delta_k \|_{\infty,\rho} \leqslant 1/\gamma, \quad k \in Z_{+,s}. \end{cases} \tag{7}$$

其中，$v_j^k \in \mathbb{C}^{m_k}, z_j^k \in \mathbb{C}^{m_k}, k \in Z_{+,s}$ 且 $\sum_{k=1}^{s} m_k = N$，$(v_j^1,\cdots,v_j^s) = v_j, (z_j^1,\cdots,z_j^s) = z_j$.

若答案是否定的，则可认为模型集无效；否则不能认为模型无效.

当圆盘半径 $\rho = 1$ 时，上述模型有效性分析可用边界 N-P 插值方法进行研究.其形式同时域中的 N-P 插值方法是一样的，只是其可以在不同插值点上单独对模型有效性进行判别，而使得问题更为简单，可参考文献[6]进行处理.这里只研究 $\rho > 1$ 时的模型有效性分析问题，这时系统的先验集与 Helmicki 等构造的鲁棒辨识框架的系统先验假设是一致的.

3 扰动集有结构的模型有效性分析(Model validation with structured uncertainty)

设 Z,V,U,Y 分别为以 z,v,u,y 中的元素为对角元素的对角阵，如 $V:=\mathrm{diag}(v_1,\cdots,v_n)$.假设 $(Z,V) \in E \times E$. 令

$$\bar{N}(\bar{D},V,Z) := \gamma^2(\bar{D}V)^{\mathrm{T}}Q_n(\bar{D}V) - (\bar{D}\hat{Z})^{\mathrm{T}}Q_n(\bar{D}\hat{Z});$$

$$\bar{M}(V^k,Z^k) := (Z^k)^{\mathrm{T}}Q_n(Z^k) - \gamma^2(V^k)^{\mathrm{T}}Q_n(V^k), \quad k \in Z_{+,s}.$$

这里，$Q_n = I_n \otimes Q, Q = \left[\dfrac{1}{1-(1/\rho)^2\beta_j^*\beta_k}\right]$；$\bar{D} = \mathrm{diag}(D_1,\cdots,D_n) \in \Omega_1 := \Delta' \times \cdots \times \bar{\Delta}'$；$\Pi_{ij} = \mathrm{diag}[M_{ij}(\beta_1),\cdots,M_{ij}(\beta_n)]$；$\hat{Z} = Z - \Pi_{21}U$.

定理 3 模型集(7)不能判别无效，当且仅当存在可逆矩阵 $\bar{D} \in \Omega_1, Z \in E, V \in E$ 使得

$$\begin{cases} \bar{N}(\bar{D},V,Z) > 0, \\ \bar{M}(V^k,V^k) > 0, \quad k \in Z_{+,s}, \\ Y = \Pi_{11}U + \Pi_{12}V. \end{cases} \tag{8}$$

证 对于扰动集 $\Delta \in \bar{\Delta} = \{\mathrm{diag}[\Delta_1,\cdots,\Delta_s], \Delta_j \in \mathrm{H}_{\rho}^{\infty}(\mathbb{C}^{m_j \times m_j}), j \in Z_{+,s}\}$，由式(7)中的 2,4 式及定理 2 得，在 D_ρ 上存在解析函数 $M_{22} \in \mathrm{H}_{\rho}^{\infty}(\mathbb{C}^{N\times N})$ 满足式(7)的 2 及 4 式，当且仅当存在 $(v_j,z_j,D_j) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \times \bar{\Delta}'$，使得 $\bar{N}(\bar{D},V,Z) > 0$.

由式(7)的 3,5 式及定理 1 得，对 $k \in Z_{+,s}$，在 D_ρ 上存在解析函数 $\Delta_k \in \mathrm{H}_{\rho}^{\infty}(\mathbb{C}^{m_k\times m_k})$ 满足式(7)的 3 及 5 式，当且仅当存在 $(v^k,z^k) \in \mathbb{C}^{m_k\times m_k}$，使得 $\bar{M}(V^k,Z^k) > 0$.

推论 1 定义 $N(\bar{D},V,Z) = \mathrm{diag}[\bar{M}(V^1,Z^1),\cdots,\bar{M}(V^s,Z^s),\bar{N}(\bar{D},Z,V)]$，不确定模型集(7)不能判为无效，当且仅当下述规化问题成立

$$\max_{(\bar{D},Z,V)} \underline{\lambda}\,(N(\bar{D},V,Z)) > 0,$$

$$\Omega := \begin{cases} Y = \Pi_{11}U + \Pi_{12}V, \\ (\bar{D},V,Z) \in \Omega_1 \times E \times E. \end{cases} \tag{9}$$

4 算法分析(Algorithm analysis)

规化问题(9)显然等价于如下规划问题

$$\max_{(\bar{D},Z,V)\in\Omega} \min_{p\in P} f(p,\bar{D},Z,V). \tag{10}$$

其中，$P := \{p^{\mathrm{T}}p = 1, p \in \mathbb{R}^m\}$，$m$ 为 $N(\cdot)$ 的行数；$f(p,\bar{D},Z,V) := p^{\mathrm{T}}N(\bar{D},Z,V)p$.

规划问题(10)可由如下算法 4.1 求解.

算法 4.1

初始步 任取一向量 $p_1 \in P$.

迭代步 对 $k = 1,2,\cdots$，确定 $\bar{D}^k, Z^k, V^k$ 满足

$$\min_{1\leqslant j\leqslant k} f(p_j,\bar{D}^k,Z^k,V^k) = \max_{(\bar{D},Z,V)\in\Omega} \min_{1\leqslant j\leqslant k} f(p_j,\bar{D},Z,V).^{(\text{注})} \tag{11}$$

确定 $p_{k+1} \in P$ 满足

$$f(p_{k+1},\bar{D}^k,Z^k,V^k) = \min_{p\in P} f(p,\bar{D}^k,Z^k,V^k). \tag{12}$$

若 $f(p_{k+1},\bar{D}^k,Z^k,V^k) \geqslant 0$ 停止，否则置 $k := k+1$ 继续迭代.

注意，算法 4.1 中的 Z^k, V^k 为第 k 次迭代时 Z,V 的值，而不同于上节 Z,V 的第 k 组子向量的 Z^k, V^k.

若令 $f^* = \max_{(\bar{D},Z,V)\in\Omega} \min_{p\in P} f(p,\bar{D},Z,V)$，$g_k(\bar{D},Z,V) = \min_{1\leqslant j\leqslant k} f(p_j,\bar{D},Z,V)$，$g^* := \lim_{k\to\infty} g_k(\bar{D}^k,Z^k,V^k)$，有 $g_k(\bar{D}^k,Z^k,V^k) \geqslant g_k(\bar{D}^{k+1},Z^{k+1},V^{k+1}) \geqslant f^*$，$\forall k$.且有如下性质.

引理 1 对上述迭代过程有 $g^* = f^*$，且对 $\forall \eta > 0$，存在一正整数 k，使得

$$| f(p_{k+1},\bar{D}^k,Z^k,V^k) - g_k(\bar{D}^k,Z^k,V^k) | \leqslant \eta.$$

证 略.

定理 4 上述算法 4.1 有如下性质，存在 k 使得

$$\begin{cases} \hat{f}(p_{k+1},\overline{D}^k,Z^k,V^k) > 0, & \text{当且仅当} f^* > 0; \\ g_k(\overline{D}^k,Z^k,V^k) < 0, & \text{当且仅当} f^* < 0; \\ \hat{f}(p_{k+1},\overline{D}^k,Z^k,V^k) \geqslant \eta, & \text{当且仅当} f^* \geqslant 0. \end{cases} \tag{13}$$

这里 η 为任意正数.

证 略.

注 规划问题(11)的求解:

关于 $Z \in E$ 给定时,规划(11)为凸域上两个凸函数差的规划问题,文[7]有成熟的算法求解.故可采用算法4.1.1求解.

算法 4.1.1

初始步 任取一向量 $Z^1 \in E$.

迭代步 对 $s = 1,2,\cdots$,确定 $\overline{D}^s, V^s$ 满足

$$\max_{l \in Z_{+,s}} f(p_j,\overline{D}^s,Z^l,V^s) = \max_{(\overline{D},V)\in\Omega}\max_{l \in Z_{+,s}} f(p_j,\overline{D},Z^l,V). \tag{14}$$

确定 $Z^{s+1} \in E$,满足

$$f(p_j,\overline{D}^s,Z^{s+1},V^s) = \max_{Z \in E} f(p_j,\overline{D}^s,Z,V^s). \tag{15}$$

$s := s+1$ 继续迭代.

显见算法4.1.1对 Z 和 $(\overline{D},V)$ 有引理1的结论,算法在有限步内收敛.

由定理4得到结论:利用算法4.1我们可在有限步内判定模型是否无效.

参考文献(References)

1 Poolla K A. Time-domain Approach to model validation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(5): 951 – 959

2 Smith R S et al. Model validation: a connection between robust control and identification. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37(7): 942 – 951

3 Chen Jie and Wang Shuning. Validation of linear fractional uncertain models: solution via matrix inequalities. IEEE Trans. Automat. Contr., 1996, 41(6): 844 – 850

4 Bercovici H et al. On Structured Tangential Nevanlinna-pick Interpolational. Proc. CDC., San Antonio 1993, 3020 – 3021

5 Garnett J B. Bounded Analytic Functions. NewYork: Academic Press, 1984

6 黄勇,王书宁,戴建设.时域中结构不确定模型的有效性分析.控制与决策,1997,12(5):614 – 617

7 Horst. Global Optimation-Deterministic Approaches. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1990

本文作者简介

黄 勇 1965年生.1987年于哈尔滨工程大学获学士学位,1994年于华中理工大学系统工程专业获硕士学位.1997年于华中理工大学自动控制系获博士学位,现在中国科学院声学研究所做博士后.研究兴趣:鲁棒辨识,模型有效性分析,非线性系统Worst-Case辨识的小波逼近方法等.

王书宁 1982年获湖南大学学士学位,1984年、1988年先后获华中理工大学硕士、博士学位.现为清华大学自动化系教授,博士生导师.主要研究兴趣:系统建模,系统辨识,参数估计及决策分析.

王长红 1969年生.1992年于中国科技大学无线电系获学士学位,1995年、1998年于中国科学院声学研究所分别获硕士、博士学位,现为中国科学院声学研究所副研究员.研究兴趣为声纳系统设计和声信号处理.

潘 锋 1963年生.1985年北京航空航天大学分院工业电气自动化专业本科毕业.现为中国科学院声学研究所研究员.研究兴趣为声纳系统设计,电子技术.