具有滞后摄动的线性系统鲁棒稳定性分析*

俞　立　陈国定　杨马英
（浙江工业大学信息工程学院·杭州，310032）

摘要：基于 Lyapunov 稳定性理论，导出了具有滞后时变摄动的线性系统二次稳定的一个充分必要条件，通过求解一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题，得到了保持系统稳定的最大允许摄动界，文中的例子说明了：和现有的方法相比，本文提出的方法具有更小的保守性.

关键词：稳定性；滞后；鲁棒性

Robust Stability Analysis for Linear Systems with Delayed Perturbations

Yu Li, Chen Guoding and Yang Maying
(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology·Hangzhou, 310032, P. R. China)

Abstract: The paper presents a necessary and sufficient condition for quadratic stability of linear systems with time-varying delayed perturbation. The largest bound on such perturbation that guarantee system stability is derived by solving a convex optimization problem with linear matrix inequality constraint. Two numerical examples are given to illustrate the results. Compared with the existing methods, the method proposed in this paper is of less conservatism.

Key words: stability; delay; robustness

1 引言(Introduction)

具有滞后时变摄动的线性系统的稳定性鲁棒特性分析问题已为众多学者所研究[1~5]，对于结构和无结构摄动，导出了各种保持系统稳定的允许摄动界.采用的方法主要是基于 Lyapunov 稳定性理论的二次稳定方法.通过导出系统稳定的充分条件来确定允许摄动的界.尽管可以通过适当的状态变换来改进这个允许摄动界，但要确定最佳的变换是很困难的；另一方面，由于所得到的结果是基于系统稳定性的充分条件，因此，这些结论仍然具有一定的保守性.

本文针对一类具有滞后无结构时变摄动的系统，基于二次稳定的概念，导出了系统二次稳定的充分必要条件，并据此刻划了为保证系统稳定性，其允许摄动界须满足的条件，进而将这个条件转化成线性矩阵不等式约束，并建立一个使允许摄动界极大化的具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题.利用 MATLAB 中的 LMI 软件可以有效地求解该优化问题.最后，采用文献中的数值例子说明了本文提出方法的有效性，并和现有方法作了比较.

2 问题描述与准备(Problem statement and preliminaries)

考虑系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + E(t)x(t-h), \tag{1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量，$h > 0$ 是一个常数，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个已知常数稳定矩阵，$E(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是出现在滞后状态向量系数矩阵中的时变摄动.本文考虑无结构摄动，即假定 $E(t)$ 是满足

$$E(t)E'(t) \leqslant \rho^2 I \tag{2}$$

的时变摄动矩阵，其中 I 表示适当维数的单位矩阵.

本文的目的是要确定尽可能大的 ρ，以使得对任意满足(2)的摄动矩阵 $E(t)$，系统(1)保持是二次稳定的.为此，我们首先给出系统(1)二次稳定性的概念.

定义 1　如果存在对称正定矩阵 $P > 0, T > 0$，使得对满足(2)式的任意摄动，沿系统(1)的任意轨线，Lyapunov 函数

$$V(t) = x'(t)Px(t) + \int_{t-h}^{t} x'(\tau)Tx(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

* 教育部资助优秀年轻教师基金和浙江省自然科学基金资助项目.
本文于 1997 年 7 月 4 日收到.1998 年 5 月 11 日收到修改稿.

对时间的导数满足

$$\begin{aligned}\dot V(t) = & x'(t)[PA + AP + T]x(t) + \\ & 2x'(t)PE(t)x(t-h) - \\ & x'(t-h)Tx(t-h) < 0,\end{aligned} \tag{4}$$

则系统(1)称为是二次稳定的.

根据文献[6]中的定理4.2.6,若系统(1)是二次稳定的,则该系统是大范围一致渐近稳定的.另一方面,在目前众多的基于Lyapunov稳定性理论的时滞系统稳定性分析方法中,通常都是通过选取某个特定结构的对称正定矩阵 P 和 T 来构造形如(3)的Lyapunov函数.因此,这里考虑的二次稳定性具有一般性.

在本文主要结论的证明中,需要以下引理:

引理1[7] 对给定的具有适当维数的矩阵 Y, H 和 F,其中 Y 是对称的.则对所有满足 $EE' \leqslant \rho^2 I$ 的矩阵 E,

$$Y + HEF + F'E'H' < 0$$

成立当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$,使得

$$\varepsilon^2\rho^2 HH' + \varepsilon Y + F'F < 0.$$

3 主要结论(Main results)

引理2 对系统(1),存在对称正定矩阵 $P, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$,使得

$$\begin{bmatrix} PA + A'P + T & PE(t) \\ E'(t)P & -T \end{bmatrix} < 0. \tag{5}$$

对所有的 $E(t)E'(t) \leqslant \rho^2 I$ 成立当且仅当存在对称正定矩阵 $\tilde P, \tilde T \in \mathbb{R}^{n\times n}$,使得

$$\begin{aligned} &\tilde P A + A'\tilde P + \tilde T + \rho^2 \tilde P\tilde P < 0, \\ &-\tilde T + I < 0. \end{aligned} \tag{6}$$

证 定义

$$Y = \begin{bmatrix} PA + A'P + T & 0 \\ 0 & -T \end{bmatrix},$$

则(5)式等价于

$$Y + \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} E(t)[0 \quad I] + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} E'(t)[P \quad 0] < 0.$$

根据引理1,上式对所有满足(2)式的矩阵 $E(t)$ 成立当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$,使得

$$\varepsilon^2\rho^2\begin{bmatrix} PP & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon Y + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0,$$

即

$$\begin{bmatrix} \varepsilon PA + \varepsilon A'P + \varepsilon T + \varepsilon^2\rho^2 PP & 0 \\ 0 & -\varepsilon T + I \end{bmatrix} < 0,$$

取 $\tilde P = \varepsilon P, \tilde T = \varepsilon T$,上式进一步等价于(6)式.引理得证.

定理1 对给定的标量 ρ,系统(1)二次稳定的充分必要条件是存在对称正定矩阵 $P, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$,使得

$$\begin{bmatrix} -T & T & 0 \\ T & PA + A'P & P \\ 0 & P & -\rho^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad -T + I < 0. \tag{7}$$

证 根据定义,系统(1)二次稳定当且仅当存在形如(3)式的Lyapunov函数 $V(t)$,使得对任意满足 $E(t)E'(t) \leqslant \rho^2 I$ 的 $E(t)$, $\dot V(t) < 0$. 根据(4)式,进一步有

$$0 > \dot V(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} PA + A'P + T & PE(t) \\ E'(t)P & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix},$$

即要求对任意满足 $E(t)E'(t) \leqslant \rho^2 I$ 的 $E(t)$,有

$$\begin{bmatrix} PA + A'P + T & PE(t) \\ E'(t)P & -T \end{bmatrix} < 0.$$

根据引理2,这等价于存在对称正定矩阵 $\tilde P, \tilde T \in \mathbb{R}^{n\times n}$,使得

$$\tilde P A + A'\tilde P + \tilde T + \rho^2\tilde P\tilde P < 0, \quad -\tilde T + I < 0. \tag{8}$$

根据矩阵的Schur补性质,可得(8)式等价于(7)式.由此得证定理.

注1 在现有的有关时滞系统稳定性分析的结论中[3~5,8],大多是采用Lyapunov函数(3),进而通过适当的放大,保证 $\dot V(t) < 0$ 来导出系统稳定的充分条件.而定理1给出了时滞系统(1)鲁棒稳定的一个充分必要条件.和现有结论相比,显然,这是一个很大的改进.

根据定理1,我们建立以下的优化问题来确定保持系统(1)稳定的最大允许摄动界 ρ.

$$\begin{aligned} &\min_{P,T,\lambda} \lambda \\ &\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} -T & T & 0 \\ T & PA + A'P & P \\ 0 & P & -\lambda I \end{bmatrix} < 0, \\ &\qquad -T + I < 0, \quad P > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

由于优化问题(9)中的约束条件是关于变量的线性矩阵不等式,因此,可以用MATLAB软件中有关LMI的mincx求解之.所要求的最大允许摄动界 $\rho = 1/\sqrt{\lambda_{\min}}$

4 数值例子(Numerical examples)

例1 考虑由文[2]和[4]讨论的系统(1),其中

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

将采用本文提出的方法和文[2],[4]中的方法所得到的结果一并示于以下的表1中.

表1 应用本文所得结果和以前结果的比较表

Table 1 Comparison table between result of this paper and previous reported ones

Cheres et al[2]	Trinh and Aldeen[4]	本文的方法
$\rho < 0.178$	$\rho < 0.394$	$\rho < 0.5398$

从以上的表中可以看出,和现有方法相比,应用本文的方法可以极大地降低结果的保守性.

例2 考虑由文献[5]和[8]研究的例子,其中

$$A = \begin{bmatrix} -0.201 & 0.755 & 0.351 & -0.075 & 0.033 \\ -0.149 & -0.696 & -0.160 & 0.110 & -0.048 \\ 0.081 & 0.004 & -0.189 & -0.003 & 0.001 \\ -0.173 & 0.802 & 0.251 & -0.804 & 0.056 \\ 0.092 & -0.467 & -0.127 & 0.075 & -1.162 \end{bmatrix}.$$

将采用本文提出的方法和文[5],[8]中的方法所得到的结果一并示于以下的表2中.

表2 应用本文所得结果和以前结果的比较表

Table 2 Comparison table between result of this paper and previous reported ones

Chen and Han[8]	Trinh and Aldeen[5]	本文的方法
$\rho < 0.0929$	$\rho < 0.1060$	$\rho < 0.1115$

本文对滞后摄动所得到的允许摄动界比文献[8]对非时滞摄动所导出的允许摄动界还要大,这说明了本文提出的方法具有更小的保守性.事实上,由于本文的方法是基于系统稳定性的一个充分必要条件,通过寻优的方法来确定系统的允许摄动界,因此,可望得到一个更大的允许摄动界.而文[5]中的方法需要首先确定一些参数,在求解该例时,选择了4组参数,其中得到的最好结果示于以上表中.显然,这种方法具有盲目性,难以确定尽可能大的允许摄动界.相比之下,本文的方法克服了这方面的不足,导出了一个确定尽可能大的允许摄动界的系统化方法.

5 结论(Conclusion)

本文研究了一类具有滞后无结构时变摄动的线性系统的稳定性鲁棒特性分析问题,导出了这一类系统是二次稳定的一个充分必要条件,并据此建立了使得允许摄动界极大化的一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题,并利用现有软件求解之.数值例子说明了和现有方法相比,本文提出的方法具有更小的保守性.

参考文献(References)

1 Shyu K K and Yan J J. Robust stability of uncertain time-delay systems and its stabilization by varable structure control. Int. J. Control, 1993, 57(1):237-246

2 Cheres E, Palmor Z L and Gutman S. Quantitative measures of robustness for systems including delayed perturbations. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34(11):1203-1204

3 Hmamed A. Further results on the stability of uncertain time-delay systems. Int. J. Syst. Sci., 1991, 22(3):605-614

4 Trinh H and Aldeen M. On the stability of linear systems with delayed perturbations. IEEE Trans. Antomat. Contr., 1994, AC-39(9):1948-1951

5 Trinh H and Aldeen M. Stability robustness bounds for linear systems with delayed perturbations. IEEE Proc. Pt. D., 1995, 142(4):345-350

6 Burton T A. Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. New York: Academic, 1985

7 Xie Lihua. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty. Int. J. Control, 1996, 63(4):741-750

8 Chen H G and Han K W. Improved quantitative measures of robustness for multivariable systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, AC-39(4):807-810

本文作者简介

俞 立 见本刊1999年第1期第133页.

陈国定 见本刊1999年第1期第133页.

杨马英 1966年生.分别于1986年,1989年和1996年在浙江大学工业自动化专业获学士、硕士和博士学位,现为浙江工业大学信息工程学院副教授.研究方向为预测控制的理论与应用,时滞系统的控制等.