非线性不确定动态时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制器的设计

方洋旺　韩崇昭
(西安交通大学系统工程研究所·西安, 710049)

摘要: 本文研究了带有非线性不确定动态时滞系统的鲁棒 H_∞ 设计器问题. 在不具备任何匹配条件的一类非线性摄动条件下, 通过求解 Hamilton-Jacobean-Isaac 不等式, 来设计具有扰动衰减度 γ 的鲁棒 H_∞ 控制器, 并通过实例验证上述方法的有效性.

关键词: 时变时滞; H_∞ 扰动衰减度; 非线性不确定性

H_∞ Control of Nonlinear Uncertain Dynamical Systems with State Delay

Fang Yangwang and Han Chongzhao
(Institute of System Engineering, Xi'an Jiaotong University·Xi'an, 710049, P. R. China)

Abstract: In this paper, we present a memoryless H_∞ control design method for nonlinear uncertain dynamical system with state delays. Based on solving Hamilton-Jacobean-Isaac inequality, we design a memoryless linear time-invariant state feedback control law, which guarantees the asymptotic stability of closed-loop control system and yields robust disturbance attenuation γ.

Key words: time-variant delay; H_∞ disturbance attenuation; nonlinear uncertainty

1 引言(Introduction)

H_∞ 设计方法以其对干扰特性的已知程度要求不高, 且以 H_∞ 范数作为性能指标, 较恰当地描述了系统的鲁棒稳定性. 因此近年来受到很大重视. 文[1,2]研究了非线性系统的 H_∞ 控制问题, 导出了 Hamilton-Jacobean-Isaac(HJI)不等式. 目前 H_∞ 的 HJI 方法主要集中在稳定性与标称系统的扰动衰减度的研究上, 对鲁棒性能的研究较少.

时滞与不确定性是工业过程中普遍存在的现象, 且很多是难以精确建模或本身具有时变特性等. 因此, 时变不确定时滞系统的鲁棒控制近年来也受到广泛重视. 文[3,4]基于 Lyapunov 方法研究了时变时滞系统的无记忆反馈控制方法, 而在[5]中研究了具备某种匹配条件的鲁棒 H_∞ 控制问题. 在本文中, 我们在无任何匹配条件下, 讨论了具有非线性不确定项的时滞时变系统的鲁棒 H_∞ 控制问题, 并利用 HJI 不等式, 给出了相应的鲁棒 H_∞ 设计方法. 并用实例验证了此方法的有效性.

2 问题描述(Problem statement)

本文考虑如下不确定的动态系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau(t)) + Bu(t) + B_1w(t) + \Delta(x, x(t-\tau(t)), u), \tag{1a}$$

$$z(t) = Cx(t),\quad x(t) = 0,\quad t<0,\quad x(0) = x_0. \tag{1b}$$

这里 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^p, z \in \mathbb{R}^q$ 分别为状态向量, 控制输入向量, 摄动向量与被控制输出向量. $0 \leqslant \tau(t) \leqslant d^* < \infty$, 且 $\dot{\tau}(t) \leqslant /\rho < 1$. $\Delta(x, x(t-\tau(t)), u)$ 为非线性不确定项. A, A_1, B, B_1 分别为相应维数的常量矩阵.

一些记号: 对于矩阵 M, 记 M' 为它的转置, $\|M\|$ 为 M 的范数, $\sigma_{\max}(M)$ 为矩阵 M 的最大奇异值; 记 $x_\tau = x(t-\tau(t))$; I 为单位矩阵.

假设 1 设 $\Delta(x, x_\tau, u)$ 为范数有界的, 即存在非负数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 时, 对所有 $x \in \mathbb{R}^n, x_\tau \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^m$, 使得 $\|\Delta(x, x_\tau, u)\| \leqslant \varepsilon_1\|x\| + \varepsilon_2\|x_\tau\| + \varepsilon_3\|u\|$.

记

$$\Omega = \{\Delta(x, x_\tau, u): \|\Delta(x, x_\tau, u)\| \leqslant \varepsilon_1\|x\| + \varepsilon_2\|x_\tau\| + \varepsilon_3\|u\|\}.$$

定义 2.1 状态反馈控制器称为具有扰动衰减度 γ 的鲁棒 H_∞ 控制器, 若满足:

1) 对于 $w = 0$ 和任意的 $\Delta(x, x_\tau, u) \in \Omega$, 闭环系统为全局渐近稳定的.

本文于 1996 年 11 月 26 日收到. 1998 年 4 月 10 日收到修改稿.

2) 已知 $\gamma > 0$,若在零初始条件下,对所有 $w \in L^2$ 和所有 $\Delta(x, x_\tau, u) \in \Omega$,有

$$\int_0^T z'z\mathrm{d}t \leqslant \gamma^2 \int_0^T w'w\mathrm{d}t, \quad \forall\, T > 0.$$

鲁棒 H_∞ 控制问题:找一个具有扰动衰减度 γ 的鲁棒 H_∞ 控制器.

3 主要结果(Main results)

引理 3.1[6] 对 $m \leqslant n$,假设 $v \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ 且 $\|u\| = \|v\| = 1$,则存在一个 $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $\sigma_{\max}(M) \leqslant 1$,使得 $v = Mu$.

引理 3.2 记 $\Omega_1 = \{\varepsilon_1 M_1 x + \varepsilon_2 M_2 x_\tau + \varepsilon_3 M_3 u: M_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, M_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, M_3 \in \mathbb{R}^{n\times m}, \sigma_{\max}(M_1) \leqslant 1, i = 1,2,3\}$.则 $\Omega = \Omega_1$.

证 显然 $\Omega_1 \subseteq \Omega$,而且对 $\forall\, x \in \mathbb{R}^n, x_\tau \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \Omega \subseteq \Phi$,

$\Phi \triangleq \{v \in \mathbb{R}^n, \|v\| \leqslant \varepsilon_1\|x\| + \varepsilon_2\|x_\tau\| + \varepsilon_3\|u\|\}$.

假设 $\forall\, v \in \Phi, v \neq 0$,则存在 $a_i, i = 1,2,3$,且 $0 \leqslant a_i \leqslant \varepsilon_i$,使得

$$\|v\| = a_1\|x\| + a_2\|x_\tau\| + a_3\|u\|,$$

分解

$$v = \alpha_1 v + \alpha_2 v + \alpha_3 v,$$

这里

$$\alpha_1 = \frac{a_1\|x\|}{\|v\|}, \alpha_2 = \frac{a_2\|x_\tau\|}{\|v\|}, \alpha_3 = \frac{a_3\|u\|}{\|v\|},$$

不失一般性,假设 $x \neq 0, x_\tau \neq 0, u \neq 0$.

记

$$\hat{v} = \frac{v}{\|v\|}, \quad \hat{x} = \frac{x}{\|x\|},$$

$$\hat{x}_\tau = \frac{x_\tau}{\|x_\tau\|}, \quad \hat{u} = \frac{u}{\|u\|}.$$

由引理 3.1 知,存在 $M_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, M_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, M_3 \in \mathbb{R}^{n\times m}$,且 $\sigma(M_1) \leqslant 1, i = 1,2,3$,使得

$$\hat{v} = M_1\hat{x} = M_2\hat{x}_\tau = M_3\hat{u},$$

故有

$$\alpha_1 v = a_1 M_1 x, \alpha_2 v = a_2 M_2 x_\tau, \alpha_3 v = a_3 M_3 u,$$

从而得

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v + \alpha_2 v + \alpha_3 v = \\ & a_1 M_1 x + a_2 M_2 x_\tau + a_3 M_3 u = \\ & \varepsilon_1(\frac{a_1}{\varepsilon_1}M_1 x) + \varepsilon_2(\frac{a_2}{\varepsilon_2}M_2 x_\tau) + \varepsilon_3(\frac{a_3}{\varepsilon_3}M_3 u) \in \Omega_1, \end{aligned}$$

故 $\Omega \subseteq \Phi \subseteq \Omega_1$.

引理 3.3[7] 对于任意相应维数矩阵 X, Y,有 $X'Y + Y'X \leqslant \beta X'X + (1/\beta)Y'Y, \forall\, \beta > 0$.

定理 3.1 若存在正数 $\delta_i, i = 1,2,3,4$ 和下列 Riccati 不等式(2) 的一个正定解 P,则控制器 $u = -(\delta_3/\varepsilon_3)B'Px$ 使系统(1) 的鲁棒 H_∞ 控制问题可解.

这里

$$AP + PA' + P\tilde{H}P + \tilde{Q} < 0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \delta_3(\varepsilon_3 I - (1/\varepsilon_3)BB') + (1/\gamma_2)B_1B_1' + \\ & \delta_4 A_1 A_1' + (\delta_1\varepsilon_1 + \delta_2\varepsilon_2)I, \\ \tilde{Q} &= C''C + (1-\rho)^{-1}((\varepsilon_2/\delta_2) + 1/\delta_4))I + (\varepsilon_1/\delta_1)I. \end{aligned}$$

证 定义 Hamiltonian 函数

$$H(u, w, \Delta(x, x_\tau, u)) = z'z - \gamma^2 w'w + \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t},$$

其中

$$E(x) = x'Px + \int_{t-\tau}^t x'(\theta)Rx(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

R 为待定的正矩阵,$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ 为 E 对系统(1) 的轨迹求导数.由 HJI 方法知,系统(1) 的 H_∞ 控制问题可解的充分条件为对所有 $w \in L^2, \Delta(x, x_\tau, u) \in \Omega$,有 $H(u, w, \Delta(x, x_\tau, u)) < 0$.将(1) 代入,并对 E 求导数得:

$$\begin{aligned} & H(u, w, \Delta(x, x_\tau, u)) = \\ & x'C''Cx - \gamma^2 w'w + x'(PA + A'P)x + \\ & 2x'PA_1x_\tau + 2x'PBu + 2x'PB_1w + \\ & 2x'P\Delta(x, x_\tau, u) + x'Rx - (1-\dot{\tau})x_\tau'Rx_\tau. \end{aligned}$$

考虑最坏的摄动 w_0,即

$$\sup_{w\in L^2} H(u, w, \Delta(x, x_\tau, u)) = H(u, w_0, \Delta(x, x_\tau, u)),$$

由

$$\frac{\partial H(u, w, \Delta(x, x_\tau, u))}{\partial w} = 0,$$

得

$$w_0 = \frac{1}{\gamma^2}B_1'Px,$$

记

$$\begin{aligned} & H_1(u, \Delta(x, x_\tau, u) = \\ & \sup_{w\in L^2} H(u, w, \Delta(x, x_\tau, u)) = \\ & F(x) + 2x'PA_1x_\tau + 2x'PBu + \\ & 2X'P\Delta(x, x_\tau, u) - (1-\dot{\tau})x_\tau'Rx_\tau, \end{aligned}$$

其中

$$F(x) = x'(C''C + PA + A'P + \frac{1}{\gamma^2}PB_1B_1'P + R)x.$$

由引理 3.2 知

$$\sup_{\Delta(x,x_\tau,u)\in\Omega} H_1(u, \Delta(x, x_\tau, u)) = \sup_{\Delta(x,x_\tau,u)\in\Omega_1} H_1(u, \Delta(x, x_\tau, u)).$$

因此,只需考虑

$$H_1(u,\Delta(x,x_\tau,u)) =$$
$$F(x) + 2x'PAx_\tau + 2x'PBu +$$
$$2x'P(\varepsilon_1 M_1 x + \varepsilon_2 M_2 x_\tau + \varepsilon_3 M_3 u) - (1-\dot{\tau})x_\tau' R x_\tau.$$

利用引理 3.3

$$2x'PM_1x \leqslant \delta_1 x'PPx + (1/\delta_1)x'x,$$
$$2x'PM_2x_\tau \leqslant \delta_2 x'PPx + (1/\delta_2)x_\tau' x_\tau,$$
$$2x'PM_3u \leqslant \delta_3 x'PPx + (1/\delta_3)u'u,$$
$$2x'PM_4x_\tau \leqslant \delta_4 x'PA_1A_1'Px + (1/\delta_4)x_\tau' x_\tau,$$

其中 $\forall \delta_i > 0, i = 1,2,3,4$, 令

$$R = (1-\rho)^{-1}(\varepsilon_2/\delta_2 + 1/\delta_4)I,$$

结果

$$\sup_{\Delta(x,x_\tau,u)\in\Omega} H_1(u,\Delta(x,x_\tau,u)) \leqslant$$
$$F(x) + 2x'PBu + (\varepsilon_3/\delta_3)u'u +$$
$$x'P((\delta_1\varepsilon_1 + \delta_2\varepsilon_2 + \delta_3\varepsilon_3)I +$$
$$\delta_4 A_1 A_1')Px + (\varepsilon_1/\delta_1)x'x.$$

而使不等式右边取得最小的 u 为

$$u = -(\delta_3/\varepsilon_3)B'Px,$$

即

$$\inf_u \sup_{\Delta(x,x_\tau,u)\in\Omega} H_1(u,\Delta(x,x_\tau,u)) \leqslant$$
$$F(x) + (\varepsilon_1/\delta_1)x'x - (\delta_3/\varepsilon_3)x'PBB'Px,$$

则对所有 $w \in L^2$ 且对 $\forall \Delta(x,x_\tau,u) \in \Omega$, 有

$$H(u,w,\Delta(x,x_\tau,u)) < 0.$$

引理 3.4[7]　设 A, Q_2, W_2 为 $n\times n$ 矩阵,且 Q_2 为对称阵, W_2 为对称正定阵. 假设 S 是矩阵方程 $SW_2S + AS + SA' + Q_2 = 0$ 的正定解. 若 Q_1 为对称阵且 $Q_1 < Q_2$, 则存在一个正定对称阵 S_1 且为 $S_1W_2S_1 + AS_1 + S_1A' + Q_1 = 0$ 的解.

引理 3.5[8]　设 X 为对称阵, Z 为一个矩阵,若对于 $\forall \xi \neq 0$ 使 $Z\xi = 0$, 都有 $\xi X \xi < 0$, 则一定存在一个常数 $\sigma > 0$, 使 $X - \sigma Z'Z < 0$.

定理 3.2　若对于已知的 $\varepsilon_i \geqslant 0, i = 1,2,3$ 与可调参数 $\eta_j > 0, j = \overline{1,4}$, 存在一个正定矩阵 S, 使得对 $\forall \eta \in N$, 有 $\eta'(AS + SA' + S\tilde{Q}S + \tilde{H}_1)\eta < 0$, 则存在一个 $\tilde{\varepsilon}_3 > 0$, 且 $\tilde{\varepsilon}_3 \leqslant \varepsilon_3$, 当非线性不确定项 $\Delta(x,x_\tau,u) \in \tilde{\Omega}$, 系统(1) 的 H_∞ 问题可解.

这里

$$N = \{\eta \in \mathbb{R}^n : B'\eta = 0\},$$
$$\tilde{H}_1 = (1/\gamma^2)B_1B_1' + \delta_4 A_1A_1' + (\delta_1\varepsilon_1 + \delta_2\varepsilon_2 + \delta_3\varepsilon_3)I,$$
$$\tilde{\Omega} = \{\Delta(x,x_\tau,u) : \|\Delta(x,x_\tau,u)\| \leqslant \varepsilon_1\|x\| + \varepsilon_2\|x_\tau\| + \varepsilon_3\|u\|\}.$$

证　由引理 3.5 知,存在一个 $\sigma > 0$, 使得

$$AS + SA' + S\tilde{Q}S + \tilde{H}_1 - \sigma BB' < 0,$$

即

$$AS + SA + S(C'C + (1-\rho)^{-1}(\varepsilon_2/\delta_2 + 1/\delta_4)I + \varepsilon_1/\delta_1)S + (1/\gamma_2)B_1B_1' + \delta_4A_1A_1' + (\delta_1\varepsilon_1 + \delta_2\varepsilon_2)I + \delta_3\varepsilon_3 I - \sigma BB' < 0,$$

若 $\sigma \leqslant \delta_3/\varepsilon_3$, 由于 ε_3 为可调参数. 则一定存在 $0 \leqslant \delta_3^0 \leqslant \delta_3$, 使 $\sigma = \delta_3^0/\varepsilon_3$, 由于

$$\tilde{H}_1 - \sigma BB' \geqslant \tilde{H}_0 - \sigma BB',$$

其中

$$H_0 = (1/\gamma^2)B_1B_1' + \delta_4A_1A_1' + (\delta_1\varepsilon_1 + \delta_2\varepsilon_2)I + \delta_3^0\varepsilon_3 I.$$

由引理 3.4 可知,有一个正定解 $S_1 \geqslant S$, 使得

$$AS_1 + S_1A' + S_1\tilde{Q}S_1 + \tilde{H}_0 - (\delta_3^0/\varepsilon_3)BB' < 0.$$

令 $P = S_1^{-1}$, 则 P 即为不等式(2) 的解. 故系统(1) 的 H_∞ 问题可解. 若 $\sigma > \delta_3/\varepsilon_3$, 则一定存在 $\tilde{\varepsilon}_3$, 且 $0 < \tilde{\varepsilon}_3 < \varepsilon_3$, 使得 $\sigma = \delta_3/\tilde{\varepsilon}_3$, 且

$$\tilde{H}_1 - \sigma BB' > \tilde{H}_2 - \sigma BB',$$
$$\tilde{H}_2 = (1/\gamma^2)B_1B_1' + \delta_4A_1A_1' + (\delta_1\varepsilon_1 + \delta_2\varepsilon_2)I + \delta_3\tilde{\varepsilon}_3 I,$$

由引理 3.4 可知,存在一个正定解 $S_2 \geqslant S$, 使得

$$AS_2 + S_2A' + S_2\tilde{Q}S_2 + \tilde{H}_1 - (\delta_3/\tilde{\delta}_3)BB' < 0,$$

令 $P = S_2^{-1}$, 则有

$$PA + A'P + P(\tilde{H}_1 - (\delta_3/\tilde{\delta}_3)BB')P + \tilde{Q} < 0.$$

由定理 3.1 证明知,对于所有 $w \in L^2$ 与所有 $\Delta(x, x_\tau, u) \in \tilde{\Omega} \subseteq \Omega$, 有 $H(u,w,\Delta(x,x_\tau,u)) < 0$. 即系统(1) 的 H_∞ 问题在 Ω 的子集 $\tilde{\Omega}$ 内可解.

4　例子(Example)

设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},\quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix},\quad B_1\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix},\quad C = [0 \quad 0.5],$$

可调参数取

$$\delta_1 = \delta_3 = 1,\quad \delta_2 = \delta_4 = 2,\quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5,$$
$$\varepsilon_3 = 0.2,\quad \rho = 0.5,\quad \gamma = 0.5.$$

则不等式(2)有正定解

$$P = \begin{bmatrix} 0.92 & 0.04 \\ 0.04 & 0.31 \end{bmatrix}.$$

反馈增益

$$K = (\delta_3/\varepsilon_3)B'P = \begin{bmatrix} 4.59 & 0.21 \\ 0.25 & 1.89 \end{bmatrix}.$$

取

$\Delta(x, x_\tau, u) =$

$$\begin{bmatrix} 0.4\sin x_1 & 0 \\ 0 & 0.2\cos x_{2\tau} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.2\cos x_{1\tau} & 0 \\ 0 & 0.3\sin x_2 \end{bmatrix} u,$$

$\tau = 0.2$,则系统(1)的状态轨迹图及相平面图分别见图1与图2.

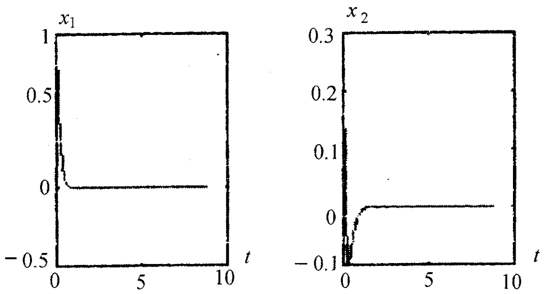

图1 状态轨迹

Fig.1 State trace

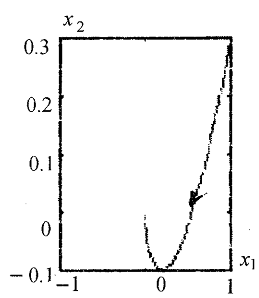

图2 相平面

Fig.2 Phase plane

5 结论(Conclusion)

本文研究了带有非线性不确定性的时变时滞动态系统的鲁棒 H_∞ 控制设计,并通过求解 Hamilton-Jacobean-Isaac 不等式,证明了鲁棒 H_∞ 控制器存在的充分条件.由于去掉了各种匹配条件,且具有非线性摄动项,因此更具有广泛性,有一定的理论与应用价值.

参考文献(References)

1 Ball J, Helton J W and Walker M L. Control of nonlinear systems with output feedback. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, 38(4): 546 – 559

2 Isidori A and Astolfi A. Disturbance Attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37(9); 1283 – 1293

3 Choi N H and Chung M J. Memoryless H_∞ controller design for linear systems with delayed state and control. Automatica, 1995, 31(6): 917 – 919

4 Lee C H, Li T S and Kung F C. New stability criteria for discrete time-delay systems with uncertainties. Control Theory and Advanced Technology, 1995, 10(4): 1159 – 1168

5 钟锷,褚健.时变时滞系统的 H_∞ 鲁棒控制算法.信息与控制, 1995, 24(6): 326 – 329

6 Wang Le Yi and Zhan Wei. Robust disturbance attenuation with stability for linear systems with norm bounded nonlinear uncertainties. IEEE Trans. Automat. Contr., 1996, 41(6): 886 – 888

7 Petersen I R and Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. Automatica, 1986, 22(4): 397 – 411

8 Petersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. Syst. Contr. Lett., 1987, 8(4): 351 – 357

本文作者简介

方洋旺 1966年生.1990年获陕西师范大学数学系理学硕士学位,1998年西安交通大学系统工程专业博士毕业,现为西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室博士后.主要兴趣是 H_∞ 控制,鲁棒控制,非线性控制系统及通信信号处理.

韩崇昭 见本刊1999年第3期第451页.