

MIMO 对象的方向性与系统的鲁棒性能*

张 治

杨志勇 王广雄

(广州金鹏电子信息机器有限公司开发中心·广州, 510665) (哈尔滨工业大学控制工程系自动控制专业·哈尔滨, 150001)

摘要: 本文利用对象方向角, 揭示了 MIMO 系统在不同输入增益摄动形式下鲁棒性能问题表现不同的原因. 并利用 μ 综合法处理了不同不确定结构下系统鲁棒性能设计的例子, 结果表明了 μ 综合法处理这类问题的有效性.

关键词: 鲁棒性能; 方向角; 不确定结构

Direction of MIMO Plant and Robust Performance

Zhang Zhi

(Jinpeng Electronic Information Machine Company Limited R & D Center·Guangzhou, 510665, P. R. China)

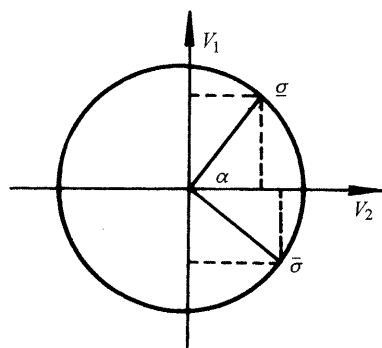
Yang Zhiyong and Wang Guangxiong

(Department of Automatic Control, Harbin Institute of Technology·Harbin, 150001, P. R. China)

Abstract: This paper explains the difference of the robust performance of MIMO system with different input gain uncertainties using the direction angle. A μ -synthesis design example for different uncertainty blocks is presented and the result shows that μ -synthesis could deal with it effectively.

Key words: robust performance; direction angle; uncertainty blocks

1 MIMO 系统在不同结构输入增益摄动下的鲁棒性能 (Robust performance of MIMO plant under different input gain uncertainties)



$\sigma, \bar{\sigma}$ 分别代表对象的最大、最小奇异值
 V_1, V_2 分别代表对象的输入方向

图 1 MIMO 对象输入方向性示意图
Fig. 1 Diagram of the input direction angle

这里以两输入两输出系统为例讨论, 设 G 代表 MIMO 对象的传递函数, 并存在实的奇异值分解, $G = U\Sigma V^H$, 其中 U, V 均为酉阵, Σ 为奇异值对角阵. 令 Δ 代表对象输入端存在的增益不确定块, $G(\Delta)$, $\Sigma(\Delta)$ 代表摄动后的传递函数和奇异值矩阵的误差

阵, 则 $G(\Delta) = U\Sigma V^H \Delta$. 由于系统的最大奇异值方向与最小奇异值方向在输入平面上成 90° 夹角, 如图 1 所示. 这里不妨称图 1 中的角 α 为对象的输入方向角 (简称方向角).

考虑摄动块的形式为 $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix}$, 参考图 1 可以得到

$$G(\Delta) = U\Sigma V^H \Delta = U\Sigma \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

1) 当 $\Delta_{12} = \Delta_{21} = 0$ 时, 即摄动结构为对角块, 同时为方便考察输入增益的摄动, 令 $\Delta_{22} = a\Delta_{11}$, 则 Δ_{11} 和 a 均为常数, 可以得到

$$G(\Delta) = U\Sigma(\Delta) \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = U\Sigma(\Delta) \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -a\cos\alpha & a\sin\alpha \end{bmatrix}^H = U\Sigma(\Delta) V_T^H, \quad (2)$$

其中 $\Sigma(\Delta) = \Delta_{11}\Sigma$, V_T 代表摄动后 $G(\Delta)$ 的输入矩阵, 可以看出摄动后方向性的改变与摄动块的参数 a 和角度 α 有关, 当 $a = -1, \alpha = \pi/4 + k\pi/2$ (k 为

* 国家高等学校博士学科点专项基金(96021314)资助项目.
本文于 1996 年 11 月 20 日收到. 1997 年 12 月 24 日收到修改稿.

整数)时,摄动后的最小奇异值 $\underline{\sigma}_T$ 方向对应于原来最大奇异值 $\bar{\sigma}$ 方向,而最大奇异值 $\bar{\sigma}_T$ 方向则对应于原来的最小奇异值 $\underline{\sigma}$ 方向,此时的鲁棒性能问题最严重^[1];当 $\alpha = k\pi/2$ (k 为整数)时,摄动后方向性不变,也就不存在严重的鲁棒性能问题。

2) 当 $\Delta_{11} = \Delta_{22} = 0$ 时,令 $\Delta_{21} = a\Delta_{12}$,则 Δ_{12} 和 a 均为常数,可以得到,

$$G(\Delta) = U\Sigma(\Delta) \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} = U\Sigma(\Delta) \begin{bmatrix} -a\cos\alpha & a\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^H = U\Sigma(\Delta) V_T^H, \quad (3)$$

其中 $\Sigma(\Delta) = \Delta_{12}\Sigma$,可以看出,当 $\alpha = k\pi/2$ (k 为整数),或 $a = -1, \alpha = \pi/4 + k\pi/2$ (k 为整数)时摄动后的方向性变化最大,鲁棒性能问题最严重.当 $a = 1, \alpha = \pi/4 + k\pi/2$ (k 为整数)时,摄动后的方向性不变,不会引起大的鲁棒性能问题.上述两种情况结合在一起就是输入增益摄动为满块时的情形。

由于我们这里讨论的是输入增益摄动(实参数摄动)下方向性变化与系统鲁棒性能的关系,输入矩阵 V 的虚数部分并不会影响方向性的变化,因此上面的结论适用于一般系统。

下面将以精馏塔模型为例子,讨论如何应用不同形式的 μ 综合方法处理具有不同输入增益结构摄动系统的鲁棒性能设计。

2 不同摄动结构下的 μ 综合设计 (μ -synthesis design with different uncertainty structure)

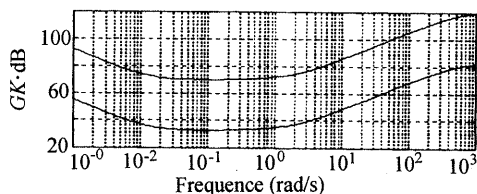


图2 控制器的奇异值BODE图
Fig. 2 Singular value of controller

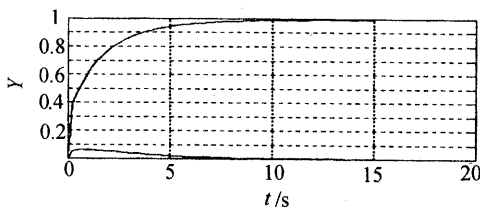


图4 Δ_1 摄动下的阶跃响应曲线
Fig. 4 Step-response under Δ_1 uncertainty

以文献[1]中的精馏塔 D-V 控制形式为例,考虑其传递函数为

$$G = \frac{1}{75s + 1} \begin{bmatrix} -0.878 & 0.014 \\ -1.082 & -0.014 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

对其进行奇异值分解得到在全部频带上对象的方向角 α 是一约为 90° 的常数.下面是利用 μ 综合方法针对不同摄动情况进行设计.系统的鲁棒稳定性权函数取为

$$W_1 = 0.2 = \frac{5s + 1}{0.5s + 1}, \quad (5)$$

上式的低频段代表对象输入端的 20% 增益摄动,高频段代表 1 秒的延迟。

系统设计的鲁棒性能权取为

$$W_P = 0.5 \frac{10s + \rho}{10s}, \quad (6)$$

其中 ρ 用于调整 μ 综合设计中的鲁棒性能权函数,以确保设计达到最优状态。

为了测试不同设计结果对应不同摄动形式的性能差别,这里取两种输入增益的摄动形式,一种是对角块的摄动 Δ_1 ;另一种是非对角块摄动 Δ_2 . 用公式表示如下,

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \Delta_a & 0 \\ 0 & \Delta_b \end{bmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & \Delta_b \\ \Delta_a & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

式中 Δ_a, Δ_b 都是代表 20% 的增益摄动。

首先取系统输入增益摄动块的形式为对角型块进行设计,得到如图 2 的 μ 综合优化控制器.此时的控制器条件数较大,几乎是对象逆形式的形式,这似乎与条件数 MIMO 系统的鲁棒性能设计要求^[1]相矛盾,其原因就在于此时对象方向角 $\alpha \approx 90^\circ$,在对角型的输入摄动下系统几乎不存在鲁棒性能的特殊问题。

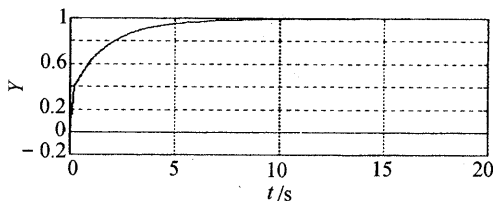


图3 名义对象下的阶跃响应曲线
Fig. 3 Step-response of nominal plant

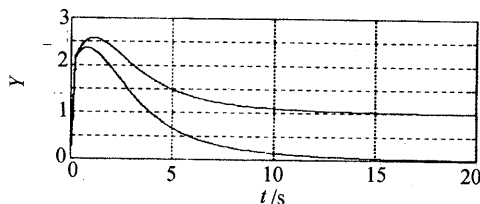


图5 Δ_2 摄动下的阶跃响应曲线
Fig. 5 Step-response under Δ_2 uncertainty

图 3 和图 4, 图 5 是系统的阶跃响应仿真曲线: 图 3 为名义系统下的仿真曲线; 图 4 是系统在 Δ_1 形式摄动下的仿真曲线, 此时系统的鲁棒性能较好, 仿真曲线与名义系统下的仿真曲线基本一致; 而从图 5 的系统在 Δ_2 形式摄动下的仿真曲线可以看出, 此时系统的鲁棒性能较差, 超调已经达到 250%.

下面是针对满块输入摄动进行设计, 得到如

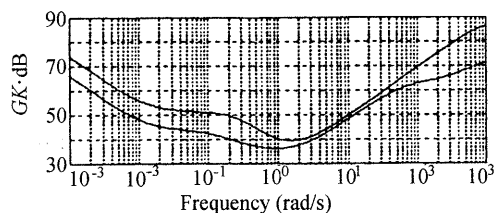


图 6 控制器的奇异值BODE图
Fig. 6 Singular value of controller

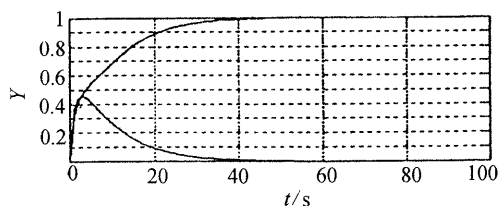


图 8 Δ_1 摄动下的阶跃响应曲线
Fig. 8 Step-response under Δ_1 uncertainty

对比上面的不同设计结果, 可以明显地看出不同的输入增益摄动形式对系统性能的影响, 因此在设计中如果忽略了摄动形式的因素则可能带来很大的设计保守性.

3 结论(Conclusions)

1) 不同输入增益的不确定性结构下, MIMO 系统的鲁棒性能问题不尽相同, 与输入方向角 α 有关.

2) μ 综合设计完全可以解决不同形式摄动块下系统鲁棒性能的设计; 同时也说明在进行 μ 综合设计时, 不确定块形式的正确选择是确保 μ 综合设计

图 6 所示的 μ 综合优化控制器. 从图 6 的控制器的奇异值 BODE 图上可以看出此时控制器的条件数较小, 没有出现对象逆的控制器. 图 7 和图 8, 图 9 是设计后系统在名义系统下和不同摄动形式下的时域仿真结果, 可以看出三条仿真曲线基本一致, 即表明系统对于不同形式的摄动都具有较好的鲁棒性能.

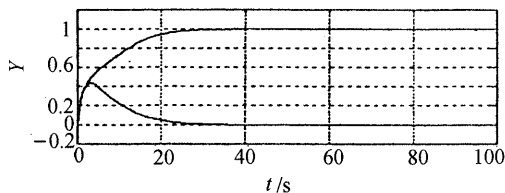


图 7 名义对象下的阶跃响应曲线
Fig. 7 Step-response of nominal plant

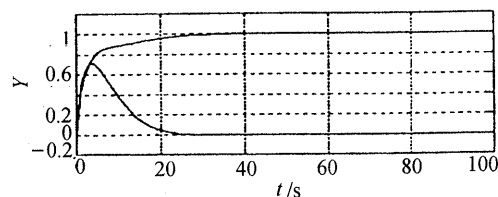


图 9 Δ_2 摄动下的阶跃响应曲线
Fig. 9 Step-response under Δ_2 uncertainty

无保守性的一个关键问题.

参考文献(References)

- 1 Skogestad S, Morari and Doyle J C. Robust control of ill-conditioned plants: High-purity distillation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, 33(12): 1092 - 1105

本文作者简介

张 治 1971 年生, 1993 年毕业于哈尔滨工业大学自动控制专业. 目前从事通讯领域和程控交换方面的研究和开发工作.

杨志勇 见本刊 1999 年第 2 期第 240 页.

王广雄 见本刊 1999 年第 2 期第 240 页.