关于离散线性系统能决定性的判别*

龚德恩
(华侨大学工商管理系·福建泉州,362011)

摘要: 本文得到离散线性系统能决定性的一个判别定理,该定理解决了文献中尚未解决的相关问题.
关键词: 离散线性系统; 能决定性; 对偶原理

A Discriminant of the Determinability for the Discrete Linear System

Gong De'en
(Department of Business Administration, Huaqiao University·Fujian Quanzhou, 362011, P.R.China)

Abstract: This paper presents and proves a discriminant theorem which is suited to examine the determinability of the discrete linear system, which shows that an outstanding issue of this field has been solved.

Key words: discrete linear system; determinability; principle of duality

考虑离散线性系统

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k). \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}^m, y(k) \in \mathbb{R}^r$ 分别为系统状态、输入和输出向量;$A(k), B(k), C(k), D(k)$ 为适当维数的已知函数矩阵.

定义　在输入序列 $\{u(k)\}$ 给定的条件下,如果存在正整数 N,使系统(1)的初始状态 $x(k_0)$ 能由输出的观测值 $y(k_0), y(k_0+1), \cdots, y(k_0+N-1)$ 唯一地确定,则称系统(1)是完全能观测的;如果存在正整数 N,使系统(1)的末状态 $x(k_0+N)$ 能由输出的观测值 $y(k_0), y(k_0+1), \cdots, y(k_0+N-1)$ 唯一地确定,则称系统(1)是完全能决定的[注].

注　关于"能决定"概念,不同文献取的名称不尽相同,文献[2,3]称为"能检测",文献[4]称为"能辨识",文献[5]称为"能重构",本文按文献[6]称为"能决定".

定义中的 k_0 为给定的初始时刻,不失一般性,可令 $k_0 = 0$.

众所周知,系统(1)完全能观测的充分必要条件是[2]:存在正整数 N,使能观测性矩阵

$$V_0(N) = \begin{bmatrix} C(0) \\ C(1)\Phi(1,0) \\ \vdots \\ C(N-1)\Phi(N-1,0) \end{bmatrix} \tag{2}$$

之秩等于系统维数 n. 其中

$$\begin{cases} \Phi(i,j) = A(i-1)A(i-2)\cdots A(j+1)A(j), \\ \qquad i > j \\ \Phi(j,j) = I \end{cases} \tag{3}$$

为系统(1)的状态转移矩阵.

关于系统(1)的能决定性,目前文献中尚无一般的检验定理.本文得到如下的定理:

定理　系统(1)完全能决定的充分必要条件是存在正整数 N,使得

$$\operatorname{rank} V_0(N) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} V_0(N) \\ \Phi(N,0) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

其中 $V_0(N)$ 为(2)式确定的能观测性矩阵,$\Phi(N,0)$ 为(3)式确定的状态转移矩阵.

证　(1)的解为

$$x(k) = \Phi(k,0)x(0) + \varphi(k), \quad k > 0, \tag{5}$$

$$y(k) = C(k)\Phi(k,0)x(0) + \psi(k), \quad k \geqslant 0, \tag{6}$$

其中记

$$\varphi(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k,i+1)B(i)u(i), \quad k > 0, \tag{7}$$

$$\psi(k) = \begin{cases} D(0)u(0), & k = 0, \\ C(k)\varphi(k) + D(k)u(k), & k > 0. \end{cases} \tag{8}$$

由(6)式有

$$\begin{cases} y(0) = C(0)x(0) + \psi(0), \\ y(1) = C(1)\Phi(1,0)x(0) + \psi(1), \\ \vdots \\ y(N-1) = C(N-1)\Phi(N-1,0)x(0) + \\ \qquad \psi(N-1). \end{cases}$$

* 福建省自然科学基金资助项目.
本文于1997年12月15日收.1998年5月29日收到修改稿.

写成矩阵形式为

$$V_0(N)x(0) = \tilde{y} - \tilde{\psi}. \tag{9}$$

其中

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\psi} = \begin{bmatrix} \psi(0) \\ \psi(1) \\ \vdots \\ \psi(N-1) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

另方面,由(5)式有

$$x(N) = \Phi(N,0)x(0) + \varphi(N). \tag{11}$$

充分性:如果对某个正整数 N,(4) 式成立,则 $\Phi(N,0)$ 的行向量为 $V_0(N)$ 行向量的线性组合,从而存在 $rN \times n$ 矩阵 M,使得

$$\Phi(N,0) = MV_0(N).$$

将此式代入(11)式,则由(9)式得

$$x(N) = MV_0(N)x(0) + \varphi(N) = M\tilde{y} - M\tilde{\psi} + \varphi(N).$$

此式表明,末状态 $x(N)$ 由 $\tilde{y}$ 即 $y(0), y(1), \cdots, y(N-1)$ 唯一地确定,故系统(1) 完全能决定.

必要性:设系统(1)完全能决定,则自由系统

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k), \\ y(k) = C(k)x(k) \end{cases} \tag{12}$$

也完全能决定,此时,(9)式化为

$$V_0(N)x(0) = \tilde{y}. \tag{9'}$$

因系统(12)完全能决定,故存在正整数 N 和 $n \times r$ 矩阵 $M_0, M_1, \cdots, M_{N-1}$, 使得

$$x(N) = M_0 y(0) + M_1 y(1) + \cdots + M_{N-1} y(N-1) = M\tilde{y}.$$

其中 $M = [M_0, M_1, M_{N-1}]$, $\tilde{y}$ 的定义同(10),将(9′)代入上式得

$$x(N) = MV_0(N)x(0). \tag{13}$$

另方面,对于齐次系统(12),(11)式化为

$$x(N) = \Phi(N,0)x(0). \tag{14}$$

比较(13),(14)式右端,并注意到 $x(N)$ 是唯一确定的,可知 $\Phi(N,0)$ 的行向量必为 $V_0(N)$ 行向量的线性组合,故(4)式成立.

对于离散定常线性系统

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \end{cases} \tag{15}$$

其状态转移矩阵为

$$\Phi(i,j) = A^{i-j}, \quad i \geqslant j. \tag{16}$$

推论 1 系统(15)完全能决定的充分必要条件是:存在正整数 N, 使得

$$\operatorname{rank} V_0(N) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} V_0(N) \\ A^N \end{bmatrix}. \tag{17}$$

其中

$$V_0(N) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

定常系统(15)的对偶系统为

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = A^{\mathrm{T}}\bar{x}(k) + C^{\mathrm{T}}\bar{u}(k), \\ \bar{y}(k) = B^{\mathrm{T}}\bar{x}(k) + D\bar{u}(k). \end{cases} \tag{19}$$

推论 2 若系统(15)完全能控(完全能决定),则对偶系统(19)完全能决定(完全能控);反之亦然.

证 系统(15)完全能控的充分必要条件是[1]:存在正整数 N, 使得

$$\operatorname{rank} U_c(N) = \operatorname{rank}[U_c(N), A^N]. \tag{20}$$

其中

$$U_c(N) = [B, AB, \cdots, A^{N-1}B].$$

而

$$U_c^{\mathrm{T}}(N) = \begin{bmatrix} B^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{N-1} \end{bmatrix}.$$

此即系统(19)的能观测性矩阵,故由(20)可知,系统(19)完全能决定,类似地可证,系统(15)完全能决定时,对偶系统(19)完全能控. 证毕.

例 已知系统

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(k), \\ y(k) = [0, 1]x(k). \end{cases}$$

讨论其能观测性与能决定性.

解 因为

$$V_0(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

所以 $\operatorname{rank} V_0(2) = 1 < 2 = n$,该系统不是完全能观测的,又因为 $N = 1$ 时,有

$$V_0(1) = [0, 1],$$

$$\begin{bmatrix} V_0(1) \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

故 $\operatorname{rank} V_0(1) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} V_0(1) \\ A \end{bmatrix} = 1$,

(下转第 599 页)

$$u_1 = -(|x_2| + \varepsilon|S|)/(1 - \frac{1}{3}),$$

则

$$\dot{V} = 2S\dot{S} = 2S(2x_2 + (3+\sin(x_1x_2))u \leqslant -2\varepsilon|S|^2,$$

于是

$$|S| \leqslant \sqrt{|S(x(0))|}\exp(-\varepsilon t).$$

记 $e_1 = x_1 - x_1^*$，将(19)和(17)相减得

$$\dot{e}_1 = -2e_1 + (x_2 - x_1^2 + 2x_1) = -2e_1 + s. \tag{20}$$

由此容易看出逼近性条件(13)满足，系统全局渐近稳定．事实上，由(20)

$$e_1(t) = e_1(0)\exp(-2t)\} + \int_0^t \exp(-2(t-\tau))S(x(\tau))\mathrm{d}\tau \leqslant |e_1(0)|\exp(-2t) + \frac{\sqrt{|s(0)|}}{2(1-\varepsilon)}\exp(-\varepsilon t) \to 0.$$

5 结论(Conclusion)

克服或削弱抖振是变结构控制理论研究的一个重要课题．究其抖振产生的原因，主要是切换面附近到达速度过快(当然还有建模误差、不能及时切换等原因)，惯性使运动难以立即反向，造成对切换面的来回穿越形成抖振．本文提出的到达条件为削弱抖振提供了思路，因为(在一定的条件下)状态 $x(t)$ 在向滑动面靠近的同时，又在跟踪滑动模态．因此，适当的选择 $V(S)$，使其在 $\|S\|$ 较大(即远离切换流形处)时让 $\dot{V} \leqslant -\varepsilon\|\frac{\partial V}{\partial S}\|\|S\|$ 起主要作用，$\|S\|$ 迅速递减，而在 $\|S\|$ 较小(即滑动流形附近)，$\|S\|$ 以较小速度减小，让条件(13)起主导作用，这样就能既不影响到达速度又能扼制抖振．

参考文献(References)

1 Utkin V I. Variable structure systems with sliding mode. IEEE Trans., 1997, AC-22(2): 212-222

2 Slotine J J E and Sastry S S. Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators. Int. J. contr., 1983, 38(2): 465-492

3 Slotine J J E. Sliding controller design for nonlinear systems. Int. J. contr., 1984, 40(2): 421-434

4 Stanislaw H Zak and Stefen Hu. On variable structure output feedback controllers for uncertain dynamical systems. IEEE Trans. Automat. contr., 1993, 38(10): 1509-1512

5 高为炳，程勉．变结构控制系统的品质控制．控制与决策，1989，4(4)：1-6

6 高为炳．变结构控制理论基础．北京：中国科学技术出版社，1990

本文作者简介

李文林　1949 年生．1983 年山东大学数学系获硕士学位，1993 年北京航空航天大学获博士学位，现为河南师范大学数学系教授．主要研究兴趣有非线性系统，变结构控制，自适应控制和模糊控制．

王红军　1963 年生．1986 年于河南师范大学数学系毕业，1989 年至 1990 年在北京航空航天大学进修，现为河南师范大学讲师．研究领域为微分方程稳定性，大系统理论．

(上接第 595 页)

该系统是完全能实际上，由系统方程有决定的．

$$x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x_2(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} y(0).$$

此式表明，对系统观测一步，末状态 $x(1)$ 可由输出 $y(0)$ 唯一地确定．

参考文献(References)

1 王翼．离散控制系统．北京：科学出版社，1987

2 中国科学院数学研究所控制理论研究室编．线性控制系统的能控性与能观测性．北京：科学出版社，1975

3 周凤岐等编．现代控制理论及其应用．成都：电子科技大学出版社，1994

4 何关钰著．线性控制系统理论．沈阳：辽宁人民出版社，1982

5 Strejc V. State space theory of discrete linear control. A Wiley-Interscience Publication, 1981

6 Mahmoud M S and Singh M G. Discrete Systems. Control and Optimizotion. Springer-Verlag, 1984

本文作者简介

龚德恩　1939 年生．华侨大学教授，主要研究领域为离散控制系统理论，经济控制论，数理经济学等．