变结构控制系统到达条件的研究*

李文林 王红军

(河南师范大学数学系·新乡,453002)

摘要:本文研究了变结构控制系统两种运动形式的联系,证明了在一定条件下,其常规运动向滑动流形接近的同时又在跟踪滑动模态.基于这一结果,我们提出了新的滑模到达条件,并将该条件用于变结构控系统的设计,有效地削弱了抖振,改善了系统的稳态性能.

关键词:非线性控制系统;变结构控制;滑动模态;抖振

The Study on Reach Condition of Variable Structure Control Systems

Li Wenlin and Wang Hongjun

(Department of Mathematics, Henan Normal University·Xinxiang, 453002, P.R.China)

Abstract: This paper studies the relation of two motions of variable structure control systems. It is shown that the regular motion always trails after the sliding mode as it heads towards the sliding surface. Based on the result, a new reach condition is suggested. With the new condition, the control schem of variable structure control is considered, and the chattering is reduced greatly.

Key words: nonlinear control system; variable structure control; sliding mode; chattering

1 引言(Introduction)

变结构控制其实可看作是对原系统的集结,设选取的切换函数为 $S=[S_1,\cdots,S_m]$,则原系统可分解为两个低阶系统:一个是状态变量为 S 的 m 阶的集结系统,另一个是 $n-m$ 阶的滑动运动.为了实现滑动运动,集结方程(关于 S)应是稳定的,即要求 $S\to 0$,这一点与通常的 Lyapunov 稳定性很相似.但二者有一个不同点:Lyapunov 稳定性只要求逐渐接近平衡点,对过程的时间没有限制,而变结构控制系统中 $S\to 0$,通常是要求有限时间到达,因此,对变结构控制系统单单要求 $\dot{S}<0$ 是不够的,它有可能导致 S 只能逐渐接近 0,而永远不能到达 0,实现不了滑动运动[6].因此,迄今所使用的滑模到达条件基本上都是:$\begin{cases}\dot{S}_i<-\delta, S_i>0 \text{时}\\ \dot{S}_i>\delta, S_i<0\text{时}\end{cases}$,或 $\dot{S}\,\mathrm{sgn}\,S<-\delta$ 等类似形式[1,5,6].这种到达条件有一个弊端:依据这类条件设计的变结构控制系统会出现明显的抖振[2~6].为了削弱抖振,一些学者[2,3,5]利用边界层概念提出了用饱和函数代替符号函数构造控制律,这种方法虽然能削弱抖振,但它是以牺牲滑模不变性为代价的.本文通过对变结构控制系统两种运动形式走向的分析和跟踪性研究,证明了其常规运动和滑动运动不是相互独立的,在一定的条件下,常规运动向滑动流形接近的同时,对滑动模态又有一个跟踪性能.基于这一结果,本文提出用逼近条件加 V 函数的方法建立滑模到达条件.该条件不仅在消弱抖振,改善系统的稳态性能方面是有效的,而且也增加了控制策略设计的灵活性.

2 系统的基本假设和切换函数的构造(Basic assumption of systems and construction of switching function)

考虑如下形式的非线性不确定系统的变结构控制:

$$\dot{x}=f(t,x)+\Delta f(t,x)+(B(t,x))+\Delta B(t,x)u. \quad (1)$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}^m, f(t,0)=0, B(t,x)$ 列满秩;$\Delta f,\Delta B$ 分别为 f 和 B 的不确定部分.

为了分析滑动模态性能和推导方便,给出以下假设:

假设 1 $\Delta f,\Delta B$ 满足匹配性条件:$\Delta f=B(t,x)\tilde{f}, \Delta B=B(t,x)\tilde{B}$.

由 $B(t,x)$ 列满秩和对 $\Delta f,\Delta B$ 匹配性条件的假设,可通过状态变换将(1)化为如下正则型(为书写方便,各变量不妨仍采用原来记号)

$$\dot{x}_1=f_1(t,x), \quad (2)$$

* 国家自然科学基金(69874010)和河南省教委自然科学基金资助研究课题.
本文于 1997 年 7 月 22 日收.1998 年 6 月 29 日收到修改稿.

$$\dot{x}_2 = f_2(t,x), + B_2(t,x)u + \Delta B_2(t,x)u + \Delta f_2(t,x) \tag{3}$$

其中 $x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}, x_2 \in \mathbb{R}^m, B_2(t,x)$ 非奇异.

假设 2 存在连续可微的向量函数 $\rho(x_1) \in \mathbb{R}^m$: $\rho(0)=0$,使得系统

$$\dot{x}_1 = f_1(t,x_1,\rho(x_1)) \tag{4}$$

是全局渐近稳定的,为了便于和线性系统情况联系对照,我们再设

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x_1 + hf_1(t,x,\rho(x_1))\| - \|x_1\|}{h} < \lambda(t)\alpha_1(\|x_1\|). \tag{5}$$

其中 $\alpha_1(\|x_1\|)$ 和后面的 $\alpha_2(\|x_1\|), \alpha_3(\|x_1\|)$ 均为 $\|x_1\|$ 的非负严格增函数,且存在 T 和 $\gamma > 0$.

$$\lambda(t) \leqslant -\gamma, \quad 当\ t \geqslant T\ 时. \tag{6}$$

记 $\lambda(A_1)$ 表示矩阵 A_1 的特征值,$\mu(A_1)$ 表示矩阵 A_1 的测度,不难证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|I - hA_1\| - 1}{h} = \max\lambda(A_1 + A_1^*) = \mu(A_1).$$

因此,式(5)可看成是线性定常系统稳定性条件的推广.

假设 3

$$\|f_1(t,x_1,x'_2) - f_1(t,x_1,x''_2)\| \leqslant \alpha_2(\|x_1\|)\|x'_2 - x''_2\|, \tag{7}$$

且存在 $\alpha_3(\|x_1\|)$,使得

$$\alpha_2(\|x_1\|)\alpha_3(\|x_1\|) \leqslant \alpha_1(\|x_1\|). \tag{8}$$

取切换函数为

$$s(x) = x_2 - \rho(x_1). \tag{9}$$

则滑动方程为

$$\dot{x}_1 = f_1(t,x_1,\rho(x_1)). \tag{4'}$$

由假设 2,滑动模态是全局渐近稳定的.

利用(9),系统的状态分量 x_1 的运动可描述为

$$\dot{x}_1 = f_1(t,x_1,\rho(x_1) + s). \tag{10}$$

引理 1 记 $S_\delta = \{x \mid \|s(x)\| \leqslant \delta\}$,在假设 1～3下,保持在 S_δ 内的运动最终将进入球 $B(r(\delta))$ 内.其中 $r(\delta)$ 严格递减,即 $\delta \to 0$ 时,球 $B(r(\delta))$ 收缩为一点.

证 将(10)改写成下面形式:

$$\dot{x}_1 = f_1(t,x_1,\rho(x_1)) + f_1(t,x_1,\rho(x_1)+s) - f_1(t,x_1,\rho(x_1)), \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x_1\| = \lim_{h\to 0}\frac{\|x_1(t+h)\| - \|x_1(t)\|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\|x_1 + h\dot{x}_1 + o(h)\| - \|x_1\|}{h} \leqslant$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x_1 + hf_1(t,x_1,\rho(x_1))\| - \|x_1\|}{h} + \|f_1(t,x_1,\rho(x_1)+s) - f_1(t,x_1,\rho(x_1))\|.$$

由假设 2,3 和 $x(t) \in S_\delta$,则

$$上式 \leqslant \lambda(t)\alpha_1(\|x_1\|) + \alpha_2(\|x_1\|)\|s\| \leqslant \frac{1}{2}\lambda(t)\alpha_1(\|x_1\|) + \frac{1}{2}\lambda(t)\alpha_2(\|x_1\|)\alpha_3(\|x_1\|) + \alpha_2(\|x_1\|)\|s\| \leqslant \frac{1}{2}\lambda(t)\alpha_1(\|x_1\|) + \alpha_2(\|x_1\|)\left(\frac{1}{2}\lambda(t)\right)\alpha_3(\|x_1\|) + \delta).$$

由(6),当 $t \geqslant T$ 时,

$$上式 \leqslant -\frac{1}{2}\gamma\alpha_1(\|x_1\|) - \alpha_2(\|x_1\|)\cdot\left(\delta - \frac{1}{2}\gamma\alpha_3(\|x_1\|)\right). \tag{12}$$

于是最终将有 $\delta - \frac{1}{2}\gamma\alpha_3(\|x_1\|) \geqslant 0$,即

$$\|x_1\| \leqslant \alpha_3^{-1}(2\delta/\gamma),$$

$$\|x_2\| < \max_{\|x_1\| \leqslant \alpha_3^{-1}(2\delta/\gamma)}\{\|\rho(x_1)\|\} + \delta.$$

否则 $\delta - \frac{1}{2}\gamma\alpha_3(\|x_1\|) < 0$,

代入(12)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x_1\| \leqslant -\frac{1}{2}\gamma\alpha_1(\|x_1\|).$$

于是 $\|x_1\|$ 递减,所以最终有

$$\|x_1\| \leqslant \alpha_3^{-1}(2\delta/\gamma),$$

从而

$$\|x_2\| < \max_{\|x_1\| \leqslant \alpha_3^{-1}(2\delta/\gamma)}\{\|\rho(x_1)\|\} + \delta.$$

3 常规运动与滑动的相关性(Interrelation of regular motion and sliding mode)

由引理 1 知,在前面条件下 S_δ 内的常规运动对滑动模态有某种跟踪能力,我们有下面结论:

定理 1 在假设 1～3 条件下,变结构系统(2),(3),(9)的常规运动将一致逼近其滑动模态,即

$$\lim_{\delta\to 0}\|x^\delta(t) - x^*(t)\| = 0 \tag{13}$$

对 t 一致成立.其中 x^* 表示滑动模态,x^δ 表示系统保持在 S_δ 内的常规运动.

证 因 x^δ 是 S_δ 内的常规运动,满足方程(10),记 $e_1 = x_1^\delta - x_1^*$,由(4)和(10)得

$$\dot{e}_1 = f(t,x_1^\delta,\rho(x_1^\delta) + s) - f(t,x_1^*,\rho(x_1^*)).$$

由(7),利用控制收敛定理容易证明

$$\lim_{\delta\to 0} x_1^{\delta}(t) = x_1^*(t). \tag{14}$$

再由(9)得

$$x_2^{\delta} - x_2^* = \rho(x_1^{\delta}) - \rho(x_1^*) + s,$$

$$\| x_2^{\delta} - x_2^* \| \leqslant \| \rho(x_1^{\delta}) - \rho(x_1^*) \| + \delta. \tag{15}$$

由(7)可以看出上面收敛对 t 还是一致的.由(14)和(15)即得逼近条件(13)成立. 证毕

推论 1 假设条件2可换成:存在 $(n-m)$ 阶方阵 $A_1:\mu(A_1)<0$,使得

$$\| f_1(t,x_1,\rho(x_1)) - A_1x_1 \| \leqslant \varphi(t)\| x_1 \|,$$

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = k < -\mu(A_1).$$

证 只需利用绝对值三角不等式和矩阵测度 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\| I + hA_1 \| - 1}{h} = \mu(A_1)$ 即得.

推论 2 如果系统(1)是线性定常系统,且(A,B)是可控的,适当选择 $n\times m$ 阵K,并取切换函数 $S = x_2 - Kx_1$,则定理1的结论成立.

4 滑模到达条件和变结构控制律设计(Reaching condition of sliding mode and design of variable structure control law)

定理1表明,在一定条件下 S_δ 内的两种运动不是相互独立的,常规运动在接近滑动流形的同时,也在跟踪着滑动模态,而且随着 δ 的减小,跟踪误差逐渐减小.于是,对满足假设条件1～3的非线性系统(1),可取如下的滑模到达条件:

存在 S 的正定函数 $V(S)$,沿系统轨线 $\dot V(S)<0$.

定理 2 对变结构控制系统(2),(3),(9),若上面到达条件满足,则系统全局渐近稳定.

证 由假设2,滑模 $x^*(t)$ 是渐近稳定的,对任意 $\varepsilon>0$,存在 $T_1>0,t>T_1$ 时,$|x^*(t)|<\varepsilon$.

由定理1,存在 $\delta_0>0,0<\delta<\delta_0$ 时,$\| x(t) - x^*(t) \| < \varepsilon$.

再由 $\dot V(S)<0$,对上述 δ,存在 $T_2>0$,当 $t>T_2$ 时,$x(t)\in S_\delta$.

记 $T=\max\{T_1,T_2\}$,$t>T$ 时,

$$\| x(t) \| \leqslant \| x(t) - x^*(t) \| + \| x^*(t) \| < 2\varepsilon.$$

变结构控制系统(2),(3),(9)全局渐近稳定.

下面我们用定理2中的到达条件研究系统(2),(3)的变结构控制设计问题.

假设 4

$$\| \Delta B_2(x,t)B_2(x,t)^{-1} \| \leqslant \zeta < 1. \tag{16}$$

定理 3 取变结构控制律

$$u = -\frac{B_2^{-1}\partial V/\partial S}{\| \partial V/\partial S \|}u_1,$$

$$u_1 \geqslant (\| f_2(t,x) + \Delta f_2(t,x) + (\partial\rho/\partial x_1)f_1(t,x) \| + \varepsilon \| S \|)/(1-\zeta),$$

则系统(1)全局渐近稳定.

证

$$\dot V = \frac{\partial V}{\partial S}\dot S = \frac{\partial V}{\partial S}(f_2(t,x) + B_2(t,x)u + \Delta B_2(t,x)u + \Delta f_2(t,x) - \frac{\partial\rho}{\partial x_1}f_1(t,x) \leqslant$$

$$\| \frac{\partial V}{\partial S}(f_2(t,x) + \Delta f_2(t,x) - \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \| f_1(t,x) \| + \frac{\partial V}{\partial S}B_2(t,x)u + \frac{\partial V}{\partial S}\Delta B_2(t,x)u.$$

设 $u = -\dfrac{B_2^{-1}\partial V/\partial S}{\| \partial V/\partial S \|}u_1$,则

$$\text{上式} \leqslant \| \frac{\partial V}{\partial S} \| \| f_2(t,x) + \Delta f_2(t,x) - \frac{\partial\rho}{\partial x_1}f_1(t,x) \| - \| \frac{\partial V}{\partial S} \| u_1 + \frac{\partial V}{\partial S}(\Delta B_2)B_2^{-1}\frac{\partial V/\partial S}{\| \partial V/\partial S \|}u_1,$$

由(16),

$$\text{上式} \leqslant \| \frac{\partial V}{\partial S} \| \| f_2(t,x) + \Delta f_2(t,x) - \frac{\partial\rho}{\partial x_1}f_1(t,x) \| - \| \frac{\partial V}{\partial S} \| (1-\zeta)u_1,$$

由

$$u_1 \geqslant (\| f_2(t,x) + \Delta f_2(t,x) + (\partial\rho/\partial x_1)\cdot (f_1(t,x) \| + \varepsilon \| S \|)/(1-\zeta),$$

则有

$$\dot V \leqslant -\varepsilon \| \frac{\partial V}{\partial S} \| \| S \|.$$

又由定理1,逼近条件(13)满足,系统全局渐近稳定.

例 考虑二阶系统

$$\dot x_1 = -x_1^2 + x_2, \tag{17}$$

$$\dot x_2 = 2\dot x_1(-x_1^2 + x_2 + x_1) + (3+\sin(x_1x_2))u. \tag{18}$$

由 $\rho(x_1) = x_1^2 - 2x_1$,则切换函数为

$$S = x_2 - x_1^2 + 2x_1.$$

则滑动方程为

$$\dot x_1^* = -2x_1^*. \tag{19}$$

取 $V(S)=S^2$,按定理3变结构控制律,则

$$u = -\frac{1}{3}\mathrm{sgn}S\cdot u_1,$$

$$u_1 = -(|x_2| + \varepsilon|S|)/(1 - \frac{1}{3}),$$

则

$$\dot{V} = 2S\dot{S} = 2S(2x_2 + (3 + \sin(x_1x_2))u \leqslant -2\varepsilon|S|^2,$$

于是

$$|S| \leqslant \sqrt{|S(x(0))|}\exp(-\varepsilon t).$$

记 $e_1 = x_1 - x_1^*$,将(19)和(17)相减得

$$\dot{e}_1 = -2e_1 + (x_2 - x_1^2 + 2x_1) = -2e_1 + s. \tag{20}$$

由此容易看出逼近性条件(13)满足,系统全局渐近稳定.事实上,由(20)

$$e_1(t) = e_1(0)\exp(-2t)\} + \int_0^t \exp(-2(t-\tau))S(x(\tau))\mathrm{d}\tau \leqslant |e_1(0)|\exp(-2t) + \frac{\sqrt{|s(0)|}}{2(1-\varepsilon)}\exp(-\varepsilon t) \to 0.$$

5　结论(Conclusion)

克服或削弱抖振是变结构控制理论研究的一个重要课题.究其抖振产生的原因,主要是切换面附近到达速度过快(当然还有建模误差、不能及时切换等原因),惯性使运动难以立即反向,造成对切换面的来回穿越形成抖振.本文提出的到达条件为削弱抖振提供了思路,因为(在一定的条件下)状态 $x(t)$ 在向滑动面靠近的同时,又在跟踪滑动模态.因此,适当的选择 $V(S)$,使其在 $\|S\|$ 较大(即远离切换流形处)时让 $\dot{V} \leqslant -\varepsilon\|\frac{\partial V}{\partial S}\|\|S\|$ 起主要作用,$\|S\|$ 迅速递减,而在 $\|S\|$ 较小(即滑动流形附近),$\|S\|$ 以较小速度减小,让条件(13)起主导作用,这样就能既不影响到达速度又能扼制抖振.

参考文献(References)

1　Utkin V I. Variable structure systems with sliding mode. IEEE Trans., 1997, AC-22(2):212-222
2　Slotine J J E and Sastry S S. Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators. Int. J. contr., 1983, 38(2):465-492
3　Slotine J J E. Sliding controller design for nonlinear systems. Int. J. contr., 1984, 40(2):421-434
4　Stanislaw H Zak and Stefen Hu. On variable structure output feedback controllers for uncertain dynamical systems. IEEE Trans. Automat. contr., 1993, 38(10):1509-1512
5　高为炳,程勉.变结构控制系统的品质控制.控制与决策,1989,4(4):1-6
6　高为炳.变结构控制理论基础.北京:中国科学技术出版社,1990

本文作者简介

李文林　1949年生.1983年山东大学数学系获硕士学位,1993年北京航空航天大学获博士学位,现为河南师范大学数学系教授.主要研究兴趣有非线性系统,变结构控制,自适应控制和模糊控制.

王红军　1963年生.1986年于河南师范大学数学系毕业,1989年至1990年在北京航空航天大学进修,现为河南师范大学讲师.研究领域为微分方程稳定性,大系统理论.

(上接第595页)

该系统是完全能实际上,由系统方程有决定的.

$$x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x_2(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} y(0).$$

此式表明,对系统观测一步,末状态 $x(1)$ 可由输出 $y(0)$ 唯一地确定.

参考文献(References)

1　王翼.离散控制系统.北京:科学出版社,1987
2　中国科学院数学研究所控制理论研究室编.线性控制系统的能控性与能观测性.北京:科学出版社,1975
3　周凤岐等编.现代控制理论及其应用.成都:电子科技大学出版社,1994
4　何关钰著.线性控制系统理论.沈阳:辽宁人民出版社,1982
5　Strejc V. State space theory of discrete linear control. A Wiley-Interscience Publication, 1981
6　Mahmoud M S and Singh M G. Discrete Systems. Control and Optimizotion. Springer-Verlag, 1984

本文作者简介

龚德恩　1939年生.华侨大学教授,主要研究领域为离散控制系统理论,经济控制论,数理经济学等.