第 16 卷第 4 期
1999 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.16, No.4
Aug., 1999

# 不确定线性组合大系统的二次稳定性、联结稳定性与 $H_\infty$ 小增益定理 *

王向东　高立群　张嗣瀛
(东北大学自动控制系·沈阳,110006)

**摘要**: 本文首先讨论了不确定线性系统 $\dot{x}(t) = \{A + \sum_{i=1}^{K} D_iF_i(t)E\}x(t)$ 的二次稳定性,得到了该系统是二次稳定的充分必要条件.基于本文得到的结论讨论了不确定线性组合大系统的二次稳定性和联结稳定问题,得到了用关于低阶子系统的一组 $H_\infty$ 模描述大系统稳定性的充分条件.

**关键词**: $H_\infty$ 模; 不确定系统; 二次稳定; 联结稳定

# $H_\infty$ Small-Gain Condition on Quadratic Stability and Connective Stability of Uncertain Composite Systems

Wang Xiangdong, Gao Liqun and Zhang Siying
(Departement of Automatic Control, Northeastern University·Shenyang, 110006, P.R.China)

**Abstract**: In this paper, the problem of quadratic stability of uncertain linear systems—— $\dot{x}(t) = \{A_0 + DF(t)E\}x(t)$ is discussed and necessary and sufficient condition of quadratic stability is given by $H_\infty$ small-gain condition. Based on the obtained result, this paper explores the quadratic and connective stability of uncertain composite system and works out sufficient condition for both kinds of stabilities described by $H_\infty$ small-gain condition for a group of subsystems.

**Key words**: $H_\infty$ nrom; uncertain system; quadratic stability; connective stability

## 1 引言(Introduction)

小增益定理是系统稳定性研究中的一个基本而又非常重要的结果,它使得许多关于系统稳定性的研究结果都成为它的特例.文[1]在研究形如 $\dot{x}(t) = \{A_0 + DF(t)E\}x(t)$(其中 $\|F(t)\| \leqslant 1$) 的系统的二次稳定性时给出了该系统是二次稳定的一个充分必要条件,即定理 2.7.当把 $E(sI - A_0)^{-1}D$ 看作传递函数而把 $F(t)$ 看作时变增益时,该定理就成了小增益定理的一种应用.对于系统

$$\dot{x}(t) = \{A + \sum_{i=1}^{K} D_iF_i(t)E\}x(t). \tag{1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态,$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, D_i \in \mathbb{R}^{n\times l}, F_i(t) \in \mathbb{R}^{l\times j}$ 是不确定性部分,其元素是在紧集 $\Omega$ 上取值的 Lebesgue 可测函数.$E \in \mathbb{R}^{j\times n}$,假设 $\sum_{i=1}^{K} F_i'F_i \leqslant I$. 本文首先讨论了上述系统的二次稳定性问题,给出了该系统是二次稳定的充分必要条件.其次将得到的结果应用于不确定性组合大系统的二次稳定性问题的研究,得到了用低阶子系统表述的大系统稳定的充分条件.最后讨论了组合大系统的联结稳定性问题.

## 2 预备结果(Preliminaries)

文[1]对下述系统

$$\dot{x}(t) = \{A_0 + DF(t)E\}x(t), \quad \|F(t)\| \leqslant 1 \tag{2}$$

给出了下面的结论:

**引理 2.1** 系统(2)是二次稳定的当且仅当下面条件成立:

1) $A_0$ 是稳定阵;

2) $\|E(sI - A_0)^{-1}D\|_\infty < 1$.

在本节中讨论系统(1) 的二次稳定性问题,可以证明如下结论:

**定理 2.1** 对于系统(1),令 $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使 $DD' = \sum_{i=1}^{K} D_iD_i'$,则当

1) $A$ 是稳定阵; (3)

2) $\|E(sI - A)^{-1}D\|_\infty < 1$ (4)

时该系统是二次稳定的,且当如此定义的 $D$ 是列满秩时上述条件也是必要的.

* 国家自然科学基金资助项目(69774005).
本文于 1996 年 12 月 24 日收到.1998 年 12 月 30 日收到修改稿.

## 3 不确定组合大系统的稳定性(Stability of uncertain composite systems)

考虑不确定组合大系统

$$\dot{x}(t) = [A_0 + \Delta A(t)]x(t). \tag{5}$$

其中

$$x' = (x_1' \cdots x_N'), x_i \in \mathbb{R}^n, i = 1,2,\cdots,N,$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_1 & H_{12} & \cdots & H_{1N} \\ H_{21} & A_2 & \cdots & H_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \cdots & A_N \end{bmatrix},$$

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} D_{11}F_{11}(t) & \cdots & D_{1N}F_{1N} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ D_{N1}F_{N1}(t) & \cdots & D_{NN}F_{NN}(t) \end{bmatrix}.$$

$A_i, H_{ij}, F_{ij}(t)$ 和 $D_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}, i = 1,2,\cdots,N$. $F_{ij}(t)$ 的元素是Lebesgue可测且在某紧集上取值.今设 $H_{ij}$ 可以分解为 $H_{ij} = H_{ij}^1 H_{ij}^2, H_{ij}^1, H_{ij}^2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$.显然分解方式是不唯一.类似[2],令$((M)_{ij})$是一个$N\times N$分块矩阵,在其第$i$行第$j$列交叉处是$n\times n$的矩阵$M$,其余元素均为零阵,一般有$((D_{ij}F_{ij})_{ij}) = ((D_{ij})_{ij})((F_{ij})_{jj})$及$((H_{ij})_{ij}) = ((H_{ij}^1)_{ij})((H_{ij}^2)_{jj})$.于是系统(5)可以写成

$$\dot{x}(t) = [\bar{A}_0 + \sum_{i\neq j}((H_{ij}^1)_{ij})((H_{ij}^2)_{ij}) + \sum_{i,j}((D_{ij})_{ij})((F_{ij})_{jj})]x(t). \tag{6}$$

其中 $\bar{A}_0 = \text{block} - \text{diag}(A_1 A_2 \cdots A_N)$.

令 $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使

$$D_i D_i' = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} H_{ij}^1 H_{ij}^{1\prime} + \sum_{j=1}^{N} D_{ij} D_{ij}'. \tag{7}$$

令 $F_j(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使

$$F_j' F_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} H_{ij}^{2\prime} H_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{N} F_{ij}' F_{ij}. \tag{8}$$

于是可以给出如下结论:

**定理 3.1** 对于系统(5),设 $F_j' F_j \leqslant I, j = 1,2,\cdots,N$,则当

1) $A_i(i = 1,2,\cdots,N)$ 是稳定阵;

2) $\|(sI - A_i)^{-1}D_i\|_\infty < 1(i = 1,2,\cdots,N)$ 时是二次稳定的.

证　令 $D, F \in \mathbb{R}^{nN\times nN}$,使

$$DD' = \sum_{j\neq i}((H_{ij}^1)_{ij})((H_{ij}^1)_{ij})' + \sum_{i,j}((D_{ij})_{ij})((D_{ij})_{ij})',$$

$$F'F = \sum_{i\neq j}((H_{ij}^2)_{jj})'((H_{ij}^2)_{jj}) + \sum_{i,j}((F_{ij})_{jj})'((F_{ij})_{jj}).$$

经直接计算有:

$$DD' = \text{block} - \text{diag}(D_1 D_1' \cdots D_N D_N'), \tag{9}$$

$$F'F = \text{block} - \text{diag}(F_1' F_1 \cdots F_N' F_N). \tag{10}$$

由(10)及定理所给条件知 $F'F \leqslant I_{nN}$.于是由定理2.1,系统(5)则当:

1) $\bar{A}_0$ 是稳定阵;

2) $\|(sI - \bar{A}_0)^{-1}D\|_\infty < 1$ 时是二次稳定的.因为 $A_i(i = 1,2,\cdots,N)$ 是稳定阵,我们有 $\bar{A}_0$ 是稳定阵.

而

$$(sI - \bar{A}_0)^{-1}D = \text{block} - \text{diag}((sI - A_1)^{-1}D_1 \cdots (sI - A_N)^{-1}D_N), \tag{11}$$

因而

$$D'(-\mathrm{j}\omega I - \bar{A}_0')^{-1}(\mathrm{j}\omega I - \bar{A}_0)^{-1}D = \text{block} - \text{diag}(D_1'(-\mathrm{j}\omega I - \bar{A}_1')^{-1}(\mathrm{j}\omega I - A_1)^{-1}D_1 \cdots D_N'(-\mathrm{j}\omega I - A_N')^{-1}(\mathrm{j}\omega I - A_N)^{-1}D_N).$$

所以

$$D'(-\mathrm{j}\omega I - \bar{A}_0')^{-1}(\mathrm{j}\omega I - \bar{A}_0)^{-1}D < I_{nN}.$$

当且仅当

$$D_i'(-\mathrm{j}\omega I - A_i')^{-1}(\mathrm{j}\omega I - A_i)^{-1}D_i < I, \quad i = 1,2,\cdots,N,$$

即　$$\|(sI - \bar{A}_0)^{-1}D\|_\infty < 1.$$

当且仅当

$$\|(sI - A_i)^{-1}D_i\|_\infty < 1, \quad i = 1,2,\cdots,N.$$

证毕.

**定理 3.2** 对于系统(5),当 $\Delta A(t) = 0$ 时,若 $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}} H_{ij}^{2\prime} H_{ij}^2 \leqslant I(j = 1,2,\cdots,N)$,则当

1) $A_i(i = 1,2,\cdots,N)$ 是稳定阵;

2) $\|(sI - A_i)^{-1}D_i\|_\infty < 1(i = 1,2,\cdots,N)$ 时是稳定的.其中 $D_i D_i' = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} H_{ij}^1 H_{ij}^{1\prime}(i = 1,2,\cdots,N)$.

注意到乘积的模不超过模的乘积,有如下推论:

**推论 3.1** 对于系统(5),当 $\Delta A(t) = 0$ 时,若 $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}} H_{ij}^{2\prime} H_{ij}^2 \leqslant I(j = 1,2,\cdots,N)$,则当

1) $A_i(i = 1,2,\cdots,N)$ 是稳定阵;

2) $\|(sI - A_i)^{-1}\|_\infty \cdot \|D_i\|_\infty < 1(i = 1,2,\cdots,N)$ 时是稳定的.其中 $D_i D_i' = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} H_{ij}^1 H_{ij}^{1\prime}(i = 1,

$2,\cdots,N)$.

## 4 联结稳定性(Connective stability)

结构摄动是组合大系统研究中的一个重要问题,于是就要研究结构摄动如何影响整体系统的稳定性.Siljak引入联结稳定概念,且给出了一个联结稳定的准则(见[3]).

今考虑系统

$$\dot{x}(t) = A_e x(t). \tag{12}$$

其中 $x' = (x_1' x_2' \cdots x_N')$, $x_i \in \mathbb{R}^n (i = 1,2,\cdots,N)$, 而

$$A_e = \begin{bmatrix} A_1 & e_{12}H_{12} & \cdots & e_{1N}H_{1N} \\ e_{21}H_{21} & A_2 & \cdots & e_{2N}H_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{N1}H_{N1} & e_{N2}H_{N2} & \cdots & A_N \end{bmatrix},$$

$A_i, H_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $e_{ij} = 0$或1.称 $\tilde{G} = (e_{ij})_{N\times N}$ 为基本相互作用矩阵,其中 $e_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases}$ 凡由0去替代 $\tilde{G}$ 的某些元素后所得到的矩阵 $G$ 称为相互作用矩阵.Siljak基于微分方程中的比较原理证明了基本相互作用矩阵的稳定性就能保证联结稳定性.下面给出系统(12)是联结稳定的一个充分条件.它也说明在所给条件下基本相互作用矩阵的稳定性蕴含联结稳定性.

**定理 4.1** 对于系统(12),若

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}} H_{ij}^{2\prime} H_{ij}^2 \leqslant I (j = 1,2,\cdots,N),$$

则当

1) $A_i (i = 1,2,\cdots,N)$ 是稳定阵;

2) $\| (sI - A_i)^{-1} \|_\infty \cdot \| D_i \|_\infty < 1 (i = 1,2,\cdots,N)$ 时是联结稳定的.其中 $D_i D_i' = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} H_{ij}^1 H_{ij}^{1\prime} (i = 1,2,\cdots,N)$.

证 从略.

## 5 结论(Conclusion)

在本文中我们得到了一类不确定线性组合系统的二次稳定的更为精细的结果.本文还讨论了不确定线性组合大系统的二次稳定性和组合大系统的联结稳定性,得到了一系列用低阶的子系统表述的稳定性条件.由于所要计算的 $H_\infty$ 模的矩阵都是低阶子系统的阶数,所以稳定性条件中的 $H_\infty$ 模的计算或估计都比较容易,结果很便于应用.

## 参考文献(References)

1 Kharonekar P P, Petersen I R and Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and control theory. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990,35(3):356-361

2 王向东,高立群,张嗣瀛.一类不确定组合大系统的稳定性:Riccati方程方法.控制理论与应用,1995,13(5):653-658

3 [美]M詹姆希迪.大系统建模与控制.北京:科学出版社,1986

4 Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P and Francis B. State-space solutions to the standard $H^2$ and $H_\infty$ control problems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989,34(8):831-847

## 本文作者简介

**王向东** 1959年生.博士,副教授.研究方向为复杂系统结构及控制.

**高立群** 1949年生.博士,教授.研究方向为非线性系统,系统辨识,微分对策.

**张嗣瀛** 见本刊1999年第1期第99页.