第 16 卷第 4 期
1999 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.16, No.4
Aug., 1999

一类具有非线性不确定性系统的鲁棒 H_∞ 控制 *

郭　雷　冯纯伯
（东南大学自动化所·南京，210096）

摘要：考虑一类具有非线性不确定性的系统的 H_∞ 控制器设计问题，给出了判断鲁棒渐近稳定和 L_2 增益有限的充分条件，提出了输出反馈鲁棒 H_∞ 控制问题的可解条件，并给出了基于线性矩阵不等式的鲁棒 H_∞ 控制器的设计方法．

关键词：H_∞ 控制；鲁棒控制；连续系统；线性矩阵不等式

Robust H_∞ Control for a Class of Systems with Nonlinear Uncertainties

Guo Lei　and　Feng Chunbo
(Research Institute of Automation, Southeast University · Nanjing, 210096, P.R.China)

Abstract: This paper considers the H_∞ control problem for a class of systems with time-varying and nonlinear uncertainties. A sufficient condition based on LMI is provided to judge their robust stability and finite L_2-gain property. The solvable condition of the output feedback problem and a simple LMI-based design method are presented.

Key words: H_∞ control; robust control; continuous-time system; LMI

1　引言(Introduction)

不确定性系统的鲁棒 H_∞ 控制问题是近年来控制理论的一个研究热点．文[1]针对一类具有模有界不确定性系统，在文[2,3]等工作的基础上，基于代数 Riccati 方程(ARE)提出了输出反馈 H_∞ 控制器的设计方法，文[4]讨论了一类具有非线性不确定性的系统模型的 L_2 增益有限的条件，并给出了状态反馈 H_∞ 控制器设计方法，但其方法不能推广到输出反馈情形．文[5]研究了比文[4]更加广泛的对象，并得到了输出反馈控制器的设计方法，但是所涉及的线性矩阵不等式(LMI)较为复杂．本文讨论另外一类具有非线性不确定性的系统模型的鲁棒 H_∞ 控制问题．提出了较为简单的鲁棒 H_∞ 控制器的设计方法，与文[5]相比，该方法涉及的 LMI 未知数较少，耦合程度低，而且不需求解代数方程．另一方面，它也使鲁棒 H_∞ 控制问题的结果与著名的 3-LMI 方法统一起来．

考虑如下形式的被控广义对象

$$\dot{x} = Ax + E_1 f_1(x,t) + B_1 w + B_2 u + E_g g(x,t)u, \tag{1}$$

$$z = C_1 x + E_2 f_2(x,t) + D_{12} u, \tag{2}$$

$$y = C_2 x + E_3 f_3(x,t) + D_{21} w, \tag{3}$$

x 定义在 $\mathbb{R}^n$ 空间原点的一个领域，$w \in \mathbb{R}^{n_w}$，$u \in \mathbb{R}^{n_m}$，$z \in \mathbb{R}^{n_z}$，$\omega \in \mathbb{R}^{n_y}$ 分别为外部输入、控制输入、补偿输出和量测输出．$A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}$ 为具有合适维数的已知矩阵，$E_1 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_1}$，$E_g \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_g}$，$E_2 \in \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_2}$，$E_3 \in \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_3}$ 也是已知矩阵．而 $f_i(x,t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_i}$，$i = 1,2,3$．$g(x,t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_g} \times \mathbb{R}^{n_u}$ 是未知的非线性光滑函数．

为便于研究，类似于文[4,5]，我们引入如下假设：

假设 1　不确定函数 $f_i(x,t)(i = 1,2,3)$，$g(x,t)$ 满足

$$\begin{aligned}
&\| f_i(x,t) \| \leqslant \| W_i x \|, \\
&\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}, i = 1,2,3; \\
&\| g(x,t)u \| \leqslant \| W_g u \|, \\
&\forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^{n_u}, \forall t \in \mathbb{R}, i = 1,2,3.
\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $W_i(i = 1,2,3)$，W_g 为给定的权矩阵．

假设 2

$$f_i(0,t) = 0, \quad g(0,t) = 0, \quad i = 1,2,3.$$

且当(1)无控制和扰动输入时，自由系统的方程有解．

若(1)和(2)联结而成的自由系统（$u = 0$）当 $w = 0$ 时，其平衡点 $x = 0$ 渐近稳定且对初始条件 $x(0) = 0$ 有 $\| z \| T < \gamma^2 \| w \| T, \forall T > 0$，则称它具有鲁棒 H_∞ 性能．

不失一般性，设 $\gamma = 1$．本文研究的问题是：对于对象(1)～(3)，寻找动态输出反馈控制律使闭环系

* 国家自然科学基金(69704004)和中国博士后科学基金资助项目．
本文于 1997 年 9 月 8 日收到．1998 年 9 月 8 日收到修改稿．

统具有鲁棒 H_∞ 性能.

2 主要结果(Main results)

文[5]给出了一个判断鲁棒渐近稳定和 L_2 增益有限的充分条件,并给出了一个问题可解的条件,但涉及的 LMI 所含未知数较多,下面给出一个较为简单的条件.

考虑如下的严格真控制器

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y, \\ u = C_c x. \end{cases} \tag{5}$$

由(1)~(3)与(5)组合而成的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_c = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}w + \bar{E}_1\bar{f}_1(x,t), \\ z = \bar{C}x + \bar{D}w + \bar{E}_2\bar{f}_2(x,t). \end{cases} \tag{6}$$

定义

$$\begin{cases} A: = A, \quad B_2: = B_2, \quad C_2: = C_2, \\ B_1: = [B_1 \quad 0 \quad 0 \quad \lambda_1 E_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\ D_{21}: = [D_{21} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \lambda_1 E_3 \quad 0 \quad 0], \\ C_1^{\mathrm{T}}: = \left[C_1^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{\lambda_1}W_1^{\mathrm{T}} \quad \frac{1}{\lambda_1}W_2^{\mathrm{T}} \quad \frac{1}{\lambda_2}W_2^{\mathrm{T}} \quad \frac{1}{\lambda_2}W_3^{\mathrm{T}} \right], \\ D_{12}^{\mathrm{T}}: = [D_{12}^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\ D: = \left[\begin{array}{c|cc|cc|cc} D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 E_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{cases} \tag{7}$$

定理 1 设

$$\begin{bmatrix} -I & D^{\mathrm{T}} \\ D & -I \end{bmatrix} < 1, \tag{8}$$

且存在 $R > 0, S > 0$ 满足

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0, \tag{9}$$

以及

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} C_2^{\mathrm{T}} \\ D_{21}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\perp} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} A^{\mathrm{T}}S + SA & SB_1 & C_1^{\mathrm{T}} \\ B_1^{\mathrm{T}}S & -I & D_{11}^{\mathrm{T}} \\ \hline C_1 & D_{11} & -I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} C_2^{\mathrm{T}} \\ D_{21}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\perp} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^{\mathrm{T}} < 0, \tag{10}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^{\perp} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} RA^{\mathrm{T}} + AR & RC_1^{\mathrm{T}} & B_1 \\ C_1 RS & -I & D_{11} \\ \hline B_1^{\mathrm{T}} & D_{11}^{\mathrm{T}} & -I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} B_2 \\ D^{12} \end{bmatrix}^{\perp} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^{\mathrm{T}} < 0, \tag{11}$$

则存在严格真 H_∞ 输出反馈控制器 Σ_c 使得闭环系统具有鲁棒 H_∞ 性能.

证 由文[5]可知,若

$$\begin{bmatrix} L_{110} - L_{120}\Delta L_{120}^{\mathrm{T}} & H^{\mathrm{T}} - L_{120}\Delta L_{210}^{\mathrm{T}} \\ H - L_{210}\Delta L_{120}^{\mathrm{T}} & L_{220} - L_{210}\Delta L_{210}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0, \tag{12}$$

则存在严格真 H_∞ 输出反馈控制器 Σ_c 使得闭环系统具有鲁棒 H_∞ 性能.

其中

$$L_{110}: = AR + RA^{\mathrm{T}} + B_2 G + G^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}},$$

$$L_{120}: = [B_1 \quad RC_1^{\mathrm{T}} + G^{\mathrm{T}} D_{12}^{\mathrm{T}}],$$

$$L_{220}: = SA + A^{\mathrm{T}}S + FC_2 + C_2^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}},$$

$$L_{210}: = [B_1^{\mathrm{T}} S + D_{21}^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}} \quad C_1^{\mathrm{T}}].$$

由文[6]引理 2(Finsler's 引理):

$$L_{110} - L_{120}\Delta L_{120}^{\mathrm{T}} < 0 \tag{13}$$

当且仅当(8)式与(11)式成立;

同理可证

$$L_{220} - L_{210}\Delta L_{210}^{\mathrm{T}} < 0 \tag{14}$$

成立,当且仅当(8)式与(10)式成立.

再取

$$H - L_{210}\Delta L_{210}^{\mathrm{T}} = 0, \tag{15}$$

我们便得到了一组 $R > 0, S > 0, G, F, H$ 和 $D_c = 0$ 满足(12),由文[5]的主要结果知本定理得证.

证毕.

可以得到如下的简单设计方法:

1) 求解 LMI(10),(11),(8),得到一对 $R > 0, S > 0$,参阅文献[6,7];

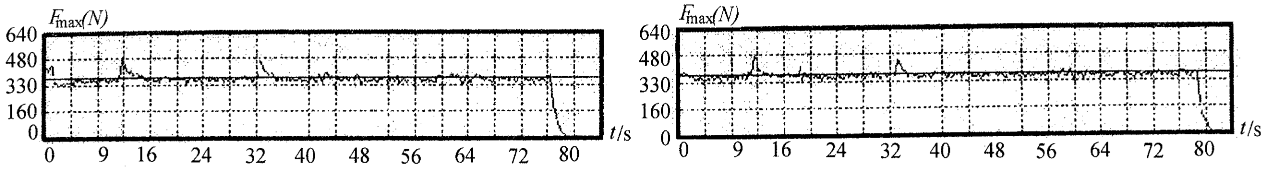
2) 分别求解 LMI(13),(14),得到 F, G(参阅文献[7]),利用(15)求得 H;

3) 对 $I - RS$ 进行 SVD 分解: $MN^{\mathrm{T}} = I - RS$,使 M, N 非奇异,利用文[7]的(22)式求 A_c, B_c, C_c.

3 结束语(Conclusion)

本文研究了一类具有非线性不确定性的动态系统的 H_∞ 控制器设计问题,基于矩阵不等式方法提出了鲁棒 H_∞ 控制器设计问题的可解条件,该条件归结到三个特殊的线性矩阵不等式(LMI),控制器的参数依赖于这些 LMI 的解,最后给出了可行的 H_∞ 控制器设计方法.

(下转第 624 页)



(a) 常规模糊控制器的最大铣削力响应曲线 (b) 神经元模糊控制器的最大铣削力响应曲线

图5 试验结果

Fig. 5 Experimental results

7 结论(Conclusion)

基于单个神经元的自适应模糊控制器具有算法简单、实时性好的特点,具有较强的自适应、自学习能力和较强的鲁棒性,对于象铣削加工过程这样复杂的被控对象也能取得优良的控制效果,具有良好的动态品质、稳态性能、响应快且平稳,因此,将会在机械切削加工过程控制及其它工业过程控制中有广阔的应用前景.

参考文献(References)

1 Lee C C. Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller, Part 1, Part 2, IEEE Trans. Syst., Man, and Cybern., 1990, 20(2): 404 – 434

2 李士勇等.模糊控制和智能控制理论与应用.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1990

3 焦李成.神经网络的应用与实现.西安:西安电子科技大学出版社,1993

本文作者简介

程 涛 1971年生.华中理工大学博士研究生.主要研究方向为先进制造,智能控制,分布式对象技术,信号检测及处理等.

左 静 女.1972年生.华中理工大学机械学院数控研究所硕士研究生.主要研究方向为数控技术,智能控制系统及虚拟制造等.

刘艳明 见本刊1999年第4期第610页.

杨叔子 1933年生.1956年毕业于华中工学院(现华中理工大学),现为华中理工大学机械学院教授,博士生导师,国家级有突出贡献专家,中科院院士.多年来,立足于机械工程,致力于新兴学科间交叉领域的研究与教学工作,特别是在先进制造技术,振动工程,设备诊断,信号处理,无损检测技术,人工智能的应用等方面取得一系列成果.

(上接第602页)

参考文献(References)

1 Xie I, Xie S and de Souza C E. H_∞ control of a class of uncertain nonlinear systems: an observer-based controller design. Proc. of IFAC'96, 1996, 323 – 326

2 Wang Y Y, Xie L and de Souza C. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. Syst. Contr. Lett., 1992, 19: 139 – 144

3 Xie L, Fu M and de Souza C. H_∞ control and quadratic stabilization for systems with parameter uncertainty via output feedback. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37(8): 1253 – 1256

4 Shen T and Tamura K. Robust H_∞ control of uncertain nonlinear systems via state feedback. IEEE Trans. Automat. Contr., 1995, 40(4): 766 – 768

5 郭雷,冯纯伯.一类不确定系统的鲁棒H_∞控制器设计.中国科学E辑,1998,28(1):53 – 58

6 Iwasaki T and Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. Automatica, 1994, 30(8): 1307 – 1317

7 Gahinet P. Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis. Automatica, 1996, 32(7): 1007 – 1014

本文作者简介

郭 雷 1966年生.东南大学自动化所博士后.研究方向为鲁棒控制与鲁棒滤波理论及其应用.

冯纯伯 见本刊1999年第1期第126页.