中子迁移方程的不连续有限元法的外推

林 群

（中国科学院系统科学研究所 · 北京，100080）

摘要：本文考虑中子迁移方程的分片常数有限元解在矩形剖分下的外推方法，结果使精度由一阶提到二阶．

关键词：中子迁移方程；分片常数有限元；矩形剖分；外推

The Extrapolation of Discrete Finite Elements for the Neutron Transport Equation

Lin Qun

(Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences · Beijing, 100080, P. R. China)

Abstract: We consider in this paper the extrapolation of piecewise constant finite element solution with the rectangular partition for the neutron transport equation. Such an extrapolation increases the accuracy from the first order to second order.

Key words: neutron transport equation; piecewise constant finite elements; rectangular partition; extrapolation

关肇直先生在 50 年代后几年，在中科院数学研究所举办了中子迁移方程的讨论班，并写出了一批论文．到了 1961 年后，他转向控制论．他原先的一些学生仍继续做下去．由于要出版纪念他的专辑，我来介绍一下我们小组（包括周爱辉、严宁宁、林甲富）最近在中子迁移方程方面所做的部分工作．我们要讨论的是中子迁移方程的有限元解法，特别是分片常数有限元解的误差展开式，它比一般的误差估计有更高的要求（关于误差展开式跟误差估计的关系，就象泰勒展开式跟微分中值公式的关系），因此我们一开始不把问题铺得太大，我们仅取中子迁移方程的一个简单模型：

$$\begin{cases} u_x + u_y + u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \Gamma_-. \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 假定为矩形区域，Γ_- 是由 Ω 的左边界及下边界组成（Γ^+ 则由 Ω 的右边界及上边界组成）．此外，假定解 $u \in H^3$.

1 准备知识

现在，将 Ω 剖分为若干矩形单元

$$e = [x_e - h_e, x_e + h_e] \times [y_e - k_e, y_e + k_e].$$

其中 (x_e, y_e) 为单元 e 的中心，$2h_e$ 和 $2k_e$ 分别为 e 的宽和长．取分片常数的有限元空间 W_h，其中元素 v 在每个单元 e 上是一个常数．在 W_h 上引入双线性型：

$$\begin{aligned} B(w,v) = &\sum_e \Big\{ \int_{y_e-k_e}^{y_e+k_e} [w(x_e + h_e - 0, y) \\ &\quad - w(x_e - h_e - 0, y)] v \mathrm{d}y \\ &\quad + \int_{x_e-h_e}^{x_e+h_e} [w(x, y_e + k_e - 0) \\ &\quad - w(x, y_e - k_e - 0) v \mathrm{d}x \Big\} \\ &+ \int_\Omega wv \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $v \in W_h$ 在 e 上为常数，w 只要使双线性型 $B(w,v)$ 有意义即可，它包括分片常数函数．特别，当 $w \in C^1$ 时，根据微积分基本定理，这个双线性型就回到对应于方程 (1) 的普通弱形式：

$$\begin{aligned} B(w,v) &= \sum_e \Big\{ \int_{y_e-k_e}^{y_e+k_e} \int_{x_e-h_e}^{x_e+h_e} w_x v \\ &\quad + \int_{x_e-h_e}^{x_e+h_e} \int_{y_e-k_e}^{y_e+k_e} w_y v \Big\} + \int_\Omega wv \\ &= \int_\Omega (w_x + w_y + w) v. \end{aligned} \tag{3}$$

因此，引入形式 (2) 的双线性型只是为了将普通形式 (3) 推广到对分片常数函数 $w \in W_h$ 也有意义．

(2) 中 $w(x-0,y)$ 和 $w(x,y-0)$ 即通常的单侧极限，例如 $w(x-0,y)=\lim\limits_{x\to x-0}w(x,y)$, 如不混淆，有时也记为 w_-.

容易计算，若 $v_-|_{\Gamma_-}=0$, 则 B 为正定：

$$\begin{aligned}B(v,v)=&2\sum_e\Big\{k_e[v(x_e+h_e,y_e+k_e)-v(x_e-h_e,y_e+k_e)]v(x_e+h_e,y_e+k_e)\\&+h_e[v(x_e+h_e,y_e+k_e)-v(x_e+h_e,y_e-k_e)]v(x_e+h_e,y_e+k_e)\Big\}+\int_\Omega v^2\\=&\sum_e\Big\{k_e[v(x_e+h_e,y_e+k_e)-v(x_e-h_e,y_e+k_e)]^2\\&+h_e[v(x_e+h_e,y_e+k_e)-v(x_e+h_e,y_e-k_e)]^2\Big\}+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_+}v_-^2\,\mathrm{d}y+\int_\Omega v^2.\end{aligned}\tag{4}$$

现在，定义方程 (1) 的分片常数有限元解 $u^h\in W_h$:

$$\begin{cases}B(u^h,v)=\displaystyle\int fv,\quad\forall v\in W_h,\\u_-^h|_{\Gamma_-}=0.\end{cases}$$

于是有　$B(u^h,v)=B(u,v),\quad\forall v\in W_h.$

2 渐进展开

为了讨论 u^h 和 u 之间的误差展开式，让我们退到 u^h 和 u^I 之间的误差展开式，其中 $u^I\in W_h$ 为 u 的某种分片常数插值. 根据 Lasaint-Raviart, u^I 在 e 上应选为 u 在右上角处的值：

$$u^I|_e=u(x_e+h_e,y_e+k_e),\quad u^I|_{\Gamma_-}=0.$$

那么，对于 $v\in W_h$,

$$\begin{aligned}&B(u^h-u^I,v)=B(u-u^I,v)\\=&\sum_e\Big\{\int_{y_e-k_e}^{y_e+k_e}([u(x_e+h_e,y)-u(x_e+h_e,y_e+k_e)]\\&-[u(x_e-h_e,y)-u(x_e-h_e,y_e+k_e)])v\mathrm{d}y\\&+\int_{x_e-h_e}^{x_e+h_e}([u(x,y_e+k_e)-u(x_e+h_e,y_e+k_e)]\\&-[u(x,y_e-k_e)-u(x_e+h_e,y_e-k_e)])v\mathrm{d}x\Big\}\\&+\sum_e\int_e(u-u^I)v.\end{aligned}$$

再利用微积分基本定理，上式第一个和项可以简化：

$$\begin{aligned}&B(u^h-u^I,v)\\=&\sum_e\Big\{\int_{y_e-k_e}^{y_e+k_e}\int_{x_e-h_e}^{x_e+h_e}[u_x(x,y)-u_x(x,y_e+k_e)]v\\&+\int_{x_e-h_e}^{x_e+h_e}\int_{y_e-k_e}^{y_e+k_e}[u_y(x,y)-u_y(x_e+h_e,y)]v\Big\}\\&+\sum_e\int_e(u-u^I)v.\end{aligned}$$

依泰勒公式，又将上式第一个和号内的积分展开为

$$\int_e u_{xy}(x,y)(y-y_e-k_e)v+\int_e u_{yx}(x,y)(x-x_e-h_e)v+O(h^2)\|u\|_{3,e}\|v\|_{0,e}.$$

其中 $h=\max(h_e,k_e)$, 前两项又可以改写为

$$-k_e\int_e u_{xy}(x,y)v-h_e\int_e u_{yx}(x,y)v+\int_e u_{xy}(x,y)F'(y)v+\int_e u_{yx}(x,y)E'(x)v.$$

其中

$$F(y)=\frac{1}{2}[(y-y_e)^2-k_e^2],$$
$$E(x)=\frac{1}{2}[(x-x_e)^2-h_e^2].$$

由于 $F(y)$ 在 e 的上下边为 0,$E(x)$ 在 e 的左右边为 0, 因此，分部积分后，后两项为二阶小量：

$$-\int_e u_{xyy}Fv-\int_e u_{yxx}Ev=O(h^2)\|u\|_{3,e}\|v\|_{0,e}.$$

此外，

$$\begin{aligned}\int_e(u-u^I)v=&\int_e[u(x,y)-u(x_e+h_e,y_e+k_e)]v\\=&\int_e[u_x(x,y)(x-x_e-h_e)\\&+u_y(x,y)(y-y_e-k_e)]v\\&+O(h^2)\|u\|_{2,e}\|v\|_{0,e}.\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\int_e u_x(x,y)(x-x_e-h_e)v\\=&-\int_e h_eu_xv+\int_e u_xE'v\\=&-\int_e h_eu_xv+\int_e u_{xx}Ev\\=&-\int_e h_eu_xv+O(h^2)\|u\|_{2,e}\|v\|_{0,e}\end{aligned}$$

等，所以

$$\int_e (u-u^I)v$$
$$= \quad -\int_e (h_e u_x + k_e u_y)v + O(h^2) \parallel u \parallel_{2,e} \parallel v \parallel_{0,e}.$$

最终结果简化为：

$$B(u^h - u^I, v)$$
$$= -\sum_e [(h_e + k_e)\int_e u_{xy}v + \int_e (h_e u_x + k_e u_y)v]$$
$$+ O(h^2) \parallel u \parallel_3 \parallel v \parallel_0. \tag{5}$$

为简明（但非必要），下面假设有限元剖分是均匀的： $h_e = k_e = h$. 上式右边的和项能否改写成双线性型 B 的形式呢？为此，令 w 为方程

$$\begin{cases} w_x + w_y + w = -(2u_{xy} + u_x + u_y), & \text{in } \Omega, \\ w = 0, & \text{on } \Gamma_- \end{cases}$$

的解，以及相应的分片常数有限元解 $w^h \in W_h$:

$$\begin{cases} B(w^h, v) = -\int_\Omega (2u_{xy} + u_x + u_y)v, & \forall v \in W_h, \\ w_-^h|_{\Gamma_-} = 0. \end{cases}$$

由 (5) 得

$$B(u^h - u^I, v) = hB(w^h, v) + O(h^2) \parallel u \parallel_3 \parallel v \parallel_0.$$

令 $v = u^h - u^I - hw^h$, 由 (4) 得

$$\parallel u^h - u^I - hw^h \parallel_0 \le ch^2 \parallel u \parallel_3. \tag{6}$$

由于在 (5) 中直接取 $v = u^h - u^I$ 时，可得

$$\parallel u^h - u^I \parallel_0 \le ch \parallel u \parallel_2. \tag{7}$$

因此，有

$$\begin{aligned} \parallel w^h - w^I \parallel_0 &\le ch \parallel w \parallel_2 \\ &\le ch \parallel 2u_{xy} + u_x + u_y \parallel_1 \\ &\le ch \parallel u \parallel_3. \end{aligned}$$

联合 (6) 又得

$$\parallel u^h - u^I - hw^I \parallel_0 \le ch^2 \parallel u \parallel_3. \tag{8}$$

3 外推

现在，在原有四个单元拼成的一个大单元 (尺度为 $2h$) 上，定义一个双一次插值 $I_{2h}u$, 它由右上角小单元的四个顶点上 u 的值所决定，则有：

$$I_{2h}u^I = I_{2h}u, \quad I_{2h}w^I = I_{2h}w$$

以及 L_2 估计

$$\begin{aligned} & I_{2h}u^h - u - hw \\ = \;& I_{2h}(u^h - u^I - hw^I) + I_{2h}(u^I + hw^I) - u - hw \\ = \;& O(h^2) + (I_{2h}u - u) + h(I_{2h}w - w) \\ = \;& O(h^2). \end{aligned}$$

现在，再外推，即得二阶精度：

$$\parallel 2I_h u^{h/2} - I_{2h}u^h - u \parallel_0 \le ch^2 \parallel u \parallel_3. \tag{9}$$

4 副产品

由 (7) 可得通常的误差估计

$$\parallel u^h - u \parallel_0 \le ch \parallel u \parallel_2.$$

由 (4) 、 (5) 及 (7) 以及 u^I 的定义，有

$$\begin{aligned} \sum_e \Big\{ & k_e\big[(u^h - u)(x_e + h_e, y_e + k_e) \\ & - (u^h - u)(x_e - h_e, y_e + k_e)\big]^2 \\ & + h_e\big[(u^h - u)(x_e + h_e, y_e + k_e) \\ & - (u^h - u)(x_e + h_e, y_e - k_e)\big]^2 \Big\} \\ \le & ch^2 \parallel u \parallel_2^2, \end{aligned}$$

因此，还有导数超逼近：

$$\begin{aligned} & \sum_e 4h_e k_e \cdot \\ & \Big\{ \Big[\frac{u^h(x_e + h_e, y_e + k_e) - u^h(x_e - h_e, y_e + k_e)}{2h_e} \\ & - u_x(x_e, y_e + k_e)\Big]^2 \\ & + \Big[\frac{u^h(x_e + h_e, y_e + k_e) - u^h(x_e + h_e, y_e - k_e)}{2k_e} \\ & - u_y(x_e + h_e, y_e)\Big]^2 \Big\} \\ & \le ch\|u\|_2^2. \end{aligned} \tag{10}$$

5 结论

对于中子迁移方程的分片常数有限元解 u^h, 在矩形剖分下，有渐近展开式 (8) 以及外推公式 (9). 作为副产品，还得到导数的超逼近 (10).

6 其它

对于方程 (1) 的不连续分片线性有限元解，在均匀矩形剖分下，也有渐进展开式. 林甲富等已经证明：展式的首项，无需外推，即已达到 $h^{2.5}$ 阶. 这可能比分片常数有限元解的外推更有兴趣.