弹性振动系统的控制 *

冯德兴

（中国科学院系统科学研究所系统控制实验室 · 北京，100080）

摘要：文中叙述了作者近年来从事和关心的弹性梁振动反馈控制方面的某些问题，以此作为对关肇直先生诞辰 80 周年的纪念.

关键词：弹性振动；反馈控制；分布控制；边界控制；渐近稳定性；指数稳定性.

Control of Elastic Vibration Systems

Feng Dexing

(Laboratory of Systems Control, Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences · Beijing, 100080, P. R. China)

Abstract: Some repects of the feedback stabilization, distributed and boundary, for elastic beam vibration are presented, which are engaged in by the author in recent years, in memory of the eightieth birthday of Professor Kwan Chao-Chih.

Key words: elastic vibration; feedback control; distributed control; boundary control; asymptotic stability; exponential stability

1 弹性梁的分布反馈控制 (一)

关肇直先生生前十分重视弹性振动控制理论研究，花费了很大精力，并得到了很多有意义的结果，见 [1,2,3]. 因为导弹、火箭等细长飞行器在飞行过程中产生的振动会危及整个系统的安全，因此如何抑制振动是一个十分重要的理论和实际应用问题. 文 [1] 中把细长体飞行器简化成弹性梁的 Euler-Bernoulli 模型，考虑了如下分布形式反馈控制方案：

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) + EI\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) = -b(x)u(t), \\ u(t) = \displaystyle\int_0^\ell g(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\mathrm{d}x, \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 y 是长为 ℓ 的弹性梁的横向偏离，ρ 和 EI 分别是梁的线密度和刚度系数，$b(x)$ 和 $g(x)$ 分别是控制器和观测器的位置函数. (1.1) 可以看作是点控制和点观测的某种近似. 文 [1] 及相关的文献 [2,4~6] 建立了这一类分布式反馈控制器的近似能控性及相应的渐近稳定性理论.

在研究过程中把 (1.1) 写成函数空间 $H = L^2(0,\ell)$ 中的发展方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + Ay + \langle Py(t), g\rangle b = 0, \tag{1.2}$$

这里 A 是 (1.1) 的弹性振动主算子，带有适当的边界条件，如两端简支等，从而 A 是 H 中的正定自伴算子，P 是关于空间变量 x 的一阶偏微分算子，b 和 g 是 H 中的元. 关于闭环系统 (1.1) 的稳定性的主要结论是 (见 [1])

定理 1.1 设 A 是 H 中的正定自伴算子，并假定 $D(A^{1/2}) \subset D(P)$. 设 $\{\varphi_n \mid n \geq 1\}$ 是算子 A 的完整的正交规格化本征函数组. 令

$$b_n = \int_0^\ell b(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x, \quad \forall n \geq 1,$$

$$g_n = \int_0^\ell g(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x, \quad \forall n \geq 1.$$

如果 h 和 g 满足 $b_n g_n > 0$, 则闭环系统 (1.1) 是渐近稳定的.

在该定理中，关于 $D(A^{1/2}) \subset D(P)$ 并未验证，而只作假定. 显然，对于上述具体的弹性振动系统，这个条件必须要成立. 实际上，这个条件在 [7] 中得到了证实.

还应指出的是，关先生早在 60 年代就对结构阻尼振动模型进行了定性研究 (见 [3])，国外直到 80 年代才开始重视这一模型的研究.

2 弹性梁的边界反馈控制

在实现弹性系统的控制中，也许边界控制比起

* 国家攀登计划项目.

分布控制来更容易一些，更何况上一节中提出的分布反馈控制方案仅能使闭环系统渐近稳定，而无法达到人们更希望有的指数稳定的目标. 因此在 80 年代人们给予边界控制极大的注意. 在这方面首先得到的重要的结果可见 [8,9], 这里研究了 Euler-Bernoulli 梁的边界力和力矩反馈控制方案：

$$\begin{cases} \rho\ddot{y}(x,t) + EIy''''(x,t) = 0, \\ y(0,t) = y'(0,t) = 0, \\ EIy''(\ell,t) = \alpha\dot{y}'(\ell,t), \\ -EIy''(\ell,t) = \beta\dot{y}(\ell,t), \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 α, β 为正的反馈常数.

注意系统 (2.1) 的能量 $E(t)$ 可以写成

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell EI|y''(x,t)|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\ell \rho|\dot{y}(x,t)|^2\mathrm{d}x,$$

这里及今后我们用撇和点分别表示相对于空间变量和时间变量的偏导数.

[8,9] 中的主要结论是：

定理 2.1 系统 (2.1) 的能量是指数衰减的，即存在正的常数 M 和 ω 使得

$$E(t) \le ME(0)\mathrm{e}^{-\omega t}, \quad \forall t \ge 0,$$

其中

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_0^\ell EI|y_0''(x)|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\ell \rho|\dot{y}_1(x)|^2\mathrm{d}x,$$

而 $y_0(x) = y(x,0)$, $y_1(x) = \dot{y}(x,0)$.

一些作者还考虑了更一般的非线性耗散边界控制：

$$EIy''(\ell,t) \in f(\dot{y}'(\ell,t)), \quad -EIy'''(\ell,t) \in g(\dot{y}(\ell,t)),$$

这里 f 和 g 是 R→R 的多值单调函数，并得到了相应闭环系统渐近或指数稳定的结果. 详细可参阅 [9~11].

3 Timoshenko 梁的边界反馈控制

当梁的截面与其长度之比不能忽略时，就必须考虑梁的转动惯量的影响，从而要用所谓的 Rayleigh 梁模型. 进而若梁的剪切引起的位移也不能忽略，则需要考虑这种剪切的影响，从而要采用更精细的所谓的 Timoshenko 梁模型. 一端简支一端自由的 Timoshenko 梁方程如下：

$$\begin{cases} \rho\ddot{w} - K\big(w'' - \varphi'\big) = 0, \\ I_\rho\ddot{\varphi} - EI\varphi'' - K\big(w' - \varphi\big) = 0, \\ w(0,t) = w(0,t) = 0, \\ K(\varphi(\ell,t) - w'(\ell,t)) = u_1(t), \\ -EI\varphi'(\ell,t) = u_2(t), \end{cases} \tag{3.1}$$

这里 K 是梁的剪切模量， I_ρ 是质量惯量矩， w 和 φ 分别为梁的横向偏离和扭转角，详见 [13]. (3.1) 中的 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 表示在端点 $x = \ell$ 所施加的控制力和力矩.

[15] 中采用了与 Euler-Bernoulli 梁相似的线性反馈控制：

$$\begin{cases} u_1(t) = \alpha\dot{w}(\ell,t), \\ u_2(t) = \beta\dot{\varphi}(\ell,t), \end{cases} \tag{3.2}$$

这里 α 和 β 为适当的增益常数.

Timoshenko 梁系统 (3.1) 的能量为

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell K|w' - \varphi|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\ell EI|\varphi'|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\ell \rho|\dot{y}|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\ell I_\rho|\dot{\varphi}|^2\mathrm{d}x.$$

[15] 中证明了 Timoshenko 梁振动系统的能量在边界反馈控制 (3.2) 之下是指数衰减的：

定理 3.1 对于 Timoshenko 梁，闭环系统 (3.1),(3.2) 的能量 $E(t)$ 是指数衰减的，即存在正的常数 M 和 ω 使得

$$E(t) \le ME(0)\mathrm{e}^{-\omega t}, \quad \forall t \ge 0.$$

在 [18,19] 中对于 Timoshenko 梁模型，考虑了更一般非线性耗散边界反馈镇定：

$$\begin{cases} K(\varphi(\ell,t) - w'(\ell,t)) \in f(\dot{w}(\ell,t)), \\ -EI\varphi'(\ell,t) \in g(\dot{\varphi}(\ell,t)). \end{cases} \tag{3.3}$$

其中 f 和 g 是 R 中的极大单调函数 (可能多值). 假定 $f = \alpha h$, $g = \beta h$,α, β 为正常数，而 $h : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 是如下形式的非线性单调增函数：

$$h(\xi) = \begin{cases} |\xi|^p \mathrm{sgn}\xi, & |\xi| \le 1, \\ \xi, & |\xi| > 1, \end{cases} \tag{3.4}$$

$1 \le p < \infty$. 这样，对于大的信号，反馈仍然是线性的. [18] 中证明了

定理 3.2 设非线性函数 h 由 (3.3) 给出， $E(t)$ 为闭环系统 (3.1), (3.3) 的能量. 那么存在正常数 T_0, c_1, c_2, c_3, 使得当 $t \ge T_0$ 时有

1) 当 $1 \le p < 3$ 时， $E(t) \le c_1 t^{-1}$;

2) 当 $p = 3$ 时， $E(t) \le c_2 t^{-1}\log t$;

3) 当 $p > 3$ 时， $E(t) \le c_3 t^{-\frac{2}{p-1}}$.

[19] 中证明了

定理 3.3 假定非线性函数 f 和 g 满足

$$\begin{cases} f(0) = g(0) = \{0\}, \\ 0 \notin f(\xi) \bigcup g(\xi), \quad \forall \xi \ne 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

那么闭环系统 (3.1)(3.1) 是渐近稳定性的.

为了得到闭环系统 (3.1)(3.3) 的指数稳定性，假定非线性函数 $f=f_1$, $g=f_2$ 连续非降，并且存在两个常数 $p,q,p\ge q,pq\le 1,0<q\le 1$, 使得

$$\begin{cases} c_1|\xi|^{p+1}\le \xi f_i(\xi)\le c_2^{1+q}|\xi|^{q+1}, & |\xi|\le 1,\\ c_1|\xi|^2\le \xi f_i(\xi)\le c_2^{1+q}|\xi|^2, & |\xi|\ge 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

[19] 中还证明了

定理 3.4 假定 (3.6) 成立， $E(t)$ 为闭环系统 (3.1)(3.3) 的能量，那么存在正常数 M,T_0,ω, 使得

1) 如果 $q<1$, 则

$$E(t)\le ME(0)t^{-\frac{1}{r}},\quad \forall t>T_0,$$

其中 $r=\dfrac{1-q}{2q}>0$;

2) 如果 $q=1$, 则

$$E(t)\le ME(0)\mathrm{e}^{-\omega t},\quad \forall t\ge 0,$$

这里的常数 ω 与初始数据无关.

4 弹性梁的分布反馈控制 (二)

近年来，从大型柔性结构的测量装置和抑制振动的阻尼到结构声学中的噪音控制器，智能材料作为传感器和执行机构的应用已得到蓬勃发展，并且由于其多是分布作用，在多数控制策略的运用中不存在计算溢出问题，这使它作为执行机构的作用显得更为突出. 这种材料还同时具有价廉、重量轻、易成型并可粘贴到各式各样的曲面上或嵌入到其他材料中的优点，使它能在不显著影响系统的动态性质的前提下用到量测与控制中去. 当智能材料被用来在大型柔性结构控制中作为局部分布阻尼来镇定系统时，为了获得最优配置 (最佳放置位置) 结果，往往需要知道系统能量指数衰减速率与系统参数之间的定量关系. 获得这一定量关系的一个重要途径便是研究此时的闭环系统是否满足所谓的谱确定增长假设，即系统的最优能量衰减速率等于系统谱 (本征值) 实部的上确界. 这是分布参数系统稳定性理论研究中受到普遍关注的一个问题. 关于均质梁方程的谱分析已有许多工作，但关于非均质梁 (变系数) 最优能量衰减指数方面的结果却很少，主要困难在于此时系统的特征方程 (或豫解算子) 无显式表达可用 .[20] 用隐函数理论和基扰动理论研究了 Euler-Bernoulli 梁在小增益速度反馈控制下闭环系统特征元构成状态空间的 Riesz 基. 受 [21,22] 工作的启示，文 [23] 获得了对带有粘性阻尼的均质 Rayleigh 梁最优能量衰减速率的结果，并且还证明了 系统的本征元组成状态空间中的一个 Riesz 基. 文 [27] 研究了端点带重物的柔性梁的最优能量指数衰减问题，证明了对几乎所有的正反馈常数，闭环系统的谱确定增长假设成立.

最近，文 [24] 中考虑了带局部分布 Kelvin-Voigt 阻尼的 Euler-Bernoulli 梁的稳定性，在频域内运用乘子技巧，证明了梁的横向振动是依指数衰减的.

文 [25] 中研究了如下形式的 Euler-Bernoulli 梁的局部分布阻尼模型：

$$\rho\ddot{y}(x,t)+EIy''''(x,t)+b(x)\dot{y}(x,t)=0, \tag{4.1}$$

这里的函数 $b(\cdot)\in C([0,\ell])$, $b(x)\ge 0$, 并且存在实数 c 和 d 使得 $[c,d]\subset[0,\ell]$, 而 $b(x)>0\ \forall x\in[c,d]$, $b(x)=0\ \forall x\notin[c,d]$. [25] 中证明了

定理 4.1 在上面的假定下，系统 (4.1) 是指数稳定的，即存在正的常数 M 和 ω 使得

$$E(t)\le ME(0)\mathrm{e}^{-\omega t},\quad \forall t\ge 0,$$

其中 $E(t)$ 是系统 (4.1) 的能量.

文 [28] 考虑了非均质 Timoshenko 梁的局部分布反馈控制：

$$\begin{cases} \rho\ddot{w}-\big(K(w'-\varphi)\big)'+\rho b_1(x)\dot{w}=0,\\ I_\rho\ddot{v}p-(EI\varphi')'-K\big(w'-\varphi\big)+I_\rho b_2(x)\dot{\varphi}=0,\\ w(0,t)=w(0,t)=0,\\ K(\varphi(\ell,t)-w'(\ell,t))=0,\\ -EI\varphi'(\ell,t)=0, \end{cases} \tag{4.2}$$

这里的分布控制器位置函数 b_1 和 b_2 满足

$$\begin{cases} b_k(x)=0,\ \ \forall x\notin[a,b]\subset[0,\ell],\\ b_k(x)\ge 0,\ \ \forall x\in[a,b],\\ b_k(x)>0,\ \ \forall x\in[c,d]\subset[a,b]. \end{cases} \tag{4.3}$$

首先设法把 (4.2) 写成某函数空间中的发展方程. 为此令 $\mathcal{H}=V_0^1\times L^2_\rho(0,\ell)\times V_0^1\times L^2_{I_\rho}(0,\ell)$, 这里

$$V_0^k=\{\varphi\in H^k(0,\ell)\mid \varphi(0)=0\},\quad \forall k=1,2.$$

对于 $Y_k=[w_k,z_k,\varphi_k,\psi_k]^\tau$, $k=1,2$, 定义内积

$$(Y_1,Y_2)_{\mathcal{H}}=\int_0^\ell K(\varphi_1-w_1')(\varphi_2-w_2')\mathrm{d}x+\int_0^\ell EI\varphi_1'\varphi_2'\mathrm{d}x+\int_0^\ell \rho z_1z_2\mathrm{d}x+\int_0^\ell I_\rho\psi_1\psi_2\mathrm{d}x.$$

然后在 $\mathcal{H}$ 中定义线性算子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} w \\ z \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ (K(w'-\varphi))'/\rho \\ \psi \\ (EI\varphi')'/I_\rho + K(w'-\varphi)/I_\rho \end{pmatrix},$$

$$\forall \begin{pmatrix} w \\ z \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{A}) &= \{[w,z,\varphi,\psi]^\tau \in \mathcal{H} \mid w,\varphi \in V_0^2, \\ &\quad z,\psi \in V_0^1,\ \varphi(\ell) = w'(\ell), \varphi'(\ell) = 0\},\end{aligned}$$

$$\mathcal{B}\begin{pmatrix} w \\ z \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b_1 z \\ 0 \\ -b_2\psi \end{pmatrix},\ \forall \begin{pmatrix} w \\ z \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{H}.$$

于是系统 (4.2) 可以改写成 $\mathcal{H}$ 中的线性发展方程:

$$\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{A}Y(t), \tag{4.4}$$

其中 $Y(t) = [w(\cdot,t), \dot{w}(\cdot,t), \varphi(\cdot,t), \dot{\varphi}(\cdot,t)]^\tau$.

文 [28] 中证明了

定理 4.2 假定 (4.3) 成立, 并且 $b_k \in L^\infty(0,\ell)$, $k=1,2$, 那么闭环系统 (4.2) 是指数稳定的, 即系统 (4.2) 的能量随时间指数衰减到零.

在 [28] 中则对系统 (4.2) 的谱和衰减指数作了更精细的刻划. 为此引进两个波速的倒数:

$$\rho_1(x) = \left(\sqrt{K(x)/\rho(x)}\right)^{-1},$$

$$\rho_2(x) = \left(\sqrt{EI(x)/I_\rho(x)}\right)^{-1}.$$

定理 4.3 假定 $\rho(\cdot)$, $I_\rho(\cdot)$, $K(\cdot)$, $EI(\cdot)$ 是 $C^1([0.\ell])$ 中的正函数, 并且 (4.3) 成立. 设梁的两个波速不相等, 即 $\rho_1(x) \neq \rho_2(x), \forall x \in [0,\ell]$, 那么

1) 对于闭环系统 (4.2), 谱确定增长假设成立, 即 $s(\mathcal{A}_1) = \omega(\mathcal{A}_1)$, 其中

$$\begin{cases} s(\mathcal{A}_1) = \{\mathrm{Re}\,\lambda \mid \lambda \in \sigma(\mathcal{A}_1)\}, \\ \omega(\mathcal{A}_1) = \sup\{\gamma \in \mathrm{R} \mid \exists M_\gamma \geq 1,\ \text{使得} \\ \qquad \|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\gamma t},\ \ \forall t \geq 0\}, \end{cases}$$

这里 $T(t)$ 是 $\mathcal{A}_1$ 生成的 C_0 线性算子半群;

2) 系统 (4.2) 指数稳定, 即由 $\mathcal{A}_1$ 生成的 C_0 线性算子半群 $T(t)$ 是指数稳定的, 换句话说, $\exists M \geq 1, \omega > 0$, 使得

$$\|T(t)Y_0\| \leq M\|Y_0\|\mathrm{e}^{-\omega t},\ \ \forall t \geq 0,$$

这里 $Y_0 = [w_0, w_1, \varphi_0, \varphi_1]^\tau$ 是系统 (4.2) 的初始条件, $w_0(x) = w(x,0)$, $w_1(x) = \dot{w}(x,0)$,$\varphi_0(x) = \varphi(x,0)$, $\varphi_1(x) = \dot{\varphi}(x,0)$.

在 [28] 中利用 Birkhoff 渐近展开方法, 还得出了系统 (4.2) 的谱的渐近分布. 对于自然数 n, 令

$$\lambda_{nj} = -\frac{1}{2}\left[\int_0^\ell \rho_k b_k \mathrm{d}x - i(2n+1)\pi\right]\left(\int_0^\ell \rho_k \mathrm{d}x\right)^{-1}, \quad j = 1,2.$$

定理 4.4 假定定理 4.3 的条件成立, 并且

$$\int_0^\ell \rho_1 b_1 \mathrm{d}x \int_0^\ell \rho_2 \mathrm{d}x \neq \int_0^\ell \rho_2 b_2 \mathrm{d}x \int_0^\ell \rho_1 \mathrm{d}x.$$

设 λ 是 $\mathcal{A}_1$ 的本征值. 那么当 $|\lambda|$ 很大时, 存在某个自然数 n, 使得

$$|\lambda - \lambda_{nk}| < 1/\sqrt{n},\ \ k = 1 \text{ 或 } 2,$$

其中 n 仅依赖于 λ. 这样当 n 很大时 λ 可以写成

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left[\int_0^\ell \rho_k b_k dx - i(2n+1)\pi\right]\left(\int_0^\ell \rho_k dx\right)^{-1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ \ k = 1 \text{ 或 } 2.$$

5 旋转梁的反馈控制

近年来有大量文献讨论柔性机械臂的控制问题. 文 [30] 提出了所谓直接应变反馈控制方法, 这种控制方法克服了有穷维近似控制器难于实现并且有控制溢出等的限制. 此外, 它还能在末端负载变化和其它不确定因素下确保系统稳定. 但在实际中当末端负载变化很大时, 这种控制器的控制效果并不令人满意. 为此在 [31] 中提出了自适应调节反馈增益控制策略, 即不把应变反馈增益作为常数处理, 而是随着系统的变化自适应地调节增益. 这种控制策略实验结果比较满意. 文 [32] 从理论上证明了这种适应应变增益反馈控制可使闭环系统指数稳定. 上述理论分析是建立在 Euler-Bernoulli 梁振动方程基础上的. 自然要问, 这样的控制策略对于 Timoshenko 梁模型是否仍然有效. 文 [33] 考虑如下旋转 Timoshenko 梁方程:

$$\begin{cases} \rho\ddot{w} - (w'' - \varphi') + \rho\ddot{\theta} = 0, \\ I_\rho\ddot{\varphi} - EI\varphi'' - K(w'-\varphi) + I_\rho\ddot{\theta} = 0, \\ w(0,t) = w(0,t) = 0, \\ K(\varphi(\ell,t) - w'(\ell,t)) = 0, \\ -EI\varphi'(\ell,t) = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

这里长为 ℓ 的梁在 w-x 平面内旋转， $\theta(t)$ 为旋转角. 假定取如下的反馈控制方案：

$$\begin{cases}\dot{\theta}(t)=\xi(t)\varphi'(0,t),\\ \dot{\xi}(t)=\alpha\varphi'^2(0,t),\\ \xi(0)=\xi_0\geq 0,\end{cases} \tag{5.2}$$

其中 α 是正常数. 今把闭环系统 (5.1)(5.2) 写成某个函数空间中的发展方程. 为此定义乘积 Hilbert 空间 $\mathcal{H}=V_0^1\times L_\rho^2(0,\ell)\times V_0^1\times L_{I_\rho}^2(0,\ell)\times\mathrm{R}$. $\mathcal{H}$ 中的内积为

$$\begin{aligned}\Big(Y_1,Y_2\Big)_{\mathcal{H}}=&\int_0^\ell K(\varphi_1-w_1')(\varphi_2-w_2')\,\mathrm{d}x\\&+\int_0^\ell EI\varphi_1'\varphi_2'\,\mathrm{d}x+\int_0^\ell\rho z_1z_2\,\mathrm{d}x\\&+\int_0^\ell I_\rho\psi_1\psi_2\,\mathrm{d}x+\frac{EI}{2\alpha}\xi_1\xi_2,\end{aligned}$$

这里 $Y_k=[w_k,z_k,\varphi_k,\psi_k,\xi_k]^\tau\in\mathcal{H},\quad k=1,2$. 然后定义 $\mathcal{H}$ 中的非线性算子 $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix}w\\z\\\varphi\\\psi\\\xi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z-x\xi\varphi'(0)\\-\frac{K}{\rho}(\varphi'-w'')\\\psi-\xi\varphi'(0)\\\frac{EI}{I_\rho}\varphi''-\frac{K}{I_\rho}(\varphi-w')\\\alpha\varphi'^2(0)\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}w\\z\\\varphi\\\psi\\\xi\end{bmatrix}\in\mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{A})\ =\ &\Big\{[w,z,\varphi,\psi,\xi]^\tau\in\mathcal{H}^+\ \Big|\ w,\varphi\in V_0^2,\\&z\in V_0^1,\psi\in\mathcal{H}^1(0,\ell),\,\psi(0)=\xi\varphi'(0),\\&\varphi'(\ell)=0,\ \varphi(\ell)=w'(\ell)\Big\},\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{H}^+=V_0^1\times L_\rho^2(0,\ell)\times V_0^1\times L_{I_\rho}^2(0,\ell)\times\mathrm{R}^+$ 是 $\mathcal{H}$ 中的闭凸集. 现在我们可以把 (5.1)(5.2) 写成 $\mathcal{H}$ 中的非线性发展方程：

$$\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}=\mathcal{A}Y(t),$$

其中 $Y(t)=[w(x,t),\dot{w}(x,t)+x\xi\varphi'(0,t),\varphi(x,t),\dot{\varphi}(x,t)+\xi\varphi'(0,t),\xi(t)]^\tau$.

这样， $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{H}$ 中一单调算子，并且生成 $\mathcal{H}$ 中的某个强连续非线性压缩半群.

[33] 中用反例指出，对于 Timoshenko 梁，仅在梁的根部施加适应增益反馈控制，闭环系统甚至可以不再是渐近稳定的，更不用说指数稳定了.

理论分析表明，对于 Euler-Bernoulli 梁适用的控制方案，对于 Timoshenko 梁几乎也都是有效的. 但 Euler-Bernoulli 梁和 Timoshenko 梁之间应该是有区别的. 上面得出的结论正好表明了这两种梁模型之间的差异. [33] 中通过对梁末端施加额外的控制，得到了相应闭环系统指数稳定的结果.

对于 Euler-Bernoulli 梁的边界控制系统 (2.1), α 和 β 中只要有一个是正数，就能保证闭环系统 (2.1) 的指数稳定性. 但是对于 Timoshenko 梁边界控制方程 (3.1) 和 (3.2), 情况就不一样了. 可以证明，当 α 和 β 中有一个等于 0 时，在某些条件下相应的闭环系统甚至也可以不渐近稳定.

参考文献

1 Kwan Chao-Chih and Wang Kang-Ning. Sur la stabilisation de la vibration èlastique. Scientia Sinica, 1974, 17: 446–467

2 Kwan Chao-Chih and Wang Kang-Ning. Sur la stabilisation de la vibration èlastique (III). Scientia Sinica, 1976, 19: 323–346

3 关肇直. 关于自由梁的运动方程. 关肇直文集，北京：科学出版社， 1986

4 Song Jian and Yu Jing-Yuan. On the theory of distributed parameter systems with ordinary feedback controller. Scientia Sinica, 1975, 18: 281–310

5 宋健，于景元，朱广田，毕大川. 细长飞行器自动驾驶仪设计的分布参数系统理论. 宇航学报， 1980, 3: 1–20

6 Feng De-Xing and Zhu Guang-Tian. On stabilization and pole assignment of elastic vibration system. Scientia Sinica, 1982, 25(5): 549–560

7 Yao Peng-Fei and Feng De-Xing, Structure for nonnagative square roots of unbounded nonnagative self-adjoint operators in Hilbert spaces, Quarterly of Applied Mathematics, 1996, 65(3): 457–473

8 Chen G et al. The Euler-Bernoulli beam equation with boundary energy dissipation. Operator Methods for Optimal Control Problems, Lee S J ed., Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series, New York: Marcel Dekker Inc., 1987, 67–96

9 Chen G et al. Modeling, stabilization and control of serially connected beams. SIAM J. Control & Optimization, 1987, 25: 526–546

10 Feng De-Xing and Zhang Wei-Tao. Feedback stabilization of Euler-Bernoulli beam. Acta Automation Sinica, 1996, 22(2): 135–144

11 Lasiecka I. Stabilization of wave and plate-like equations with nonlinear dissipation on the boundary. J. Diff. Eqs., 1989, 79: 340–381

12 Chen G. Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain. J. Math. Pures et Appl., 1979, 58: 249

13 Russell D L. Mathematical models for the elastic beam and their control-theoretic implications. in Semigroups, Theory and Applications, Vol 2, Brezis H, Crandall H G and Kapell F., eds, Essex, England: Longman, 1986, 177–217

14 Huang Fa-Lun. Characteristic conditions for exponential

stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. Ann. of Diff. Eqs., 1985, 1(1): 43–53

15 Kim J U and Renardy Y. Boundary control of the Timoshenko beam. SIAM J. Control & Optimization, 1987, 25: 1417–1429

16 Luo Zheng-Hua and Guo Bao-Zhu. Shear force feedback control of a single-link flexible robot with a revolute joint. IEEE Trans. Automat. Contr., 1997, 42: 53–65

17 Ömer Morgül. Boundary control of a Timoshenko beam attached to a rigid body: planar motion. Int. J. Control, 1991, 54: 763–761

18 Feng De-Xing and Zhang Wei-Tao. Nonlinear Feedback control of Timoshenko beam. Science in China, Series A, 1995, 38: 918–927

19 Feng De-Xing, Shi Dong-Hua and Zhang Wei-Tao. Boundary feedback stabilization of Timoshenko beam with boundary dissipation Science in China, Series A, 1998, 41(5): 484–490.

20 Conrad F. Stabilization of beams by pointwise feedback control. SIAM J. Control Optim., 1990, 28: 423–437

21 Cox S and Zuazua E. The rate at which energy decays in a damped string. Commun in PDE, 1994, 19: 213–244

22 Cox S and Zuazua E. The rate at which energy decays in a string damped at one end. Indiana Univ. Math. J., 44: 507–535

23 Rao B P. Optimal energy decay rate in a damped Rayleigh beam. Contampory Mathematics, S. Cox and Lasiecka I. eds, 1997, 20(9): 221–229

24 Liu Kang-Sheng and Liu Zhong-Yi. Exponential decay of energy of the Euler-Bernoulli beam with locally distributed kelvin-voigt damping. SIAM J. Control and Optimization, 1998, 36: 1086–1098

25 Chen G, et al. Exponential decay of energy of evolution equations with locally distributed damping. SIAM J. Appl. Math., 1991, 51: 266–301

26 Conrad F and Morgül O. On the stabilization of a flexible beam with tip mass. SIAM J. Control & Optimization, 1998, 36: 1962–1986

27 Shi Dong-Hua, Hou S H and Feng De-Xing. Feedback stabilization of a Timoshenko beam with an endmass. Int. J. Control, 1998, 69: 285–300

28 Shi Dong Hua and Feng De-Xing. Exponential stability of Timoshenko beam with locally distributed feedback. Proc. of the 99'IFAC World Congress, Beijing, 1999, F: 157–162

29 Shi Dong-Hua and Feng De-Xing. Energy exponential decay of non-homogeneous Timoshenko beam with locally distributed damping. J. Austr. Math. Soc., Accepted for publication

30 Luo Z H. Direct strain feedback control of flexible robot arms: new theoretical and experimental results. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, 38: 1610–1622.

31 Luo Z H and Sakawa Y. Gain adaptive direct strain feedback control of flexible robot arms. IEEE TENCON'93, Beijing, 1993, 4:199–202

32 Guo Bao-Zhu and Luo Zheng-Hua. Initial-boundary value problem and exponential decay for a flexible-beam vibration with gain adaptive direct strain feedback control. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 1996, 27: 353–365

33 Shi Dong-Hua and Feng De-Xing. On stabilization of Timoshenko beam with adaptive gain. submitted for publication in IMA J. Control and Information