M/M/1 算子的谱特征

朱广田　艾尼・吾甫尔
(中国科学院系统科学研究所・北京，100080)

摘要：本文讨论动态 M/M/1 排队模型. 运用泛函分析中的算子谱理论及 C_0- 半群理论，证明了该模型非负解的存在唯一性，研究了相应算子的谱特征.

关键词：M/M/1 排队模型； C_0- 半群；非负解；谱

The Spectral Properties of M/M/1 Operator

Zhu Guangtian　Geni Gupur
(Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences · Beijing, 100080, P. R. China)

Abstract: In this paper, we consider the dynamic M/M/1 queueing model. By means of the theory of linear operator and C_0-semigroup in functional analysis, we prove that this model has a unique nonnegative solution and study the spectral properties of the corresponding operator.

Key words: M/M/1 queueing model; C_0-semigroup; nonnegative solution; spectrum

1 引言

关肇直老师历来重视理论结合实际和各学科之间相互渗透. 我们遵照老师的这一教导把泛函分析运用到运筹学中来撰写此文. 以庆祝关肇直老师诞辰 80 周年.

M/M/1 排队是排队论中基本的排队之一. 1909 年排队论的奠基人 A.K. Erlang 第一次考虑了 M/M/1 排队并建立了常微分方程形式的 M/M/1 排队模型 (见 [1],[2,P_{73}]). 当时，A.K.Erlang 在服务强度小于 1 的假设下，证明了稳态解的存在性并且给出了其表达式. 到 50 年代人们发现稳态解满足不了实际需要. 所以必需考虑动态解 (时间依赖解) (见 [3,P_{61}],[4]). 从此以后，许多学者用不同的方法开始研究动态解. 这时的工作主要是用广义概率函数等方法求方程的精确解，写出解的精确表达式并不容易 (见 [3,P_{63}],[2,P_{76}],[5,P_{124}],[6,P_{273}]). 所以实际上得不到解的渐近性质. 然而，排队论学者在服务强度小于 1 的情况下，承认当时间趋向于无穷时，动态解趋向于稳态解 (见 [6,P_{92}],[5,P_{127}],[1,P_{38}]). 但是没有人给出其数学证明.

80 年代以来，排队论学者继续研究此模型，注意力集中在研究解的渐近性质上 [7~12].

对稍微复杂一点的排队如 M/G/1, 用常微分方程来描述比较难. 即使建立了相应的常微分方程模型，求其稳态解也很难 [13]. 1955 年，D.R. Cox 用补充变量方法成功地建立了偏微分方程形式的 M/G/1 排队模型 (包含 M/M/1 排队模型)[14]. 这给排队论增添了新内容.

从那时开始，排队论学者认识到补充变量法的优越性. 先后 N.K. Jaiswal[15], Kosten[13] 等人用此方法研究了大量排队问题. 综观以上工作，我们看到排队论学者始终在以下的假设下研究模型的稳态解及其性质 (见 [13,P_{83}],[16,P_{59}],[17,P_{227}]).

$$\lim_{t\to\infty} p(x,t) = p(x), \tag{1}$$

这里

$$p(x,t) = (p_0(t), p_1(x,t), p_2(x,t), \cdots),$$
$$p(x) = (p_0, p_1(x), p_2(x), \cdots).$$

最近，随着通讯网络的发展，特别是异步传递模式 (ATM) 的发展和广泛应用，使人们更深刻地认识到进行动态分析的重要性和紧迫性 [18,19]. 虽然许多排队论学者为研究动态解及其性质做了不少工作 [20,21], 但他们主要用队长来研究 M/M/1 排队模型. 到目前为止，从研究动态解出发讨论排队问题并且解决排队论中的四个指标方面的工作还很少.

假设 (1) 实际上包含以下两个假设：

1) M/M/1 排队模型存在唯一的非负动态解 $p(x,t)$.

2) 极限 $\lim_{t\to\infty} p(x,t)=p(x)$ 存在.

本文我们用泛函分析方法首先证明 M/M/1 排队模型的正解的存在唯一性，然后讨论 M/M/1 算子的谱特征，为证明假设 2 做必要的准备工作.

2 M/M/1 排队模型

M/M/1 是一个顾客与服务员构成的随机服务系统. M/M/1 中， M 表示 Poisson 分布或者负指数分布，1 表示服务台只有一个，即 M/M/1 表示顾客单独地以到达率 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程来到系统 (系统 = 队伍 + 服务)，服务服从参数为 $\mu>0$ 的负指数分布. 假设服务宗旨是先到先接受服务，当系统空时，服务员等待顾客，顾客一来就开始服务. 此外，还假设当一个顾客接受服务离开系统时，下一个顾客到达服务台 (间隔时间) 的过程服从 Poisson 过程.

如果假设系统中的顾客总数为 $N(t)$，服务时间的随机变量为 $X(x)$，相应的概率密度函数为 $f_X(x)$，那么

$$p\{N(t)=n\}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(-\lambda t)^n}{n!},\ \lambda>0,\ t\in[0,\infty),\ n\ge 0,$$
$$f_X(x)=\mu\mathrm{e}^{-\mu x},\quad \mu>0,\quad x\in[0,\infty).$$

令 $p_0(t)$ 为在时刻 t 系统空的概率. $p_n(x,t)$ 为在时刻 t 系统里有 n 个顾客并且第一个顾客 (正在接受服务的顾客) 在 $(x,x+dx]$ 内接受服务离开系统的概率.

因为 $\{N(t),X(x)\}$ 构成连续时间的 Markov 过程，所以由全概率公式，考虑 Δt 后系统的变化情况，然后取 $\Delta t\to 0$ 的极限得到偏微分方程形式的 M/M/1 排队模型 (见 [13],[16,P_{58}])

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t}=-\lambda p_0(t)+\mu\int_0^\infty p_1(x,t)\mathrm{d}x, \tag{2}$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial t}+\frac{\partial p_1}{\partial x}=-(\lambda+\mu)p_1(x,t), \tag{3}$$
$$\frac{\partial p_n}{\partial t}+\frac{\partial p_n}{\partial x}=-(\lambda+\mu)p_n(x,t)+\lambda p_{n-1}(x,t),n\ge 2, \tag{4}$$
$$p_1(0,t)=\mu\int_0^\infty p_2(x,t)\mathrm{d}x+\lambda p_0(t), \tag{5}$$
$$p_n(0,t)=\mu\int_0^\infty p_{n+1}(x,t)\mathrm{d}x,\quad n\ge 2, \tag{6}$$
$$p_0(0)=1,\quad p_n(x,0)=0,\quad n\ge 1. \tag{7}$$

为简单起见，记

$$\varLambda=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda+\mu & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda+\mu & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda+\mu & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$\varGamma=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \lambda\mathrm{e}^{-x} & 0 & \mu & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \mu & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

取状态空间

$$X=\Big\{y\in\mathrm{R}\times L^1[0,\infty)\times L^1[0,\infty)\times\cdots\ \Big|\ \|y\|=|y_0|+\sum_{n=1}^\infty\|y_n\|_{L^1[0,\infty)}<\infty\Big\}.$$

显然， X 是一个 Banach 空间. 定义

$$D(A)=\Big\{p\in X\ \Big|\ \frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}x}\in L^1[0,\infty),\ p_n(x)\ (n\ge 1)\ \text{是绝对连续函数并且}\ p(0)=\int_0^\infty \Gamma p(x)\mathrm{d}x,\ |p_0|+\sum_{n=1}^\infty\|\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}x}\|_{L^1[0,\infty)}<\infty\Big\}.$$

若对 $p\in D(A)$，定义算子

$$Ap=\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

对 $p\in X$，定义 $Up=\varLambda p$，

$$Ep=\begin{pmatrix} \mu\int_0^\infty p_1(x)\mathrm{d}x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

则方程 (2)~(7) 可改写为 Banach 空间 X 中抽象 Cauchy 问题

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}=(A-U+E)p(t),\quad t\in[0,\infty), \tag{8}$$
$$p(0)=(1,0,0,\cdots). \tag{9}$$

其中 $A-U+E$ 叫做 M/M/1 算子. 以下在服务强度 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$ 的假设下讨论系统 (8) 和 (9). $\rho<1$ 的假设与模型的实际背景相吻合.

文 [22] 中作者证明了 $A-U+E$ 生成正 C_0-

半群 $T(t)$, 即证明了假设 1 的合理性.

本文先证 $T(t)$ 是一个正压缩 C_0- 半群，然后讨论主算子的谱特征.

3 主要结果

定理 1 $T(t)$ 是正压缩 C_0- 半群.

证 由 [22] 知道 $D(A)$ 在 X 中稠密并且当 $\gamma > 2\lambda+3\mu$ 时，$(\gamma I - A+U-E)^{-1}$ 存在, 有界. 这说明对 $\gamma > 2\lambda+3\mu$ 来说，$(\gamma I - A+U-E)^{-1}$ 是满射. 所以由 [22,P_{249}] 知道，为证明 $T(t)$ 正压缩 C_0- 半群，只需证 $(A-U+E)$ 是 Dispersive 算子. 由 [22,P_{249} 例 1.1(c)] 可知，若 $p\in D(A)$, 则可取

$$\phi = (\frac{[p_0]^+}{p_0}, \frac{[p_1(x)]^+}{p_1(x)}, \frac{[p_2(x)]^+}{p_2(x)}, \cdots),$$

其中

$$[p_0]^+ = \begin{cases} p_0, & \text{if } p_0 > 0, \\ 0, & \text{if } p_0 \le 0, \end{cases}$$

$$[p_n(x)]^+ = \begin{cases} p_n(x), & \text{if } p_n(x) > 0, \\ 0, & \text{if } p_n(x) \le 0, \end{cases} \quad n \ge 1.$$

对 $p\in D(A)$, 由边界条件可推出

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}[p_n(0)]^+ &= [p_1(0)]^+ + \sum_{n=2}^{\infty}[p_n(0)]^+ \\ &\le \mu\int_0^\infty [p_2(x)]^+\mathrm{d}x + \lambda[p_0]^+ \\ &\quad + \mu\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^\infty [p_{n+1}(x)]^+\mathrm{d}x \\ &= \mu\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty [p_{n+1}(x)]^+\mathrm{d}x + \lambda[p_0]^+. \end{aligned} \tag{10}$$

此外，不难推出

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}p_n(x)}{\mathrm{d}x}\frac{[p_n(x)]^+}{p_n(x)}\mathrm{d}x = -[p_n(0)]^+, \quad n\ge 1. \tag{11}$$

由 (10),(11), 对 $p\in D(A)$ 有

$$\begin{aligned}\langle (A-U+E)p, \phi\rangle &= (-\lambda p_0 + \mu\int_0^\infty p_1(x)\mathrm{d}x)\frac{[p_0]^+}{p_0} - \int_0^\infty (\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}x} + (\lambda+\mu)p_1(x))\frac{[p_1(x)]^+}{p_1(x)}\mathrm{d}x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\int_0^\infty (-\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}x} - (\lambda+\mu)p_n(x) + \lambda p_{n-1}(x))\frac{[p_n(x)]^+}{p_n(x)}\mathrm{d}x \\ &= -\lambda[p_0]^+ + \mu\frac{[p_0]^+}{p_0}\int_0^\infty p_1(x)\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}p_n(x)}{\mathrm{d}x}\frac{[p_n(x)]^+}{p_n(x)}\mathrm{d}x \\ &\quad - (\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty [p_n(x)]^+\mathrm{d}x + \lambda\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^\infty p_{n-1}(x)\frac{[p_n(x)]^+}{p_n(x)}\mathrm{d}x \\ &\le -\lambda[p_0]^+ + \mu\frac{[p_0]^+}{p_0}\int_0^\infty p_1(x)\mathrm{d}x + \mu\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty [p_{n+1}(x)]^+\mathrm{d}x + \lambda[p_0]^+ \\ &\quad - (\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty [p_n(x)]^+\mathrm{d}x + \lambda\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^\infty p_{n-1}(x)\frac{[p_n(x)]^+}{p_n(x)}\mathrm{d}x \\ &= \mu\frac{[p_0]^+}{p_0}\int_0^\infty p_1(x)\mathrm{d}x - \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty [p_n(x)]^+\mathrm{d}x \\ &\quad - \mu\int_0^\infty [p_1(x)]^+\mathrm{d}x + \lambda\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^\infty p_{n-1}(x)\frac{[p_n(x)]^+}{p_n(x)}\mathrm{d}x \\ &\le \mu\frac{[p_0]^+}{p_0}\int_0^\infty [p_1(x)]^+\mathrm{d}x - \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty [p_n(x)]^+\mathrm{d}x \\ &\quad - \mu\int_0^\infty [p_1(x)]^+\mathrm{d}x + \lambda\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^\infty [p_{n-1}(x)]^+\mathrm{d}x \\ &= \mu(\frac{[p_0]^+}{p_0} - 1)\int_0^\infty [p_1(x)]^+\mathrm{d}x \le 0. \end{aligned} \tag{12}$$

由 (12) 与 dispersive 算子的定义 [22,P_{249}] 得知 $A-U+E$ 是 dispersive 算子. 因此由 [22,P_{249}] 中定理 1.2 与文 [22] 知 $A-U+E$ 生成正压缩 C_0- 半群. 由半群的唯一性知这个半群就是 $T(t)$. 定理 1 得证.

由 [24,P_{122}] 得状态空间 X 的共轭空间为

$$X^* = \{q^* \in \mathrm{R} \times L^\infty[0,\infty) \times L^\infty[0,\infty) \times \cdots \mid |||q^*||| = \sup\{|q_0^*|, \sup_{n\geq 1} \|q_n^*\|_{L^\infty[0,\infty)}\} < \infty\},$$

显然， X 也是一个 Banach 空间.

定理 2 $A-U+E$ 的共轭算子 $(A-U+E)^*$ 为 $(A-U+E)^*q^* = (G+Q+R+J)q^*$, $\forall q^* \in D(A^*)$.

其中

$$Gq^* = Vq^*, \quad Rq^* = Fq^*(0),$$

$$Qq^* = Wq^*, \quad Jq^* = Bq^*(0),$$

$$D(A^*) = \Big\{q^* \in X^* \mid q_n^*(\infty) = M, \quad n \geq 1, \sup_{n\geq 1} \|\frac{\mathrm{d}q_n^*(x)}{\mathrm{d}x}\|_{L^\infty[0,\infty)} < \infty\Big\},$$

$$V = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - (\lambda+\mu) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - (\lambda+\mu) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

注 求 $(A-U+E)^*$ 的特征值时发现 $D(A^*)$ 中 M 是与 n 无关的常数.

证 对任意 $p \in D(A)$ 与 $q^* \in D(A^*)$, 由 (10),(11) 式有

$$\begin{aligned}
\langle (A-U+E)p, q^* \rangle &= q_0^*(-\lambda p_0 + \mu \int_0^\infty p_1(x)\mathrm{d}x) - \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}p_n(x)}{\mathrm{d}x} q_n^*(x)\mathrm{d}x \\
&\quad + \lambda \sum_{n=2}^\infty \int_0^\infty p_{n-1}(x) q_n^*(x)\mathrm{d}x - (\lambda+\mu)\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty p_n(x)q_n^*(x)\mathrm{d}x \\
&= q_0^*(-\lambda p_0 + \mu \int_0^\infty p_1(x)\mathrm{d}x) - \sum_{n=1}^\infty [p_n(x)q_n^*(x)|_0^\infty - \int_0^\infty p_n(x)\frac{\mathrm{d}q_n^*(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x] \\
&\quad - (\lambda+\mu)\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty p_n(x)q_n^*(x)\mathrm{d}x + \lambda \sum_{n=2}^\infty \int_0^\infty p_{n-1}(x)q_n^*(x)\mathrm{d}x \\
&= q_0^*(-\lambda p_0 + \mu \int_0^\infty p_1(x)\mathrm{d}x) - \sum_{n=1}^\infty [-p_n(0)q_n^*(0) - \int_0^\infty p_n(x)\frac{\mathrm{d}q_n^*}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x] \\
&\quad - (\lambda+\mu)\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty p_n(x)q_n^*(x)\mathrm{d}x + \lambda \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty p_n(x)q_{n+1}^*(x)\mathrm{d}x \\
&= q_0^*(-\lambda p_0 + \mu \int_0^\infty p_1(x)\mathrm{d}x) + \mu \sum_{n=1}^\infty q_n^*(0)\int_0^\infty p_{n+1}(x)\mathrm{d}x + \lambda p_0 q_1^*(0) \\
&\quad + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty p_n(x)\frac{\mathrm{d}q_n^*}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x - (\lambda+\mu)\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty p_n(x)q_n^*(x)\mathrm{d}x + \lambda \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty p_n(x)q_{n+1}^*(x)\mathrm{d}x \\
&= p_0[-\lambda q_0^* + \lambda q_1^*(0)] + \mu \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty p_n(x)q_{n-1}^*(0)\mathrm{d}x \\
&\quad + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty [\frac{\mathrm{d}q_n^*(x)}{\mathrm{d}x} - (\lambda+\mu)q_n^*(x) + \lambda q_{n+1}^*(x)]p_n(x)\mathrm{d}x \\
&= p_0[-\lambda q_0^* + \lambda q_1^*(0)] + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty [\frac{\mathrm{d}q_n^*}{\mathrm{d}x} - (\lambda+\mu)q_n^*(x) \\
&\quad + \lambda q_{n+1}^*(x) + \mu q_{n-1}^*(0)]p_n(x)\mathrm{d}x \\
&= \langle p, (R+Q+G+J)q^* \rangle. \qquad (13)
\end{aligned}$$

由 (13) 式与共轭算子的定义立即得到定理 2 的结果. 定理 2 证毕.

定理 3 $\{\gamma\in C \mid \sup\{\frac{\lambda}{|\gamma+\lambda|},\frac{\lambda}{\mathrm{Re}\gamma+\lambda+\mu}\times\frac{|\gamma+\lambda+\mu|}{|\gamma+\lambda+\mu|-\mu}\}<1\}$ 属于 $(A-U+E)^*$ 的正则集. 特别地, 虚轴上除了 0 外都是 $(A-U+E)^*$ 的正则点.

证 先考虑 $(\gamma I-G-J)^{-1}$, 然后由扰动理论得到所要结论.

对给定的 $y^*\in X^*$, 考虑方程

$$(\gamma I-G-J)q^*=y^*.$$

这等价于

$$(\gamma+\lambda)q_0^*=y_0^*, \tag{14}$$

$$[2mm]\frac{\mathrm{d}q_1^*}{\mathrm{d}x}=(\gamma+\lambda+\mu)q_1^*(x)-\mu q_0^*-y_1^*(x), \tag{15}$$

$$[2mm]\frac{\mathrm{d}q_n^*(x)}{\mathrm{d}x}=(\gamma+\lambda+\mu)q_n^*-\mu q_{n-1}^*(0)-y_n^*(x),\ n\geq 2, \tag{16}$$

$$q_n^*(\infty)=M,\quad n\geq 1. \tag{17}$$

由 (15),(16) 得

$$\begin{aligned}&q_1^*(x)\\=&a_1\mathrm{e}^{(\gamma+\lambda+\mu)x}\\&-\frac{\mu}{\gamma+\lambda+\mu}\mathrm{e}^{(\gamma+\lambda+\mu)x}(1-\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)x})q_0^*\\&-\mathrm{e}^{(\gamma+\lambda+\mu)x}\int_0^x y_1^*(\tau)\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)\tau}\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&q_n^*(x)\\=&a_n\mathrm{e}^{(\gamma+\lambda+\mu)x}\\&-\frac{\mu}{\gamma+\lambda+\mu}\mathrm{e}^{(\gamma+\lambda+\mu)x}(1-\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)x})q_{n-1}^*(0)\\&-\mathrm{e}^{(\gamma+\lambda+\mu)x}\int_0^x y_n^*(\tau)\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)\tau}\mathrm{d}\tau,\ n\geq 2.\end{aligned} \tag{19}$$

由 (18),(19) 可得

$$\begin{aligned}&q_1^*(x)\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)x}\\=&a_1-\frac{\mu}{\gamma+\lambda+\mu}(1-\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)x})q_0^*\\&-\int_0^x y_1^*(\tau)\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)\tau}d\tau,\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&q_n^*(x)\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)x}\\=&a_n-\frac{\mu}{\gamma+\lambda+\mu}(1-\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)x})q_{n-1}^*(0)\\&-\int_0^x y_n^*(\tau)\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)\tau}\mathrm{d}\tau,\quad n\geq 2.\end{aligned} \tag{21}$$

由 (17),(20),(21) 得

$$a_1=\frac{\mu}{\gamma+\lambda+\mu}q_0^*+\int_0^\infty y_1^*(\tau)\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)\tau}d\tau, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{\mu}{\gamma+\lambda+\mu}q_{n-1}^*(0)\\&+\int_0^\infty y_n^*(\tau)\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)\tau},\quad n\geq 2.\end{aligned} \tag{23}$$

由 (22),(23),(18),(19) 得

$$q_n^*(0)=a_n,\quad n\geq 1, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}q_1^*(x)=&\frac{\mu}{\gamma+\lambda+\mu}q_0^*\\&+\mathrm{e}^{(\gamma+\lambda+\mu)x}\int_x^\infty y_1^*(\tau)\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)\tau}\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}q_n^*(x)=&\frac{\mu}{\gamma+\lambda+\mu}q_{n-1}^*(0)\\&+\mathrm{e}^{(\gamma+\lambda+\mu)x}\int_x^\infty y_n^*(\tau)\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)\tau}\mathrm{d}\tau,\ n\geq 2.\end{aligned} \tag{26}$$

故由 (22),(23),(24),(25),(26) 得

$$\begin{aligned}q_n^*(x)=&(\frac{\mu}{\gamma+\lambda+\mu})^n q_0^*\\&+(\frac{\mu}{\gamma+\lambda+\mu})^{n-1}\int_0^\infty y_1^*(\tau)\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)\tau}\mathrm{d}\tau\\&+(\frac{\mu}{\gamma+\lambda+\mu})^{n-2}\int_0^\infty y_2^*(\tau)\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)\tau}\mathrm{d}\tau\\&+\cdots+\frac{\mu}{\gamma+\lambda+\mu}\int_0^\infty y_{n-1}^*(\tau)\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)\tau}\mathrm{d}\tau\\&+\mathrm{e}^{(\gamma+\lambda+\mu)x}\int_x^\infty y_n^*(\tau)\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda+\mu)\tau}\mathrm{d}\tau,\quad n\geq 1.\end{aligned} \tag{27}$$

注意到 (14) 式

$$q_0^*=\frac{1}{\gamma+\lambda}y_0^*. \tag{28}$$

(28) 代入 (27) 并取范数得 (假设 $\mathrm{Re}\gamma+\lambda+\mu>0$)

$$\begin{aligned}&\|q_n^*\|_{L^\infty[0,\infty)}\\\leq&\{\frac{1}{|\gamma+\lambda|}\frac{\mu^n}{|\gamma+\lambda+\mu|^{n-1}}\frac{1}{\mathrm{Re}\gamma+\lambda+\mu}\\&+\frac{1}{\mathrm{Re}\gamma+\lambda+\mu}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{\mu}{|\gamma+\lambda+\mu|})^k\}|||y^*|||,\quad n\geq 1.\end{aligned} \tag{29}$$

由 (29) 式易得

$$\begin{aligned}&\sup_{n\geq 1}\|q_n^*\|_{L^\infty[0,\infty)}\\\leq&\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{|\gamma+\lambda|}\frac{\mu^n}{|\gamma+\lambda+\mu|^{n-1}}\frac{1}{\mathrm{Re}\gamma+\lambda+\mu}\\&+\frac{1}{\mathrm{Re}\gamma+\lambda+\mu}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{\mu}{|\gamma+\lambda+\mu|})^k\}|||y^*|||\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Re}\gamma+\lambda+\mu}\frac{|\gamma+\lambda+\mu|}{|\gamma+\lambda+\mu|-\mu}|||y^*|||. \quad (30)$$

由 (30) 与 (28) 得

$$|||q^*|||$$
$$\le\sup\{\frac{1}{|\gamma+\lambda|},\frac{1}{\mathrm{Re}\gamma+\lambda+\mu}\frac{|\gamma+\lambda+\mu|}{|\gamma+\lambda+\mu|-\mu}\}$$
$$\cdot|||y^*|||. \quad (31)$$

(31) 说明

$$||(\gamma I-G-J)^{-1}||$$
$$\le\sup\{\frac{1}{|\gamma+\lambda|},\frac{1}{\mathrm{Re}\gamma+\lambda+\mu}\frac{|\gamma+\lambda+\mu|}{|\gamma+\lambda+\mu|-\mu}\}. \quad (32)$$

以下计算 $(Q+R)$ 的范数. 对任意 $q^*\in X^*$, 有

$$(Q+R)q^*=(\lambda q_1^*(0),\lambda q_2^*(x),\lambda q_3^*(x),\cdots),$$
$$|||(Q+R)q^*|||$$
$$=\sup\{\lambda|q_1^*(0)|,\lambda\sup_{n\ge2}||q_n^*||_{L^\infty[0,\infty)}\}$$
$$\le\lambda\sup\{||q_1^*||_{L^\infty[0,\infty)},\sup_{n\ge2}||q_n^*||_{L^\infty[0,\infty)}\}$$
$$\le\lambda|||q^*|||. \quad (33)$$

若取特殊的 $y^*=(0,1,0,0,\cdots)$, 则

$$|||(Q+R)^*y^*|||=\lambda|||y^*|||. \quad (34)$$

(33),(34) 说明

$$||Q+R||=\lambda. \quad (35)$$

注意到以下关系式

$$[\gamma I-(A-U+E)^*]^{-1}$$
$$=[I-(\gamma I-G-J)^{-1}\cdot(Q+R)]^{-1}(\gamma I-G-J)^{-1}. \quad (36)$$

由 (35),(32) 与文 [24] 可知, 当

$$||(\gamma I-G-J)^{-1}(Q+R)||$$
$$\le\sup\{\frac{\lambda}{|\gamma+\lambda|},\frac{\lambda}{\mathrm{Re}\gamma+\lambda+\mu}\frac{|\gamma+\lambda+\mu|}{|\gamma+\lambda+\mu|-\mu}\}$$
$$<1 \quad (37)$$

时, $[I-(\gamma I-G-J)^{-1}(Q+R)]^{-1}$ 存在且有界. 从而由 (36) 与 (32) 得到所要结论.

特别地, 当 $\gamma=ia$, $a\ne0$, $a\in R$, 则 (37) 自然成立. 事实上,

$$\sup\{\frac{\lambda}{|\gamma+\lambda|},\frac{\lambda}{\mathrm{Re}\gamma+\lambda+\mu}\frac{|\gamma+\lambda+\mu|}{|\gamma+\lambda+\mu|-\mu}\}$$
$$=\sup\{\frac{\lambda}{\sqrt{a^2+\lambda^2}},\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{\sqrt{(\lambda+\mu)^2+a^2}}{\sqrt{a^2+(\lambda+\mu)^2}-\mu}\}$$
$$<1.$$

从而, 在虚轴上除了 0 外, 其它点全是 $(A-U+E)^*$ 的正则点. 定理 3 得证.

文 [25] 中作者证明了以下结果

引理 1 0 是 $A-U+E$ 的几何重数为 1 的特征值.

由引理 1, 定理 1 与文 [26] 知道 0 是 $(A-U+E)^*$ 的点谱, 即 0 是 $A-U+E$ 的剩余谱 (文 [22,P_{65}] 的意义下).

由定理 1, 定理 3 和引理 1 得到 $A-U+E$ 的谱特征 (见 [22]):

定理 4 在复平面上右半平面都属于 $A-U+E$ 的正则点; 在虚轴上, 除了 0 外其它所有点都属于 $A-U+E$ 正则点; 0 是 $A-U+E$ 的点谱又是 $A-U+E$ 的剩余谱.

参考文献

1 Erlang A K. Sandsynlighedsregning og telefon samtaler. Nyt Tidskrift for Matematik Copenhagen. 1909, B, 20, 33

2 Khintchine A Y. Mathematical Methods in The Theory of Queueing. London: Charles Griffin & Company, 1960

3 Cox D R, Walter L S. Queues. New York: John Wiley& Sons, 1961

4 Cohen J W. A survey of queueing problems occuring in the telephone and telegraph traffic theory. Proc. of The First International Conference on Operational Research, Oxford: John Wright and Sons Ltd., 1957, 138–145

5 Arnold O A. Probability, Statistics and Queueing Theory with Computer Science Applications. New York: Academic Press, 1978

6 White J A, Schmidt J W, Bennett G K. Analysis of Queueing Systems. New York: Academic Press, 1975

7 Abate J, Whitt W. Transient behavior of regulated Brownian motion I: starting at the origin. Adv. Appl. Prob., 1987, 19: 560–598

8 Abate J, Whitt W. Transient behavior of regulated Brownian motion II:nonzero initial condition. Adv. Appl. Prob., 1987, 19: 599–631

9 Abate J, Whitt W. Transient behavior behavior of the M/M/1 queue starting at the origin. Queueing Systems, 1987, 2: 41–65

10 Abate J, Whitt W. Transient behavior of the M/M/1 queue via Laplace transforms. Adv. Appl. Prob., 1988, 20: 145–178

11 Abate J, Whitt W. The correlation functions of RBM and M/M/1. Commun. Statist-Stochastic Models, 1988, 4(2): 315–359

12 艾尼·吾甫尔, 李学志. 常微分方程形式的 M/M/1 排队模型的一个注. 应用泛函分析学报, 1999, 1(1): 69–74

13 Kosten L. Stochastic Theory of Service Systems. Oxford: Pergamon Press, 1973

14 Cox D R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplemantary variables. Proc Cambridge-Philos Soc, 1955, 51: 433–441

15 Jaiswal N K. Bulk-service queueing problem. Oper Res, 1960, 8: 139–143

16 Chaudhry M L, Templeton J G C. A First Course in Bulk Queues. New York: John Wiley & Sons, 1983

17 Robert B Cooper. Introduction to queueing theory. Edition, New York: North-Holland, 1981

18 Whitt W. Untold horrors of the waiting room: what the equilibrium distribution will never tell about the queue-length process. Man. Sci., 1983, 29(4): 395–408

19 Dupuis A, Guillemin F. Etude des phenomenes transitoires de congestion lies au multiplexage statistique en boucle ouverte sur un lien ATM. France Telecom CNET(note technique), 1997

20 Abate J, Whitt W. Limits and approximations for M/G/1 LIFO waiting-line distribution. Oper. Res. Let., 1997, 20: 199–206

21 Charles Knessl, Charles Tier. Heavy traffic analysis of a Markov -modulated queue with capacity and general service. SIAM J Appl Math, 1998, 58(1): 257–323

22 艾尼 · 吾甫尔. M/M/1 模型的非负解的存在唯一性. 系统工程理论与实践, 1998, 18(10): 48–58

23 Arendt W, Grabosch A, et al. One-parameter semigroups of positive Operators. New York: Springer-Verlag, 1986

24 定光桂. 巴拿赫空间引论. 北京：科学出版社, 1984

25 Geni Gupur, MIijit Abaif. An eigenvalue of M/M/1 operator and its application. Acta Analysis Functionalis Applicata, 1999, 1(2)

26 Arendt W, Batty J K. Tauberian theorems and stability of one -parameter semigroups. Trans. Amer. Math. Soc., 1988, 306(2): 837–852