非线性系统滚动时域控制的性质研究 *

席裕庚 耿晓军

(上海交通大学自动化研究所 · 上海，200030)

摘要：针对非线性系统，对滚动时域控制的一些性质进行了研究．首先提出使系统稳定的充分条件；该条件覆盖了当前保证稳定的若干滚动时域控制策略．在此稳定性框架下，对控制系统的次优性、鲁棒性进行了扩展研究，得到系统次优性的一个上界，以及在外界衰减扰动下的鲁棒稳定性．

关键词：非线性系统；滚动时域控制；稳定性；次优性；鲁棒稳定性

Properties of Receding Horizon Control for Nonlinear Systems

Xi Yugeng Geng Xiaojun

(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University · Shanghai, 200030, P. R. China)

Abstract: This paper concentrates on some features of receding horizon control for nonlinear systems. We first present a sufficient condition to guarantee system stability, which covers some usual stable receding horizon control strategies. Under this stability framework, we extend our previous results on suboptimality and robustness to such systems, and obtain an upper bound of suboptimality and prove the robust stability in the presence of external decaying disturbance.

Key words: nonlinear systems; receding horizon control; stability; suboptimality; robust stability

1 引言

滚动时域控制 (Receding Horizon Control, RHC)，或称模型预测控制 (Model Predictive Control, MPC)，是一种基于模型、滚动实施的优化控制算法．它的基本思想是以滚动的有限时域优化取代全局的最优控制，在每一时刻，通过求解一个定义在未来有限时域上的优化问题，得到并实施所求出的当前最优控制作用，并随着优化时域的滚动推移，实现控制．这种控制算法把优化和反馈机制合理地结合起来，在实现控制性能优化的同时，兼顾了不确定性的影响，因而十分适用于复杂的工业环境，近 20 年来，它已在工业过程控制领域得到了广泛成功的应用．

与 RHC 工业应用的成功相比，其理论研究显得相对薄弱，这里的关键问题在于 RHC 的滚动优化机制与传统最优控制完全不同，即使对于线性系统，也无法象线性最优控制那样形成规范完整的理论．从 80 年代中期起，国内外控制界对 RHC 系统的理论研究倾注了极大的关注，得到了一系列新的成果．进入 90 年代以来，人们更是通过 RHC 原始形式的变更，提出了一些新的策略，如终端零约束 RHC [1]、终端加权 RHC [2,3] 等，得到了从理论上保证稳定性的结果．这些结果，为人们分析 RHC 系统的性能提供了宝贵的思路．

本文针对非线性 RHC 系统，在分析其滚动优化机制的基础上，提出了一个较为广泛的稳定性充分条件．在此稳定性框架下，进一步对控制系统的次优性、鲁棒性进行了分析，从而为认识非线性 RHC 的性能，并进一步深入理解滚动优化的理论本质提供了参考．

2 非线性系统的滚动时域控制

考虑如下一般形式的非线性系统：

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)). \tag{1}$$

其中 $x(0)$ 已知，$x(k)$，$u(k)$ 分别为状态和输入向量．$f(0,0)=0$ 且在原点连续．状态和输入向量满足如下约束：

$$x(k) \in \Omega_x \subseteq \mathrm{R}^n, u(k) \in \Omega_u \subseteq \mathrm{R}^m. \tag{2}$$

Ω_x，Ω_u 分别为 $\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^m$ 上的紧集，且均包括原点为内点．

在一般意义上，RHC 策略可描述如下：在任一

* 国家自然科学基金 (69774004) 资助项目．

采样时刻 k, 求解如下类型的约束最优控制问题：

$$\begin{aligned}&\min_{\pi_{k,k+N-1}} \ \Phi_N(x(k),\pi_{k,k+N-1})\\&=\sum_{i=k}^{k+N-1}[l(x(i/k))+m(u(i/k))]+V_f(x(k+N/k))\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & x(i/k)\in\Omega_x, u(i/k)\in\Omega_u,\\ & i=k,\cdots,k+N,\\ & x(k+N/k)\in X_f\subset \mathrm{R}^n.\end{aligned}$$

其中 X_f 为终端约束域，且

$$\pi_{k,k+N-1}=(u(k/k),u(k+1/k),\cdots,\\ u(k+N-1/k)).$$

$l(\cdot),m(\cdot)$ 分别满足如下条件：

1) $l(0)=0, l(\cdot)$ 为 R^n 上的 Lipschitz 连续函数， Lipschitz 常数为 L_l ，且存在连续严格增函数 $\varphi_i:[0,\infty)\to[0,\infty)$ ， $i=1,2$ ， $\varphi_i(0)=0$ ，当 $x\to\infty$ 时 $\varphi_i(x)\to\infty$ ；当 $x\neq 0$ 时有 $0<\varphi_1(|x|)\leq l(x)\leq\varphi_2(|x|)$ 成立.

2) $m(0)=0$ ， $m(\cdot)$ 为 R^m 上的 Lipschitz 连续函数， Lipschitz 常数为 L_m ，且存在非减函数 $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty),\phi(0)=0$ ，当 $u\neq 0$ 时有 $0<\phi(|u|)\leq m(u)$ 成立.

求解上述问题得到最优控制律 $\pi^*_{k,k+N-1}=[u^*(k/k),u^*(k+1/k),\cdots,u^*(k+N-1/k)]$. 取 k 时刻控制律 $u(k)=u^*(k/k)$ 并作用于系统. 到下一采样时刻 $k+1$，重复上述优化过程, 得到 $u(k+1)$，依次进行.

定义 1 记非线性系统 (1) 求解优化问题 (3) 的最优性能函数值 $\Phi^*_N(x(k),\pi^*_{k,k+N-1})$ 为 $J_N(x(k))$，其中 $x(k)$ 为 k 时刻的状态量， $J_N(x(k))$ 表示 k 时刻最优性能函数值仅与初始状态 $x(k)$ 和优化步长 N 有关.

对上述优化问题 (3) 选取不同的终端区域 X_f 和终端加权函数 $V_f(x)$ 将导致不同的 RHC 方案. 众所周知，若令 $V_f(x)\equiv 0$ 且 $X_f=\mathrm{R}^n$，则得到 RHC 问题的原始形式，对某一给定的时域长度 N ，该 RHC 控制器很可能导致系统闭环不稳定. 但如果合理地设计 X_f 和 $V_f(x)$ ，则可以得到稳定控制器.

1) 终端零状态约束 RHC[1].

令 (3) 中 $V_f(x)=0$ ， $X_f=0$ ，即强制优化时域终端状态预测值为 0 ，则可得到如下控制策略：

$$\begin{aligned}&\min_{\pi_{k,k+N-1}} \ \Phi_N(x(k),\pi_{k,k+N-1})\\&=\sum_{i=k}^{k+N-1}[l(x(i/k))+m(u(i/k))]\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & x(i/k)\in\Omega_x, u(i/k)\in\Omega_u,\\ & i=k,\cdots,k+N,\\ & x(k+N/k)=0.\end{aligned}$$

文献 [4,1] 已分别对线性系统与非线性系统指出了这是一种保证系统稳定的 RHC 策略.

2) 终端加权 RHC[2,3].

首先为系统 (1) 的线性化模型设计稳定的线性反馈控制律 $u(k)=Kx(k)$ ，该控制律作用于系统 (1) 后得到闭环系统

$$\begin{aligned}&x(k+1)=f(x(k),Kx(k)),\\&x(t)=\overline{x},\quad k\geq t.\end{aligned} \tag{5}$$

令 $x_L(\cdot)$ 表示该闭环系统在初始时刻 t，初始状态为 $\overline{x}$ 时的状态轨迹，则定义 $X(K)$ 如下：

$$X(K)=\Big\{\overline{x}\in\mathrm{R}^n\Big|\lim_{k\to\infty}\|x_L(k)\|=0,\\ x_L(k)\in\Omega_x,Kx_L(k)\in\Omega_u,k\geq t\Big\}. \tag{6}$$

也就是说，若 $\overline{x}\in X(K)$ ，则当线性控制律 $u(k)=Kx(k)$ 作用于非线性系统 (1) 后可得到满足约束条件 (2) 的轨迹，且使系统状态渐近稳定到原点. 于是令 (3) 中，终端惩罚函数形式如下：

$$\begin{aligned}&V_f(x(t),K(\cdot))\\&=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=t}^{\infty}[l(x(\frac{i}{t}))+m(Kx(\frac{i}{t}))], & x(t)\in X(K),\\ \infty, & x(t)\notin X(K).\end{cases}\end{aligned} \tag{7}$$

文献 [3] 已证明了这种 RHC 策略是稳定的.

3 稳定性框架

对于上述几种稳定 RHC 策略，其稳定性的证明都是将最优性能函数作为 Lyapunov 函数，通过证明其最优值随时间的单调递减性质而得到. 归纳这几种策略的共性，可以给出如下较广泛的 RHC 系统稳定的充分条件.

定理 1 对于非线性系统 (1)，若有限时域最优性能函数值 (3) 随优化时域长度 N 单调非增，则以此性能函数滚动优化的 RHC 策略保证系统稳定.

证 k 时刻状态量为 $x(k)$ ，此时优化问题 (3)

的最优解为

$$\pi^*_{k,k+N-1}=[u^*(k/k),\cdots,u^*(k+N-1/k)],$$

对应的最优性能函数值为 $J_N(x(k))$.k 时刻控制律 $u(k)=u^*(k/k)$，实施于系统得到 $k+1$ 时刻状态量 $x(k+1)$. 根据最优控制理论中的最优性原理，有

$$J_N(x(k))=l(x(k))+m(u(k))+J_{N-1}(x(k+1)).\quad(8)$$

$k+1$ 时刻优化问题的最优性能函数值记为 $J_N(x(k+1))$. 考虑 k 和 $k+1$ 时刻的最优性能指标之间的关系，有

$$\begin{aligned}&J_N(x(k))-J_N(x(k+1))\\=&\{l(x(k))+m(u(k))+J_{N-1}(x(k+1))\}\\&-J_N(x(k+1))\\=&[l(x(k))+m(u(k))]+[J_{N-1}(x(k+1))\\&-J_N(x(k+1))].\end{aligned}\quad(9)$$

由已知条件知 $l(x(k))+m(u(k))>0$，($[x(k),u(k)]\neq[0,0]$). 若最优性能指标随时域长度 N 单调非增，即

$$J_{N-1}(\cdot)\geq J_N(\cdot).\quad(10)$$

则 $J_N(x(k))-J_N(x(k+1))>0$. 又因 $J_N(x(t))>0$ (t 为任意时刻)，于是有最优性能函数 $J_N(\cdot)$ 为 Lyapunov 函数，从而可证得 RHC 系统的稳定性.

证毕.

注释 1 定理 1 给出的非线性 RHC 系统稳定的充分条件，即 $J_{N-1}(\cdot)>J_N(\cdot)$，不能理解为同一组 π^* 代入性能指标 $\Phi_{N-1}(\cdot)$ 和 $\Phi_N(\cdot)$ 得到的值. 事实上，对于不同的优化时域，最优解 π^* 是不同的. $J_{N-1}(\cdot),J_N(\cdot)$ 分别是对应不同的最优解 $\pi^*_{k,k+N-1},\pi^*_{k,k+N}$ 得到的最优性能指标, 由于 $\pi^*_{k,k+N}$ 比 $\pi^*_{k,k+N-1}$ 多一个自由度，因此 $J_{N-1}(\cdot)>J_N(\cdot)$ 完全是可能的. 下面的推论将说明上节的两种稳定 RHC 策略均能满足定理 1 条件.

推论 1 以 (4) 实现滚动优化的终端零状态约束 RHC 是稳定的.

证 考察 $J_N(x(k))$ 相对 N 的单调性，当时域长度为 N 时，其最优解为 $\pi^*_{k,k+N-1}=\{u^*(k/k),\cdots,u^*(k+N-1/k)\}$，且该控制律满足约束 $x^*(k+N/k)=0$. 相应的最优性能为

$$\begin{aligned}J_N(x(k))&=\min\Phi_N(x(k),\pi_{k,k+N-1})\\&=\sum_{i=k}^{k+N-1}[l(x^*(i/k))+m(u^*(i/k))],\end{aligned}$$

当时域长度为 $N+1$ 时，取控制系列为

$$\pi_{k,k+N}=\{u^*(k/k),\cdots,u^*(k+N-1/k),0\},$$

该控制系列导致 $x(k+N/k)=x^*(k+N/k)=0$，且 $u(k+N/k)=0$，由于 $f(0,0)=0$，故在此控制下 $x(k+N+1/k)=f(x(k+N/k),u(k+N/k))=0$，满足时域长度 $N+1$ 的终端条件，故 $\pi_{k,k+N}$ 是时域长度为 $N+1$ 时优化问题的可行解. 因此有

$$\begin{aligned}J_{N+1}(x(k))&\leq\Phi_{N+1}(x(k),\pi_{k,k+N})\\&=\sum_{i=k}^{k+N}[l(x^*(i/k))+m(u^*(i/k))]\\&=J_N(x(k)).\end{aligned}$$

可见最优性能函数 $J_N(\cdot)$ 为 N 的单调非增函数，由定理 1 可知系统是稳定的. 证毕.

推论 2 以 (3) 和 (7) 实现滚动优化的终端加权 RHC 是稳定的.

证 求解 k 时刻 N 步最优控制问题得到最优控制序列 $\pi^*_{k,k+N-1}=\{u^*(k/k),\cdots,u^*(k+N-1/k)\}$ 构造 $N+1$ 步控制序列

$$\begin{aligned}\pi_{k,k+N}=\{&u^*(k/k),\cdots,u^*(k+N-1/k),\\&Kx^*(k+N/k)\}.\end{aligned}$$

该控制对应的状态轨迹为

$$\begin{aligned}x_{k+1,k+N+1}=\{&x^*(k+1/k),\cdots,x^*(k+N/k),\\&x^*(k+N+1/k)\}.\end{aligned}$$

根据 $X(K)$ 的定义，由 $x^*(k+N/k)\in X(K)$ 可知 $x^*(k+N+1/k)\in X(K)$，同时满足约束 $x(i/k)\in\Omega_x$，$u(i/k)\in\Omega_u$，故 $\pi_{k.k+N}$ 是 k 时刻 $N+1$ 步优化问题的一个可行解，记其相应的性能函数值为 $\Phi^o_{N+1}(x(k),k)$，

$$J_{N+1}(x(k),K)\leq\Phi^o_{N+1}(x(k),K)=J_N(x(k),K).$$

即 $J_N(\cdot)$ 为 N 的单调非增函数，故系统稳定.

证毕.

注释 2 由上述推论的证明可知, 为了把 $J_N(\cdot)$ 与 $J_{N+1}(\cdot)$ 联系起来，需要把 N 步的最优解 $\pi^*_{k,k+N-1}$ 延伸扩展得到 $N+1$ 步的一个解 $\pi_{k,k+N}$，相应的约束条件则保证了 $\pi_{k,k+N}$ 是 $N+1$ 步优化的可行解. 进一步可以看出，这些约束条件蕴含了每一时刻的控制律并不仅仅规定了优化时域中的控制，而且规定了优化时域后的全部控制，实际上是无穷时域的控制律. 例如，对于终端零状态约束 RHC， k

时刻的控制律为

$$\{u^*(k/k),\cdots,u^*(k+N-1/k),0,0,\cdots\}$$

对于终端加权 RHC， k 时刻的控制律为

$$\{u^*(k/k),\cdots,u^*(k+N-1/k),Kx(k+N/k),$$
$$Kx(k+N+1/k),\cdots\}.$$

4 次优性分析

最优控制从整个控制时域出发，考虑的是性能的全局最优;而滚动时域控制是有限时域滚动优化，每一时刻得到的都是局部最优控制序列，且只将第一步控制量作用于系统，下一时刻重新优化求解，这样得到的控制显然不能保证原问题的全局最优．因此，评价滚动时域控制的次优性是分析 RHC 系统性能的一个重要内容．对于线性系统，文 [4] 根据 Riccati 方程解的性质得到了终端零约束 RHC 的次优性结果．而对非线性系统，文 [5] 研究了终端零约束 RHC 的次优性．本节将在定理 1 稳定性框架下，对 RHC 的次优性作一般的分析．

考虑非线性系统 (1)，在初始时刻 0 和初始状态 $x(0)$ ，求解最优控制律使优化问题

$$\min_{u(\cdot)}\Phi_0(x(0))=\sum_{k=0}^{\infty}[l(x(k))+m(u(k))] \tag{11}$$

有极小值 $J_0(x(0))$，且 $u^*(k)\in\Omega_u$， $x^*(k)\in\Omega_x$．显见 $J_0(x(0))$ 为整个控制时域上的全局最优值．

相应地，滚动时域控制策略在任意时刻 k 的优化问题描述为

$$\begin{aligned}&\min_{\pi_{k,k+N-1}}\ \Phi_N(x(k),\pi_{k,k+N-1})\\ =&\sum_{i=k}^{k+N-1}L(x(i/k),u(i/k))+V_f(x(k+N/k)) \quad (12)\\ \text{s.t.}\quad & x(i/k)\in\Omega_x,u(i/k)\in\Omega_u,\\ & i=k,\cdots,k+N,\\ & x(k+N/k)\in X_f\subset \mathrm{R}^n.\end{aligned}$$

经过不断在线优化求解，得到 RHC 控制律 $u(k)$，相应的状态轨迹为 $x(k)$．将此控制律和状态轨迹代入 (11)，有

$$J_{10}(x(0))=\sum_{k=0}^{\infty}L(x(k),u(k)). \tag{13}$$

J_{10} 即为该 RHC 策略的全局性能函数值．

显然 J_{10} 不是全局最优值，而是次优的，即有 $J_{10}(\cdot)\ge J_0(\cdot)$．若该 RHC 策略满足定理 1 所述的稳定性条件，即最优性能函数值 $J_N(x(k))$ 随优化时域长度 N 单调非增，则可通过下述定理评估 $J_{10}(\cdot)$ 的次优性．

定理 2 针对系统 (1)，若有限时域最优性能函数 (3) 随优化时域长度单调非增，则以此性能函数进行滚动优化的 RHC 控制律，在无穷时域性能函数 (13) 形式下，其全局性能函数值存在一个上界，其值为第一步滚动优化的有限时域最优指标．

证 根据定理 1 中 (9) 有

$$\begin{aligned}&J_N(x(k))-J_N(x(k+1))\\ =&[l(x(k))+m(u(k))]\\ &+[J_{N-1}(x(k+1))-J_N(x(k+1))].\end{aligned}$$

注意其中 $u(k)$， $x(k)$ 为 k 时刻 N 步优化相对应的即时控制与状态量，也是优化全过程中真正实现的控制与相应的状态．由已知条件，上式最后一项非负，于是

$$J_N(x(k))-J_N(x(k+1))\ge l(x(k))+m(u(k)). \tag{14}$$

令 (14) 中 $k=0$ 到 $k=\infty$，并将所有等式左右分别相加，有

$$J_N(0)-J_N(\infty)\ge\sum_{k=0}^{\infty}[l(x(k))+m(u(k))]. \tag{15}$$

上述右端 $x(k)$， $u(k)$ 分别为系统在该 RHC 策略下真实的状态和控制量．再由定理 1 该 RHC 策略的稳定性结论有 $J_N(\infty)=0$，即有

$$J_N(0)\ge J_{10}, \tag{16}$$

从而本定理得证． 证毕．

注释 3 定理 2 指出满足定理 1 稳定性条件的 RHC 策略，其控制律在全局性能意义上不是最优的，其对应的全局性能函数值存在一个上界．由此可得 $J_N(0)\ge J_{10}\ge J_0$

类似文 [5] 的证明，我们可以得到随着优化时域 N 的增加， $J_N(0)$ 趋于全局最优性能函数值 J_0，这样，上述 RHC 策略的次优性可随优化时域的增大而得到改善，乃至充分接近全局最优性能．

注释 4 定理 2 给出的上界 (16) 是从表达的简易性考虑的．实际上，由该定理的证明过程可知

1) 对于任意 k

$$J_N(x(k))\ge J_N(x(k+1))+l(x(k))+m(u(k)).$$

2) 对于任意 k

$$J_N(x(k))\ge\sum_{i=k}^{\infty}[l(x(i))+m(u(i))].$$

因此，更精细的看，应该有

$$\begin{aligned} J_N(0) &\ge J_N(x(1)) + [l(x(0)) + m(u(0))] \ge \cdots \\ &\ge J_N(x(k)) + \sum_{i=0}^{k-1}[l(x(i)) + m(u(i))] \\ &\ge \cdots \\ &\ge \sum_{i=0}^{\infty}[l(x(i)) + m(u(i))] = J_{10}. \end{aligned}$$

这表明， RHC 的次优性上界是随着滚动优化的进行不断改善的. 在每一时刻 k，其全局优化性能的次优性可由已实际发生的性能指标与该时刻有限时域优化的最优指标之和来评估. 当过程趋于无限时，该上界就趋于真实的性能指标. 这与它具有在线获取信息及反复优化的特征相对应.

注释 5 由注释 2 不难理解滚动优化中次优性能指标的改善. 因为在 RHC 的每一步，其有限时域优化问题在给定的约束下都导致了无穷时域的控制律，只是在优化时域后的控制不再是自由控制量. 这样，当优化时域向前推移时，重新求解优化问题意味着与前一时刻优化相比，释放了一个新的控制自由度. 因此该时刻的优化对全局而言，无疑比上一时刻能取得更好的性能. 由此可以看出，滚动的有限时域优化完全不同于静态的有限时域优化，滚动优化的性能指标不是定值，它是一个随滚动过程不断改善的动态变量，这是传统最优控制理论从未涉及的.

5 衰减扰动下的鲁棒性

Scokaert 和 Rawlings 在文 [6] 中证明了在一定假设条件下，若离散非线性系统

$$x(k+1) = F(x(k)) \tag{17}$$

是指数稳定的，则扰动后系统

$$x(k+1) = F(x(k)) + e(k) \tag{18}$$

是渐近稳定的 (其中 $e(k)$ 为衰减扰动). 文 [7] 指出终端零状态 RHC 策略在外界衰减扰动下仍使控制系统稳定. 这里将针对满足定理 1 稳定性条件的 RHC 控制系统，来分析其衰减扰动下的鲁棒稳定性.

考虑离散时不变非线性系统

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), e(k)), \tag{19}$$

其中 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ 为已知非线性函数， $(x,u,e) \to f(x,u,e) : \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n, f(0,0,\cdot) = 0$; 且对于 x， u,e 满足 Lipschitz 连续性条件，即对容许控制集 $\Omega_u \in \mathrm{R}^m$, 存在 $L_x, L_u, L_e \in (0,\infty)$，使得

$$\begin{aligned} &|f(x_1,u_1,e_1) - f(x_2,u_2,e_2)| \\ \le\ & L_x|x_1 - x_2| + L_u|u_1 - u_2| + L_e|e_1 - e_2| \end{aligned} \tag{20}$$

对所有的 $x_1,x_2,e_1,e_2 \in R^n$ 和 $u_1,u_2 \in \Omega_u \subset \mathrm{R}^m$ 成立. $e(k)$ 为未知干扰，且满足如下条件：

$$\|e(k)\|_\infty < \infty, \qquad |e(k)| \to 0, k \to \infty. \tag{21}$$

即干扰信号幅值有界，且逐渐衰减到零，前面式中 $|\cdot|$ 为欧几里德范数或其诱导范数， $\|\cdot\|_\infty$ 为范数. 设不考虑扰动时系统描述为：

$$\hat{x}(k+1) = f(\hat{x}(k), u(k), 0) := f(\hat{x}(k), u(k)) \tag{22}$$

称为原系统的名义系统，即本文最初考虑的系统 (1).

对于一般的非线性系统而言，即使存在 $u(k)$ 使上述名义系统 (22) 稳定，该控制律却不一定能保证扰动下的实际系统 (19) 的稳定. 我们在文 [7] 中已证明了终端零约束 RHC 策略能保证其鲁棒稳定性，下面的定理 3 将该结论进一步推广到具有本文稳定性框架的所有 RHC 系统.

定理 3 针对非线性系统 (19)，给定有限时域性能函数 (3)，若最优性能函数随优化时域长度单调非增，则以此性能函数滚动优化的 RHC 策略可保证系统在衰减扰动下具有鲁棒稳定性.

证 首先考虑无扰动情形. 记 k 时刻状态为 $x(k)$，滚动优化最优性能指标为 $J_N(x(k))$， $k+1$ 时刻状态根据 (22) 为 $\hat{x}(k+1)$，该时刻滚动优化最优性能指标为 $J_N(\hat{x}(k+1))$，则根据 (9), 有

$$\begin{aligned} &J_N(\hat{x}(k+1)) - J_N(x(k)) \\ \le\ & -[l(x(k)) + m(u(k))] \\ \le\ & -\varphi_1(|x(k)|). \end{aligned} \tag{23}$$

再考虑扰动系统， $k+1$ 时刻系统的真实状态为 $x(k+1) = f(x(k), u(k), e(k))$，则可得

$$\begin{aligned} \Delta J(x(k)) &= J(x(k+1)) - J(x(k)) \\ &= [J(x(k+1)) - J(\hat{x}(k+1))] \\ &\quad +[J(\hat{x}(k+1)) - J(x(k))] \\ &\le -\varphi_1(|x(k)|) + \sigma(|e(k)|). \end{aligned}$$

其中 $\sigma(|e(k)|) = L_J L_e|e(k)|$， L_J， L_e 分别为 J 和 f 对 e 的 Lipshitz 常数，显然 $\sigma(\cdot)$ 是连续严格增且 $\sigma(0) = 0$，即 $\sigma(\cdot)$ 是一个 K 类函数.

类似于 [7]，进一步可以证明

$$\alpha_1(|x(k)|) \le J(x(k)) \le \alpha_2(|x(k)|).$$

其中 $\alpha_1(\cdot)$， $\alpha_2(\cdot)$ 为 K_∞ 类函数.

这样，我们可证得 $J(x(k))$ 是系统 (19) 的 ISS(Input-State Stability)-Lyapunov 函数，由 $e(k)$ 的性质，当 $k > k_0$(k_0 为某一正整数) 时，有 $|e(k)| < \delta$，引用文献 [8] 的结果，可知系统实际状态 $|x(k)| \to 0$，即控制系统稳定. 上述证明的详细过程可参考文献 [7]. 证毕.

定理 3 表明，文 [7] 中对终端约束 RHC 在衰减扰动时鲁棒稳定性的结果与证明，完全可推广到更一般的满足本文稳定性框架的 RHC 系统.

6 结束语

本文从理论角度对非线性系统滚动时域控制系统的一些性质进行了分析研究. 首先为几种典型的稳定 RHC 策略建立了一个稳定性框架，然后，针对所有满足该稳定性条件的 RHC 策略，对其控制系统的次优性、鲁棒性进行了扩展研究，给出该类 RHC 系统次优性的一个上界，以及在外界衰减扰动下的鲁棒稳定性. 本文的研究，对于理解采用滚动时域优化的控制系统的性质提供了参考.

参考文献

1 Nicolao G D, Magni L and Scattolini R. On the robustness of receding-horizon control with terminal constraints. IEEE Trans. Automat. Contr., 1996, 41(3): 451–453

2 Chen H and Allegower F. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability. Automatica, 1998, 34(10): 1205–1217

3 Nicolao G D, Magni L and Scattolini R. Stabilizing receding horizon control of nonlinear time-varying systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1998, 43(7): 1030–1036

4 Kwon W H and Pearson A E. On feedback stabilization of time-varying discrete linear systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1978, 23: 479–481

5 席裕庚，耿晓军. 连续非线性系统预测控制的次优性分析. 自动化学报，1999

6 Scokaert P O M, Rawlings J B and Meadows E S. Discrete-time stability with perturbations: application to model predictive control. Automatica, 1997, 33(3): 463–470

7 耿晓军，席裕庚. 衰减扰动下非线性预测控制系统的鲁棒稳定性，控制与决策，1999,14(4): 369–372

8 Sontag E D and Wang Y. New characterization of input state stability. IEEE Trans. Automat. Contr., 1996, 41: 1283–1294