

DEDS 双子模型的等价变换及其应用

吴昊 肖雁鸿 彭永进
(湖南大学电气与信息工程系, 长沙, 410082)

TP271.8

摘要: 提出了 DEDS 双子模型的等价变换与等价系统, 给出了其定义, 研究了其主要特性和计算方法, 探讨了其在 DEDS 双子模型的简化、规范化及性能分析方面的应用。文中还给出了等价变换在建模、传函矩阵计算和有关定理证明方面应用的实例。

关键词: 等价系统; 等价变换; 传函矩阵; 双子模型
文献标识码: A

DEDS

The Equivalent Transformation and Its Application of DEDS Dioid Model

WU Hao, XIAO Yanhong and PENG Yongjin

(Department of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha, 410082, P. R. China)

Abstract: In this paper, the concept of equivalent transformation and equivalent system of DEDS dioid model is defined. the main characteristic and calculating methods are introduced. The simplification, standardization and performance analysis of DEDS dioid model are discussed. Meanwhile, the application examples of equivalent transformation in the modeling, transfer function calculating and theorem proving are suggested.

Key words: equivalent system; equivalent transformation; transfer function matrix; dioid model

1 引言(Introduction)

离散事件动态系统(DEDS)的代数理论诞生于 80 年代初^[1], 早期的工作集中于建立生产系统等 DEDS 的极大代数模型, 以及对极大代数矩阵和所建立的系统模型进行分析和控制。80 年代后期, 又出现了基于双子 M 的 DEDS 分析方法^[2,3]。双子 M 模型在 DEDS 的代数理论中具有重要作用, 因为极大代数模型只是它的一个子集, 而且双子 M 模型与计时事件图(TEG: 一种 Petri 网)有直接联系, 能较好地表达系统内部的逻辑关系。

等价变换是研究常规线性系统的有力工具, 但在 DEDS 双子模型中却还没有其对偶的分析方法。本文从 TEG 中的转换引发和令牌流动规则, 综合了三种等价变换: 换元变换、消弧变换和消自环变换。这类等价变换可以在系统矩阵上, 也可以在 TEG 图上进行操作; 用标量计算代替了矩阵的星运算, 易于在计算机上实现。此外, 它还具有不改变传函矩阵的重要特性。初步分析表明, 由于这些特点, 等价变换将成为 DEDS 双子模型的简化、规范化和各项性能分析的重要工具。

本文第二节给出了等价变换的定义; 第三节研

究了等价变换对传函矩阵的影响; 第四节给出了等价变换在系统建模方面的一个应用实例; 第五节用等价变换计算了“不可约系统”的传函矩阵; 最后一节是结论。

2 等价系统与等价变换(Equivalent system and equivalent transformation)

设计时事件图 TEG(Timed Event Graph)分别有 l, m 和 r 个内部转换、输入转换和输出转换, 可以写出其转换变量方程组:

Σ :

$$\begin{cases} \zeta(\gamma, \delta) = P(\gamma, \delta) \zeta(\gamma, \delta) \oplus Q(\gamma, \delta) u(\gamma, \delta), \\ \gamma(\gamma, \delta) = R(\gamma, \delta) \zeta(\gamma, \delta) \oplus W(\gamma, \delta) u(\gamma, \delta). \end{cases} \quad (1a)$$

(1b)

其中 $\zeta(\gamma, \delta)$, $u(\gamma, \delta)$ 和 $\gamma(\gamma, \delta)$ 分别为 l, m 和 r 维内部向量、输入向量和输出向量, $P(\gamma, \delta)$, $Q(\gamma, \delta)$, $R(\gamma, \delta)$ 和 $W(\gamma, \delta)$ 是维相容的双子矩阵。这些系数矩阵与 TEG 图有直接联系, 分别代表图中内部位置、输入位置、输出位置和直通位置的令牌数和延迟时间。

从 TEG 图的转换引发和令牌流动规则, 可综合

出三种等价变换:换元变换、消弧变换和消自环变换,它们在系统矩阵上的操作如定义2,而在TEG图上对应的操作是显然的。

定义1 分别称 $S(\gamma, \delta)$, $H(\gamma, \delta)$, $G(\gamma, \delta)$ 和 $F(\gamma, \delta)$ 是系统(1)的系统矩阵、传函矩阵、输出内传函矩阵和输入内传函矩阵。如果它们分别为:

$$S(\gamma, \delta) = \begin{pmatrix} P(\gamma, \delta) & Q(\gamma, \delta) \\ R(\gamma, \delta) & W(\gamma, \delta) \end{pmatrix}, \quad (2a)$$

$$H(\gamma, \delta) = R(\gamma, \delta)P^*(\gamma, \delta)Q(\gamma, \delta) \oplus W(\gamma, \delta), \quad (2b)$$

$$G(\gamma, \delta) = R(\gamma, \delta)P^*(\gamma, \delta), \quad (2c)$$

$$F(\gamma, \delta) = P^*(\gamma, \delta)Q(\gamma, \delta). \quad (2d)$$

定义2 称对系统矩阵进行的如下三种变换为等价变换;称两个转换变量方程组为等价系统,如果从其中任一系统的系统矩阵,通过等价变换,能得到另一系统的系统矩阵。

I) 换元变换。

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & W \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} T^{-1}PT & T^{-1}Q \\ RT & W \end{bmatrix}. \quad (3)$$

式中: T 是 $l \times l$ 维可逆的双子矩阵。

II) 消弧变换。

消弧行变换以复合矩阵 $[P, Q]$ 的某一行为基础,对系统矩阵的另一行进行的计算;不失一般性,如下以 $[P, Q]$ 的第一行为基础,对第二行进行的计算为消弧行变换

$$\begin{bmatrix} p_{11} & a_1^T & q_1^T \\ p_{21} + p_{21} & a_2^T & q_2^T \\ \beta & \bar{P} & \bar{Q} \\ r & \bar{R} & W \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} p_{11} & a_1^T & q_1^T \\ p_{21} + p_{21}p_{11} & a_2^T + p_{21}a_1^T & q_2^T + p_{21}q_1^T \\ \beta & \bar{P} & \bar{Q} \\ r & \bar{R} & W \end{bmatrix}. \quad (4)$$

也可以 $[P, Q]$ 的某一行为基础,对 $[R, W]$ 任一行进行计算;同理,也有消弧列变换。

III) 消自环变换。

消自环变换有行变换、列变换和行列同时变换,其中行变换如下: (p_{11} 是元素,其它作对应分块)

$$\begin{bmatrix} p_{11} & a^T & q^T \\ \beta & \bar{P} & \bar{Q} \\ r_1 & \bar{R} & W \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon & p_{11}a^T & p_{11}q^T \\ \beta & \bar{P} & \bar{Q} \\ r_1 & \bar{R} & W \end{bmatrix}. \quad (5)$$

显然,如上定义的等价系统满足一般等价的三个条件:对称、反身及传递。

1) 换元变换的分解。

引理1^[7] 双子矩阵 $T \in D^{l \times l}$ 可逆的充分必要条件为 T 的每行和每列有且只有一个非零元,且该非零元为单项式。设 T 的第 i 行的第 k 个元为非零元 β_{ik} , 则其逆阵 T^{-1} 的第 i 列的第 k 个元也是非零元,且等于 β_{ik} 的逆元 β_{ik}^{-1} 。

根据引理1,可知任一换元等价变换(3)都可由以下两种基本变换合成:

① $T = \text{diag}(t_{11}, t_{22}, \dots, t_{ll})$ 为对角阵。

式中 t_{ii} 为单项式。设 $t_{ii} = \gamma^i \delta^i$, 变换 $\zeta = T\zeta$ 将 ζ_i ($i = 1, \dots, l$) 的引发次数重新编号,即将原来的第0次引发变为新的第 s_i 次引发;而引发时间延迟了 t_i 单位时间。TEG图中,令牌不停流动,在不同时刻建立的方程组(1)的系数矩阵也不同,但它们是这类等价系统。例如,设在 $t = 0$ 和 $t = \tau$ 之间,转换 ζ_i 引发了 s_i 次,在 $t = 0$ 和 $t = \tau$ 建立的模型的系统矩阵分别为 S_0 和 S_τ , 则等价变换(3)表示了 S_0 和 S_τ 之间的关系,即 $S_\tau = T^{-1}S_0T$, 而 $T = \text{diag}(e, \dots, e, \gamma^i, e, \dots, e)$ (第 i 个对角元为 γ^i , 其余的为 e)。

② T 为交换阵。

变换 $\zeta = T\zeta$ 将 ζ_i 与 ζ_j 的编号对换。众所周知,可以通过多次编号对换的等价变换,将一个可约矩阵分块变成一个下三角阵,求出非强连通系统的规范型。

2) 无自环转换的消弧。

利用消弧等价变换,可消去无自环转换的任一输入弧和输出弧或者只消去它们的一部分,这也是其名称的由来。先看消弧行变换,不失一般性,设 ζ_1 无自环,即 $p_{11} = \varepsilon$, 若取 $p_{21} = \hat{p}_{21}$, $p_{21} = \varepsilon$, 则在式(4)右侧整个 p_{21} 及其相应的弧皆消失。相对 ζ_1 来说,这意味着利用消弧行变换消去了输出弧 p_{21} 。类似地,利用消弧列变换可消去其任一输入弧。

3) 消自环变换。

消自环变换能使某个对角元变为零,因而消去了相应的转换的自环。例如,变换式(5)的每一种变换都可以消去转换 ζ_1 的自环。值得注意的是,式(5)的右侧的元素不再是有限和式,它们定义在有理式上,因而系数矩阵与TEG图不再有简单的联系,但将有理式作为一个中间表达式是有益的,很多的计算表明,这种表达式不仅能给计算带来方便,在某些复杂的系统计算中还是必需的。因为离开了这种表达式,很难将转换变量方程组进行有效的演算。

4) 消元变换。

将消弧变换与消自环变换结合起来,可将任一转换消去.例如,遵循以下步骤可消去 ζ_l :

步骤 1 消去 ζ_l 的自环(如果自环不存在,直接进入第二步);

步骤 2 消去 ζ_l 的所有输出弧(多次行消弧可

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_{11} & a^T & q_l^T \\ \beta & \bar{P} & \bar{Q} \\ r_l & \bar{R} & W \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{步骤 1}} \begin{bmatrix} \varepsilon & p_{11}^* a^T & p_{11}^* q_l^T \\ p_{11}^* \beta & \bar{P} & \bar{Q} \\ p_{11}^* r_l & \bar{R} & W \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{步骤 2}} \begin{bmatrix} \varepsilon & p_{11}^* a^T & p_{11}^* q_l^T \\ \varepsilon & \bar{P} + p_{11}^* \beta a^T & \bar{Q} + p_{11}^* \beta q_l^T \\ \varepsilon & \bar{R} + p_{11}^* r_l a^T & W + p_{11}^* r_l q_l^T \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{步骤 3}} \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \bar{P} + p_{11}^* \beta a^T & \bar{Q} + p_{11}^* \beta q_l^T \\ \varepsilon & \bar{R} + p_{11}^* r_l a^T & W + p_{11}^* r_l q_l^T \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{P} + p_{11}^* \beta a^T & \bar{Q} + p_{11}^* \beta q_l^T \\ \bar{R} + p_{11}^* r_l a^T & W + p_{11}^* r_l q_l^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3 等价变换的性质 (Characters of equivalent transformation)

因文章篇幅所限,本文的定理和引理等都不加证明,有兴趣者可参考文献[7].

定理 1 换元等价变换不改变系统的传函矩阵,输入内传函矩阵变为 $T^{-1}F$,输出内传函矩阵变为 GT .

定理 2 消弧行变换不改变传函矩阵、输入内传函矩阵;消弧列变换不改变传函矩阵、输出内传函矩阵.

定理 3 消自环行变换不改变传函矩阵、输入内传函矩阵;消自环列变换不改变传函矩阵、输出内传函矩阵;消自环行列同时变换不改变传函矩阵、输入内传函矩阵和输出内传函矩阵.

以上三条定理使等价变换可作为研究和简化 DEDS 双子模型的重要工具.例如,所有等价变换都不改变系统的传函矩阵,因而周期性等特性是等价变换的不变特征;而各种行等价变换不改变输入内传函矩阵,所以每个转换的稳定性等属性是行等价变换的等价不变特征.

4 等价变换在建模中的应用 (The applications of equivalent transformation in the modeling)

建模往往分两步进行,第一步从 TEG 图得到如式(1)所示的转换变量方程组,第二步再由式(1)求

消去 ζ_l 的全部输出弧);

步骤 3 消去 ζ_l 的所有输入弧(多次列消弧可消去 ζ_l 的全部输入弧).

经过以上三步, ζ_l 既不可观,亦不可控,与系统已无联系,可消去.上述运算在系统矩阵上相应的操作为

如下形式的极大代数方程组:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \oplus Bu(k+1), \\ y(k+1) = Cx(k+1) \oplus Du(k+1). \end{cases} \quad (6)$$

在上述建模的第二步用等价变换获得的极大代数方程比一般常用算法所获得的结果的阶更低一些,其算法为:

步骤 1 用消弧变换,消去所有无令牌的内部位置;

步骤 2 用消元变换的逆变换消去含令牌的输入输出位置;

步骤 3 用消弧变换,使所有内部位置只含一个令牌.

5 等价变换在计算传函矩阵中的运用 (The application of equivalent transformation in transfer function calculating)

用等价变换可以给出求传函矩阵的一般算法,且有如下优点:

① 一次性求出整个传函矩阵,包括其暂态部分和稳态部分;

② 全部在矩阵上操作,以标量运算代替求 P^* ;

③ 同时可以得到传函矩阵的一些特性.

以下的算法只用到消自环行变换和消弧行变换,适用于要求传函矩阵和输入内传函矩阵皆不变场合.运算在矩阵 $[P, Q]$ 上进行.先用消自环行变换使 $p_{11} = \varepsilon$,然后用消弧行变换使第 1 列其余元为 ε ,再对第 2, ..., l 列进行类似的处理,得到如下形式:

$$[P \quad Q] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1l} & q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2l} & q_{21} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{l1} & p_{l2} & \cdots & p_{ll} & q_{l1} & \cdots & q_{lm} \end{bmatrix} \xrightarrow{T_l} [P^{(l)} \quad Q^{(l)}] = \begin{bmatrix} \varepsilon & \cdots & \varepsilon & \varepsilon & q_{11}^{(l)} & \cdots & q_{1m}^{(l)} \\ \varepsilon & \cdots & \varepsilon & \varepsilon & q_{21}^{(l)} & \cdots & q_{2m}^{(l)} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varepsilon & \cdots & \varepsilon & \varepsilon & q_{l1}^{(l)} & \cdots & q_{lm}^{(l)} \end{bmatrix}.$$

以上变换有如下递推式:

$$\begin{cases} p_{ij}^{(k+1)} = p_{ij}^{(k)} \oplus p_{i,k+1}^{(k)} p_{k+1,k+1}^{(k)*} p_{k+1,j}^{(k)}, \\ i = 1, \dots, l; j = k+2, \dots, l; i \neq k+1; \\ p_{ij}^{(k+1)} = p_{k+1,k+1}^{(k)} p_{k+1,j}^{(k)}, \\ i = k+1; j = k+2, \dots, l; \\ p_{ij}^{(k+1)} = \epsilon, \\ i = 1, \dots, l; j = 1, \dots, k+1. \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} q_{ij}^{(k+1)} = q_{ij}^{(k)} \oplus q_{i,k+1}^{(k)} p_{k+1,k+1}^{(k)*} q_{k+1,j}^{(k)}, \\ i = 1, \dots, l; j = 1, \dots, m; i \neq k+1; \\ q_{ij}^{(k+1)} = p_{k+1,k+1}^{(k)*} q_{k+1,j}^{(k)}, \\ i = k+1; j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (9)$$

由式(9)及定理2,可求出传函矩阵和输入内传函矩阵为

$$\begin{cases} F = P^{(l)*} Q^{(l)} = Q^{(l)}, \\ H = RF \oplus W = RQ^{(l)} \oplus W. \end{cases} \quad (10)$$

6 结论(Conclusion)

本文提出的等价变换揭示了 DEDS 各种双子 M 模型的本质的、内在的联系.因为具有保持传函矩阵不变这一基本特性,它必将成为线性 DEDS 理论的重要组成部分,作为对该模型进行简化、规范化和研究其各项特性(周期性、稳定性、能控性及能观性等)的有力工具.

本文给出了三种常用的等价变换在系统矩阵上

的操作方法,计算方便,用标量计算的迭代代替了矩阵的星运算,易于在计算机上实现;文中还给出了等价变换在 TEG 图上的操作方法.

参考文献(References)

- [1] Cohen G, Dubois D, Quadrat J P, Viot M. A linear-system-theoretic view of discrete-event processes[A]. Proceedings of 22nd Conference on Decision and Control[C], San Antonio, 1983, 1039 - 1044
- [2] Cohen G, Dubois D, Quadrat J P, Viot M. Algebraic tools for the performance of discrete event systems[A]. Proceedings of IEEE[C], 1989, 77(1): 39 - 58
- [3] Cohen G, Dubois D, Quadrat J P, Viot M. Dating and counting events in discrete event systems[A]. 25th IEEE Conference on Decision and Control[C], Athens, Greece, 1986, 988 - 993
- [4] 彭永进,肖雁鸿,彭崇,冯月亮.离散事件动态系统[M].长沙:湖南科学技术出版社,1994
- [5] 陈文德,齐向东.离散事件动态系统一极大代数方法[M].北京:科学技术出版社,1994
- [6] 朱更新,郑大钟.离散事件动态系统广义分式方法[J].自动化学报,1993,19(3): 271 - 278
- [7] 吴昊.双子 M 矩阵的研究与应用[博士学位论文][D].长沙:湖南大学,1998

本文作者简介

吴昊 30岁,博士.主要研究方向:离散事件动态系统,现代控制理论及应用等.

肖雁鸿 34岁,副教授.主要研究方向:离散事件动态系统,变结构控制等.

彭永进 60岁,教授,博士生导师.主要研究方向:离散事件动态系统,电力电子技术,变结构控制等.