

文章编号: 1000-8152(2000)01-0050-05

伺服问题的二自由度镇定控制器参数化

谢 力

(北京邮电大学机电系·北京, 100876)

薛定宇

(东北大学控制仿真研究中心·沈阳, 110006)

摘要: 对于多输入多输出四块线性系统, 本文研究了存在跟踪和干扰抑制约束的二自由度镇定控制器参数化问题, 给出了一般条件下的伺服问题二自由度镇定控制器参数化表示;

关键词: 伺服问题; 二自由度镇定控制器参数化; Diophantine 方程

文献标识码: A

The Parametrization of Two-Degree-of-Freedom Stabilizing Controllers for the Servomechanism Problem

XIE Li

(Department of Mechanical and Electronic Engineering, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing, 100876, P. R. China)

XUE Dingyu

(Control and Simulation Research Centre, Northeastern University, Shenyang, 110006, P. R. China)

Abstract: For the MIMO and four-block linear systems, this paper considers the parametrization of two-degree-of-freedom stabilizing controllers with tracking and disturbance rejection constraints. The solutions of the servomechanism problem are parametrized by free, stable, rational and proper matrices under the general case.

Key words: servomechanism problem; two-degree-of-freedom stabilizing controller parametrization; Diophantine equations

1 引言 (Introduction)

二自由度控制器在解决伺服问题上比控制器采用单自由度结构有一定的优越性, 表现在首先可设计反馈控制器实现系统的反馈特性, 如稳定性和干扰抑制等, 然后设计另一控制器满足跟踪要求, 控制器参数化为实现控制系统多目标设计提供了可能性, 参数化的出发点是求取全体使系统内稳定的控制器, 所有镇定控制器由某一稳定传递矩阵参数表示, 选择一个参数矩阵, 就存在一个控制器使系统内稳定, 即矩阵参数与镇定控制器之间存在映射, 建立此映射的过程, 称为 Youla 参数化, 文献[1~3]发展了 Youla 参数化思想, 同时考虑了如下所谓伺服问题的二自由度镇定控制器参数化问题, 即系统要满足: 1) 闭环系统内稳定; 2) 系统具有渐近跟踪一类确定性信号的能力; 3) 系统具有渐近抑制对象输入端确定性干扰和可量测输出端确定性测量噪声的能力, 具体步骤是第一步参数化所有二自由度镇定控制器, 自由参数为 K_r 和 K ; 第二步是对自由参数 K_r 和 K 作一些限制, 使其满足 2) 和 3), 表现在进一

步参数化 K_r 和 K , 同时满足 2) 和 3), 参数为 G_1 和 G_2 , 由此建立了伺服问题的二自由度镇定控制器参数化表示, 为进一步实现各种优化设计建立了理论基础, 尽管如此, 本文注意到了以上工作的不足, 在如下几方面对上述工作进行了扩展与补充: 1) 建立了一般情形下参数化问题可解条件, 例如没有要求 Q_b 和 Ψ_d 等矩阵互质; 2) 利用了相应矩阵的可逆性及有理分式矩阵存在互质分解等性质, 避免了文献[1~3]相应矩阵方程的求解, 使得所要解的矩阵方程仅为 Bezout 和 Diophantine 方程; 3) 对于一类系统给出了更为简单的关于参数化问题解存在的充分条件。

记 $M(s)$ 为稳定的真有理分式矩阵集合, $L(s)$ 表示 $M(s)$ 中所有单模态矩阵集合; $+$ 表示闭的右复半平面; GCRD 表示最大右公因子; $A \otimes B$ 表示 A 和 B 的 Kronecker 积, 设 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $\text{vec}(A) = [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}, a_{12}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}]^T$, $\text{vec}(A)$ 简记为 $\underline{A}$; I 表示单位矩阵; $\det$ 表示矩阵的行列式值; 假定所有矩阵具有相容维数。

2 问题的提出与表示 (Problem formulation and preliminaries)

考虑如图 1 标准的多输入多输出四块线性系统, 控制器的实现采用二自由度结构. 系统存在如下关系:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & \bar{P}_1 \\ P_2 & \bar{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}, \\ u = [C_1 \quad -C_2] \begin{bmatrix} r \\ z - v \end{bmatrix} + w. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $C = [C_1 \quad -C_2]$ 表示控制器, r, u, y, z, d, w, v 分别表示参考输入、对象输入、可调节输出、可量测输出、广义干扰、虚拟输入干扰和量测噪声, 其中 w 的引入仅用于考虑系统的内稳定性. 图 1 控制系统内稳定要求控制器 C 使系统所有可能的传递函数矩阵都是稳定的真有理分式矩阵.

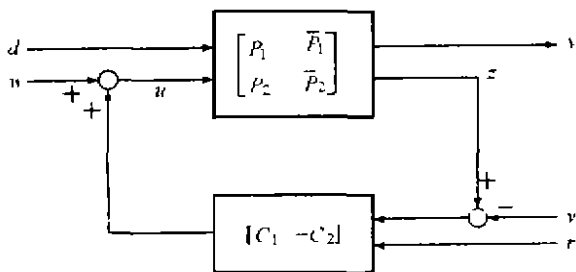


图 1 标准二自由度控制系统

Fig. 1 The standard two-degree-of-freedom control system

设 $Q_1 = SC_1, Q_2 = SC_2, S = (I + C_2 P_2)^{-1}$, 闭环系统的传递函数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} y \\ u \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 Q_1 & \bar{P}_1 - P_1 Q_2 \bar{P}_2 & P_1(I - Q_2 P_2) & P_1 Q_2 \\ Q_1 & -Q_2 \bar{P}_2 & I - Q_2 P_2 & Q_2 \\ P_2 Q_1 & \bar{P}_2 - P_2 Q_2 \bar{P}_2 & P_2(I - Q_2 P_2) & P_2 Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ w \\ v \end{bmatrix}. \quad (2)$$

注意并不是所有的标准控制系统 P 都可以通过选择控制器 C 达到内稳定, 如 $\bar{P}_2 = 0, \bar{P}_1$ 不稳定, y 与 d 之间的传递矩阵不稳定, 所以只能限定一类系统可以通过 C 实现标准控制系统内稳定, 此类 P 称为可允许的.

下面给出 P_2 在 $M(s)$ 上的双互质分解实现. 令 (D_2, N_2) 和 $(\tilde{D}_2, \tilde{N}_2)$ 分别是 P_2 的右和左互质分解, 存在 $X, \tilde{X}, Y$ 和 $\tilde{Y} \in M(s)$ 满足如下 Bezout 等式,

$$\begin{bmatrix} Y & X \\ -\tilde{N}_2 & \tilde{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2 & -\tilde{X} \\ N_2 & \tilde{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2 & -\tilde{X} \\ N_2 & \tilde{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & X \\ -\tilde{N}_2 & \tilde{D}_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

令 $Q_a = P_1 D_2, Q_b = \tilde{D}_2 \bar{P}_2, Q_c = \bar{P}_1 - P_1 D_2 X \bar{P}_2$, 那

么 P 是可允许的当且仅当 $Q_a, Q_b, Q_c \in M(s)^{[4]}$.

假定 1 $Q_a, Q_b, Q_c \in M(s)$.

在假定 1 的条件下, 文献[4]给出了使图 1 内稳定的二自由度镇定控制器的参数化表示:

$$(C_1, C_2) = \tilde{D}_c^{-1}(\tilde{N}_{c1}, \tilde{N}_{c2}) = (Y + K\tilde{N}_2)^{-1}[K_r, (X - K\tilde{D}_2)]. \quad (4)$$

其中 K_r 和 $K \in M(s)$ 满足 $I - Q_2 P_2 = D_2(Y + K\tilde{N}_2)$ 双真.

注意 w 的引入, 仅仅是出于闭环系统内稳定的考虑, 实际上可以并入到干扰 d 中, 故略去 w . 由 $(C_1, C_2) \rightarrow (Q_1, Q_2)$ 之间的映射关系, 可得

$$\begin{aligned} Q_1 &= SC_1 = D_2 K_r, \\ Q_2 &= SC_2 = D_2(X - K\tilde{D}_2). \end{aligned} \quad (5)$$

将 Q_1 和 Q_2 的表示代入式(2)并令 $w = 0$, 有

$$\begin{bmatrix} y \\ u \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_a K_r & Q_a K Q_b & Q_a(X - K\tilde{D}_2) \\ D_2 K_r & -(\tilde{X} - D_2 K) Q_b & D_2(X - K\tilde{D}_2) \\ N_2 K_r & (\tilde{Y} + N_2 K) Q_b & N_2(X - K\tilde{D}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ v \end{bmatrix}. \quad (6)$$

上式给出了系统内稳定的闭环系统传递矩阵的参数化表示.

引理 1^[5] 单边 Diophantine 方程 $XA + YB = E$, 其中 A, B 和 $E \in M(s)$, X 和 Y 是待求的 $M(s)$ 中矩阵, 其有解的充要条件是 A 与 B 的最大右公因子是 E 的右因式.

引理 2^[5] 给定 $A, B, E \in M(s)$, 如果 $\text{rank}[A \quad B] = n$, 且 X_0 和 Y_0 是单边 Diophantine 方程 $XA + YB = E$ 的一组特解, 那么其通解为

$$X = X_0 - TB_1, Y = Y_0 + TA_1$$

其中

$$\begin{aligned} A &\in M(s)^{p \times m}; B \in M(s)^{q \times m}; \\ X, X_0 &\in M(s)^{l \times p}; Y, Y_0 \in M(s)^{l \times q}; \\ E &\in M(s)^{l \times m}; A_1 \in M(s)^{(p+q-n) \times q}; \\ B_1 &\in M(s)^{(p+q-n) \times p}; T \in M(s)^{l \times (p+q-n)}, \end{aligned}$$

且 B_1 和 A_1 左互质, 满足等式 $B_1 A = A_1 B$.

引理 3 双边 Diophantine 方程 $AX + YB = E$, 其中 $B \in M(s)^{m \times m}, A \in M(s)^{l \times q}, E \in M(s)^{l \times m}$ 且 B 与 E 右互质, 如果 $EB^{-1} = \bar{B}^{-1}\bar{E}, \bar{E} \in M(s)^{l \times m}, \bar{B} \in M(s)^{l \times l}$ 且 $\bar{E}$ 与 $\bar{B}$ 左互质, 那么双边 Diophantine 方程有解的充要条件是 A 和 $\bar{B}$ 外斜互质. 当 $E = I$ 时, A 和 B 称为外斜互质.

引理 4 在双边 Diophantine 方程 $AX + YB = E$ 中, 假定存在如下关系, $\bar{B}E = \bar{E}B$, 其中 $\bar{E}$ 和 $\bar{B} \in$

$M(s)$, 如果 A 和 $\bar{B}$ 是外斜互质, 那么方程有解.

定义 1 系统需要渐近跟踪和渐近抑制的确定性信号的集合为: $S_a = \{\Psi_a^{-1}\mu_a, \Psi_a, \mu_a \in M(s) \mid$ 左互质, 满足 Ψ_a 双真, μ_a 严格真, $\det \Psi_a$ 的零点 $\in +\mid, \alpha = r, d, v$.

由定义 1, 有如下结论^[2]: 内稳定系统具有渐近跟踪和干扰渐近抑制能力, 当且仅当满足:

$$\begin{aligned}(I - P_1 Q_1) \Psi_r^{-1} &\in M(s), \\ (\bar{P}_1 - P_1 Q_2 \bar{P}_2) \Psi_d^{-1} &\in M(s), \\ P_1 Q_2 \Psi_m^{-1} &\in M(s).\end{aligned}$$

引理 3, 4 的证明可参考双边多项式 Diophantine 方程的有关结论^[6], 这里限于篇幅略去.

3 主要结果(Main results)

由以上分析可知伺服问题有解等价于存在 K_r , $K \in M(s)$, 使如下条件成立

$$\begin{cases} (I - Q_a K_r) \Psi_r^{-1} \triangleq W_r \in M(s), \\ (Q_a K Q_b + Q_c) \Psi_d^{-1} \triangleq W_d \in M(s), \\ Q_a (X - K \tilde{D}_2) \Psi_r^{-1} \triangleq W_v \in M(s), \\ D_2 (Y + K \tilde{N}_2) \text{ 双真.} \end{cases} \quad (7)$$

进一步可表示为

$$Q_a K_r + W_r \Psi_r = I, \quad (8a)$$

$$Q_a K Q_b - W_d \Psi_d = -Q_c, \quad (8b)$$

$$Q_a (X - K \tilde{D}_2) = W_v \Psi_r. \quad (8c)$$

同时满足 $D_2(Y + K \tilde{N}_2)$ 双真.

跟踪和干扰抑制约束的二自由度镇定控制器参数化就是首先要求方程有解及双真成立, 其次得到解的参数化表示.

3.1 伺服问题有解条件 (Existence conditions of the solution to the servomechanism problem)

由引理 3, 跟踪问题有解, 即(8a)有解当且仅当 Q_a 和 Ψ_r 外斜互质^[2].

假定 2 Q_a 和 Ψ_r 外斜互质, 即存在 $X_1, Y_1 \in M(s)$ 满足 $Q_a X_1 + Y_1 \Psi_r = I$.

当存在 K 同时满足方程(8b), (8c)时, 干扰渐近抑制问题有解. 首先研究方程(8b). 令 $M_1 = g.c.r.d.(Q_b, \Psi_d)$, $M_1 \in M(s)$, 当 $M_1 \notin U(s)$ 时, Q_b 与 Ψ_d 非右互质; 当 $M_1 \in U(s)$, Q_b 和 Ψ_d 是右互质的, 此时可简单地令 $M_1 = I$. 在文献[1~3]假定了二者是右互质的, 这里考虑了一般情况, 有如下式成立:

$$Q_b = Q_{b1} M_1, \quad \Psi_d = \Psi_{d1} M_1, \quad (9)$$

存在 X_2, Y_2 使

$$X_2 Q_{b1} + Y_2 \Psi_{d1} = I. \quad (10)$$

注意 Ψ_d 是非异方阵, M_1 也是非异方阵, 可认为 $Q_{b1} \Psi_{d1}^{-1}$ 表示一有理分式矩阵, 在 $M(s)$ 上也存在左互质分解为 $\bar{\Psi}_{d1}^{-1} \bar{Q}_{d1}$, 满足 $Q_{b1} \Psi_{d1}^{-1} = \bar{\Psi}_{d1}^{-1} \bar{Q}_{d1}$, 即

$$\Psi_{d1} Q_{b1} = Q_{b1} \Psi_{d1}. \quad (11)$$

假定 3 M_1 是 Q_c 的右因子, 即有 $Q_c = Q_{c1} M_1$. 同样 $(Q_{c1} X_2) \bar{\Psi}_{d1}^{-1}$ 在 $M(s)$ 上存在左互质分解, 使 $(Q_{c1} X_2) \bar{\Psi}_{d1}^{-1} = \tilde{\Psi}_{d1}^{-1} \tilde{Q}_{c1}$, 注意这里没有要求 $(Q_{c1} X_2)$ 和 $\bar{\Psi}_{d1}$ 右互质.

假定 4 Q_a 和 $\tilde{\Psi}_{d1}$ 外斜互质, 即存在 X_3 和 Y_3 满足 $Q_a X_3 + Y_3 \tilde{\Psi}_{d1} = I$.

引理 5 在以上假定 3 和假定 4 成立时, 方程(8b)有解

证 由假定 3 及引理 1 可知, 以 $Q_a K$ 作为一个变量时, 方程(8b)有解, 由式(9)~(11)得一特解为

$$(Q_a K)_0 = -Q_{c1} X_2, \quad (W_d)_0 = Q_{c1} Y_2. \quad (12)$$

根据引理 2, 方程(8b)的通解如下式:

$$Q_a K = -Q_{c1} X_2 - K_1 \bar{\Psi}_{d1}, \quad (13)$$

$$W_d = Q_{c1} Y_2 - K_1 \bar{Q}_{d1}, \quad \forall K_1 \in M(s) \quad (14)$$

由假定 4 和引理 4, 式(13)必有解, 其特解是

$$K = -X_3 Q_{c1} X_2, \quad K_1 = -Y_3 \bar{Q}_{d1}. \quad (15)$$

以及如下形式的 K, K_1 也是方程(8b)的解

$$\begin{cases} K = -X_3 Q_{c1} X_2 + K_2 \bar{\Psi}_{d1}, \\ K_1 = -Y_3 \bar{Q}_{d1} - Q_a K_2, \quad \forall K_2 \in M(s). \end{cases} \quad (16)$$

下面采用研究方程(8b)的方法研究方程(8c). 令 $M_2 = g.c.r.d.(\tilde{D}_2, \Psi_{r0})$, $M_2 \in M(s)$, 当 $M_2 \notin U(s)$ 时, $\tilde{D}_2, \Psi_{r0}$ 非右互质; 当 $M_2 \in U(s)$ 时, $\tilde{D}_2, \Psi_{r0}$ 右互质, 可简单地令 $M_2 = I$. 有如下关系:

$$\tilde{D}_2 = D_{21} M_2, \quad \Psi_{r0} = \Psi_{r1} M_2. \quad (17)$$

由 M_2 的定义, 知 D_{21}, Ψ_{r1} 右互质, 存在 $X_4, Y_4 \in M(s)$, $\bar{\Psi}_{r1}, \bar{D}_{21} \in M(s)$ 左互质, 满足

$$X_4 D_{21} + Y_4 \Psi_{r1} = I, \quad \bar{\Psi}_{r1} D_{21} = \bar{D}_{21} \bar{\Psi}_{r1}. \quad (18)$$

假定 5 M_2 是 $Q_a X$ 的右因子, 即有 $Q_a X = \bar{X} M_2$.

考虑 $Q_a K$ 作为一个变量, 由引理 3, 可知方程(8c)有解; 由式(17)~(25), 经过简单的代数运算, 我们可以得到方程(8c)的特解: $(Q_a K)_0 = \bar{X} X_4$, $(W_v)_0 = \bar{X} Y_4$. 根据引理 4, 我们有(8c)的通解为:

$$Q_a K = \bar{X} X_4 + K_2 \bar{\Psi}_{r1},$$

$$W_v = \bar{X} Y_4 - K_2 \bar{D}_{21}.$$

进一步假定 $(\bar{X} X_4) \bar{\Psi}_{r1}^{-1}$ 在 $M(s)$ 左互质分解为:

$$(\bar{X} X_4) \bar{\Psi}_{r1}^{-1} = \tilde{\Psi}_{r1}^{-1} \tilde{X}. \quad (19)$$

假定 6 假定 Q_a 和 $\tilde{\Psi}_{r1}$ 外斜互质, 即存在 X_5 ,

Y_5 满足 $Q_a X_5 + Y_5 \bar{\Psi}_{e1} = I$.

引理 6 假定 5 和 6 成立, 方程(8c)有解.

证 证明过程类似于引理 5, 其一特解: $K = X_5 \bar{X} X_4$, $W_e = \bar{X} Y_4 + Y_5 \bar{X} \bar{D}_{21}$. 如下 K, W_e 也是方程(8c)的解:

$$\begin{cases} K = X_5 \bar{X} X_4 + K_3 \bar{\Psi}_{e1}, \\ W_e = \bar{X} Y_4 + Y_5 \bar{X} \bar{D}_{21} - Q_a K_3 \bar{D}_{21}, \\ \forall K_3 \in M(s). \end{cases} \quad (20)$$

下面研究同时满足方程(8b), (8c)的 K 的存在条件. 当式(16)和式(20)相等时, 称 K 是干扰抑制问题的解. 令 $M_3 = \text{GCRD}(\bar{\Psi}_{d1}, \bar{\Psi}_{e1})$, $M_3 \in M(s)$. 当 $M_3 \notin U(s)$ 时, $\bar{\Psi}_{d1}, \bar{\Psi}_{e1}$ 非右互质; $M_3 \in U(s)$ 时, $\bar{\Psi}_{d1}, \bar{\Psi}_{e1}$ 右互质, 可令 $M_1 = I$, 有如下关系:

$$\bar{\Psi}_{d1} = \bar{\check{\Psi}}_{d1} M_3; \bar{\Psi}_{e1} = \bar{\check{\Psi}}_{e1} M_3; \bar{\check{\Psi}}_{d1}, \bar{\check{\Psi}}_{e1} \in M(s). \quad (21)$$

而且存在 $X_6, Y_6 \in M(s)$ 和 $\hat{\Psi}_{d1}, \hat{\Psi}_{e1} \in M(s)$ 左互质, 有

$$X_6 \bar{\check{\Psi}}_{d1} + Y_6 \bar{\check{\Psi}}_{e1} = I, \hat{\Psi}_{d1} \bar{\check{\Psi}}_{e1} = \hat{\Psi}_{e1} \bar{\check{\Psi}}_{d1}. \quad (22)$$

假定 7 M_3 是 $X_3 Q_{c1} X_2 + X_5 \bar{X} X_4$ 的右因子, 有 $M_4 \in M(s)$ 满足 $X_3 Q_{c1} X_2 + X_5 \bar{X} X_4 = M_4 M_3$.

引理 7 如果假定 3 ~ 假定 7 成立, 则干扰抑制问题有解.

证 由引理 5 和引理 6, 只需要证如下方程有解

$$K_2 \bar{\Psi}_{d1} - K_3 \bar{\Psi}_{e1} = X_3 Q_{c1} X_2 + \bar{X} X_4. \quad (23)$$

根据引理 1 和引理 2, 当假定 7 成立时, 方程(23)有解. K_2 的通解表示为

$$K_2 = M_4 X_6 + T_2 \bar{\check{\Psi}}_{e1}, \forall T_2 \in M(s). \quad (24)$$

代式(24)入式(16)有

$$\begin{cases} K = -X_3 Q_{c1} X_2 + M_4 X_6 \bar{\Psi}_{d1} + T_2 \bar{\check{\Psi}}_{e1} \bar{\Psi}_{d1}, \\ \forall T_2 \in M(s). \end{cases} \quad (25)$$

上式即为干扰抑制方程(8b), (8c)解 K 的表示, 此时 K 只是一类解, 而不是通解表示.

定理 1 a) 假定 1 和假定 2 成立, 渐近跟踪问题有解, 其一类特解是 $K_r = X_1 + T_1 \Psi_r, \forall T_1 \in M(s)$.

b) 假定 1, 假定 3 ~ 7 成立, 渐近干扰抑制问题有解, 其一类特解 K 在式(25)中给出, 同时 T_2 必须满足 $I - Q_{20} P_2$ 双真, $Q_{20} = D_2 N_0 + D_2 T_2 N_a, N_c = X - (M_4 X_6 \bar{\Psi}_{d1} - X_3 Q_{c1} X_2) \bar{D}_2, N_a = -\hat{\Psi}_{e1} \bar{\Psi}_{d1} \bar{D}_2$.

定理 1 的证明包括在以上结论和相关引理的证明中. 注意 K_r 和 K 并不是通解, 只是一类解, 这里只给出了解存在的充分条件.

3.2 伺服问题解的参数化 (Parametrization of the solutions to the servomechanism problem)

下面给出伺服问题解的参数化表示. 由式(1)知 $Q_a, \Psi_{r0}, \bar{\Psi}_{d1}, \bar{\Psi}_{e1}$ 维数分别为 $p \times m, p \times p, q \times q, q \times q; I_m$ 表示 $m \times m$ 单位阵, 其余类似.

假定 8 a) $Q_a \otimes I_p$ 和 $I_m \otimes \Psi_r^T$ 右互质; b) $Q_a \otimes I_q$ 和 $I_m \otimes \bar{\Psi}_{d1}^T$ 右互质; c) $Q_a \otimes I_q$ 和 $I_m \otimes \bar{\Psi}_{e1}^T$ 右互质.

下面的引理给出当 Q_a 是可逆方阵时, 假定 8 成立的充分条件, 其证明略.

引理 8 如果如下条件成立: a) $\det Q_a$ 与 $\det \Psi_r$ 互质; b) $\det Q_a$ 与 $\det \bar{\Psi}_{d1}$ 互质; c) $\det Q_a$ 与 $\det \bar{\Psi}_{e1}$ 互质, 那么假定 8 中相对应的条件成立.

定理 2 如果假定 1 ~ 假定 8 成立, 则矩阵方程(8a) ~ (8b)的解可参数化为:

$$K_r = X_1 + T_1 \Psi_r, \forall T_1 \in M(s), \quad (26)$$

$$K = -X_3 Q_{c1} X_2 + K_2 \bar{\Psi}_{d1}, \forall K_2 \in M(s), \quad (27)$$

$$K = \bar{X} X_4 + K_3 \bar{\Psi}_{e1}, \forall K_3 \in M(s), \quad (28)$$

其中式(27), (28)分别对应方程(8b), (8c); 同时满足方程(8b), (8c)的 K , 即干扰抑制方程的通解, 表示为:

$$\begin{cases} K = -X_3 Q_{c1} X_2 + M_4 X_6 \bar{\Psi}_{d1} T_2 + \bar{\check{\Psi}}_{e1} \bar{\Psi}_{d1}, \\ \forall T_2 \in M(s). \end{cases} \quad (29)$$

证 在以上假定成立时, 伺服问题有解, 充分性显然, 下面证必要性, 仅证式(27), 其余类似. 由引理 5 的证明过程可见, 只需得到式(13)的通解表示, 令 $(\bar{K}_1, \bar{K}_1), (\bar{K}_2, \bar{K}_2)$ 为式(13)的两组特解, 有

$$\begin{cases} Q_a \bar{K}_1 + \bar{K}_1 \bar{\Psi}_{d1} = -Q_{c1} X_2, \\ Q_a \bar{K}_2 + \bar{K}_2 \bar{\Psi}_{d1} = -Q_{c1} X_2, \end{cases} \quad (30)$$

有下式

$$Q_a (\bar{K}_1 - \bar{K}_2) \bar{\Psi}_{d1}^{-1} = -(\bar{K}_1 - \bar{K}_2). \quad (31)$$

利用 Kronecker 积和 vec 运算的性质^[7]有:

$$(Q_a \otimes I_q)(I_m \otimes \bar{\Psi}_{d1}^{-1})(\bar{K}_1 - \bar{K}_2) = \bar{K}_2, \bar{K}_2 \in M(s), \quad (32)$$

由假定 8(b)和引理 6(文献[4], P. 153)可得 $K_1 = \bar{K}_2 + K_2 \bar{\Psi}_{d1}, K_2 \in M(s)$, 设 $\bar{K}_2 = -X_3 Q_{c1} X_2$, 必要性得证.

综合以上结论, 本文得到了伺服问题解的存在条件和解的参数化表示. 利用式(26)和(29)最后可得到对应于以上问题的满足所有假定自由参数 Q_1

和 Q_2 表示:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_{10} + D_2 T_1 \Psi_r, \quad \forall T_1 \in M(s), \\ Q_2 &= Q_{20} + D_2 T_2 N_a, \quad \forall T_2 \in M(s). \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} y \\ u \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_a(X_1 + T_1 \Psi_r) & (Q_a D_0 + Q_c) + Q_a T_2 D_a & Q_a(N_0 + T_2 N_a) \\ D_2(X_1 + T_1 \Psi_r) & (D_2 D_0 - \bar{Y} Q_b) + D_2 T_2 D_a & D_2(N_0 + T_2 N_a) \\ N_2(X_1 + T_1 \Psi_r) & (N_2 D_0 - \bar{Y} Q_b) + N_2 T_2 D_a & N_2(N_0 + T_2 N_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ v \end{bmatrix}. \quad (34)$$

其中 $D_0 = (M_4 X_6 \bar{\Psi}_{d1} - X_3 Q_{c1} X_2) Q_b$, $D_a = \bar{\Psi}_v \bar{\Psi}_{d1} Q_b$. 由上式可见, 系统的传递矩阵可用自由参数 T_1 和 $T_2 \in M(s)$ 表示, 进一步可以得到伺服问题的二自由度镇定控制器参数化表示如下:

$$\begin{aligned} C &= [Y + (-X_3 Q_{c1} X_2 + M_4 X_6 \bar{\Psi}_{d1} + \\ & T_2 \bar{\Psi}_{v1} \bar{\Psi}_{d1}) \bar{N}_2]^{-1} [(X_1 + \\ & T_1 \Psi_{r0}) : (N_0 + T_2 N_a)], \end{aligned}$$

$\forall T_1, T_2 \in M(s)$ 满足 $I - Q_2 P_2$ 双真.

3.3 算例 (An example)

考虑如下 SISO 系统的干扰抑制问题

$$P(s) = \frac{s}{s-1}, \quad H(s) = 1, \quad P_1 = P, \quad P_2 = HP,$$

$$\bar{P}_1 = P_1, \quad \bar{P}_2 = P_2, \quad d_0 = 1/s, \quad v_0 = \frac{1}{s^2 + 2}.$$

这里 $M_1 = g.c.r.d.(Q_b, \Psi_{d0}) = \frac{s}{s+1}$, 显然满足假定 1 ~ 8, 有

$$K = \frac{s(5-s)(s+4)}{3(s+1)^3} + T_2 \frac{s^2 + 2}{(s+1)^2}, \quad \forall T_2 \in M(s),$$

文献[1]没有考虑此例情况.

4 结论 (Conclusion)

本文在以下三个方面对文献[1~3]的工作做了补充: 1) 考虑了 Q_b 和 $\Psi_d, \bar{D}_2$ 和 $\Psi_r, \bar{\Psi}_{d1}$ 和 $\bar{\Psi}_{v1}$ 分别存在非单模态矩阵因子情况, 对应满足可解条件的系统, 给出了伺服问题解的存在条件和解的参数化表示; 2) 利用了 Ψ_r 等阵的可逆性及有理分式矩阵在 $M(s)$ 存在左和右互质分解等性质, 避免了一些矩阵方程的求解; 3) 当 Q_a 是可逆方阵时, 建立了

其中 $Q_{10} = D_2 X_1, Q_{20} = D_2 N_0, N_0 = X - (M_4 X_6 \bar{\Psi}_{d1} - X_3 Q_{c1} X_2) \bar{D}_2, N_a = -\bar{\Psi}_v \bar{\Psi}_{d1} \bar{D}_2, T_2$ 满足 $I - Q_2 P_2$ 双真. 对应的控制系统的闭环传递矩阵为:

引理 8, 这样可用先验证 $\det Q_a$ 与 $\det \Psi_r$ 等互质性, 一旦满足条件, 可避免 Kronecker 积的运算. 由此本文给出了一般情况下, 伺服问题的二自由度镇定控制器解的存在条件和解的参数化表示.

参考文献 (References)

- [1] Da Silveira M A and Correa G O. On the parametrization of solutions to the servomechanisms problem[J]. Automatica, 1991, 27(6): 1035 - 1038
- [2] Da Silveira M A and Correa G O. H_2 -optimal control of linear system with tracking/disturbance rejection constraints[J]. Int. J. Control, 1992, 55(5): 1115 - 1139
- [3] Correa G O and Da Silveira M A. On the design of servomechanisms via H_2 -optimization[J]. Int. J. Control, 1995, 61(2): 475 - 491
- [4] Vidyasagar M. Control System Synthesis: a Factorization Approach [M]. Cambridge, Mass: MIT Press, 1985
- [5] Kucera V. Diophantine equations in control—a survey[J]. Automatica, 1993, 29(6): 1361 - 1375
- [6] Wolovich W A. Skew Prime Polynomial Matrices[J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1978, 23(5): 880 - 887
- [7] Brewer J W. Kronecker products and matrix calculus in system theory [J]. IEEE Trans. Circuits and Systems, 1978, 25(9): 772 - 781
- [8] Nett C N. Algebraic aspects of linear control system stability[J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1986, 31(10): 941 - 949

本文作者简介

谢力 1965 年生, 1996 年 4 月在哈尔滨工业大学获得工学博士学位. 现在北京邮电大学机电系任教. 主要研究方向为线性和非线性系统理论等.

薛定宇 1963 年生, 1992 年英国 Sussex 大学博士. 现为东北大学控制仿真研究中心教授. 研究方向为系统仿真与控制.