

文章编号: 1000-8152(2000)01-0055-05

55-59

关于混沌系统的鲁棒和自适应同步化*

王福田 洪奕光

(中国科学院系统科学研究所·北京, 100080)

0231

摘要: 针对混沌非线性系统的同步化问题, 给出了一个较为一般的模型; 我们利用混沌吸引子的特有性质(如混沌吸引子有界性等), 对于所给模型, 采用滑动模控制律实现了混沌同步化; 在误差可观测的条件下, 设计了观测器, 并采用自适应滑动模控制律使得混沌非线性系统可以达到给定的同步化误差界。

关键词: 混沌系统; 自适应; 同步化; 滑动模; σ -修正

文献标识码: A

~~非线性系统~~

同步化问题

非线性系统

On Robust and Adaptive Synchronization of Chaotic Systems

WANG Futian and HONG Yiguang

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing, 100080, P. R. China)

Abstract: In this paper, the problem of robust (adaptive) synchronization of chaotic nonlinear systems with a unified model is considered. Two main methods are proposed in different cases. Sliding mode control is used when the states of the two synchronized systems can be measured, though the considered systems may contain uncertain parts. Adaptive control with an observer is employed when only output information about the systems is known, where sliding mode control is also adopted to improve the robustness of the adaptive control systems.

Key words: chaotic systems; adaptive; synchronization; sliding mode; σ -modification

1 引言(Introduction)

近年来, 混沌控制和混沌同步化成为混沌研究的一个非常活跃的领域。Pecora 和 Carroll 最早进行了混沌同步化的研究, 在文献[1]中提出一种在电子电路实验中可实现的同步化方案, 且从理论上阐明了其原理。随后又进行了混沌同步化应用于秘密通讯等方面的研究。文献[2]给出了关于混沌系统同步化一般性的理论框架, 定义了相关的基本概念。

考虑如下非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) + w(t), & x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n, & (1.1a) \\ \dot{y} = g(y, t), & y(0) = y^0 \in \mathbb{R}^m. & (1.1b) \end{cases}$$

其中 $x, y \in \mathbb{R}^n, f, g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 连续, $f(0, t) = 0, g(0, t) = 0, w(t)$ 可以是未知外扰。为了使其中一个系统的输出跟踪另一个系统, 或使两个系统的状态达到同步, 我们对系统(1.1a)引入控制, 变成如下形式:

$$\dot{x} = f(x, t) + w(t) + B_0 u(t). \quad (1.2)$$

其中 $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times m}, u(t) \in \mathbb{R}^m$ 。如果使得当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x \rightarrow y$, 则称两个系统完全同步化; 如果使得当 $t \rightarrow \infty$ 时, x 的某些分量趋向于 y 的相应分量, 则称两个

系统部分同步化。通常称式(1.2)为被驱动系统, 式(1.1b)为驱动系统。

将(1.2)与(1.1b)两式相减得

$$\dot{e}_0 = f(x, t) - g(y, t) + w(t) + B_0 u(t), \quad (1.3)$$

其中 $e_0(t) = x(t) - y(t)$, 则两个系统的同步化问题化为误差系统(1.3)在原点的全局镇定问题。

目前同步化方法有很多, 如文献[3~5], 既有传统的反馈方法, 又有滑动模、自适应等。各种各样的方法一般只是针对某一类特定系统, 或几种形式上相近的系统提出一个相对一般的非线性系统模型, 根据所具有的动力学特性给出控制或同步化方法, 至今还未有对完全一般的混沌系统进行同步化的具体而又完整的方法。例如, 文献[2, 3]给出 Duffing 方程和 Chua 电路的同步化。对于混沌系统的控制往往利用系统所包含的混沌特性, 比如混沌系统通常存在有界的混沌吸引子, 且包含有众多的(不稳定的)周期轨道, 进行混沌同步的设计。

本文给出了一类较为一般的非线性系统模型, 这个模型可以包含文献[3]等文中的系统模型, 并考虑了对这一类较一般的混沌系统进行同步化。对于这个模型, 依靠混沌通常所有的特性作为基本假设, 理

* 基金项目: 国家自然科学基金(69774008), 国家攀登计划项目基金(97021401)资助项目。

收稿日期: 1997-3-17; 收修改稿日期: 1999-6-7

论上给出了滑动模控制方法,随后讨论系统状态不完全可知条件下的混沌系统同步化问题.众所周知,非线性观测器设计本身就是一个难点,以往通常只对某一具体的混沌系统设计观测器^[6],而本文利用混沌特性给出了一个较为一般的观测器设计.我们通过观测器设计,再加上自适应滑动模控制策略,使混沌系统达到所期望的同步误差.

2 基于全状态的混沌同步化(Synchronization based on full state)

假定所考虑的混沌系统的稳态混沌吸引子是有界的.进一步考虑式(1.3),我们给出

假定 A1 假定存在 B_0 和通过一定的微分同胚变换 $e = \phi(e_0)$, (且 $\phi(0) = 0$), 使得系统(1.3)化为:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = Ae_1 + B(u(t) + h(e, y)), \\ \dot{e}_2 = \eta(e_1, e_2, y). \end{cases} \quad (2.1)$$

这里, $e_1(t) \in \mathbb{R}^m$, $e_2(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$, $\eta(e_1, e_2, y)$ 关于 e_1, e_2 二次连续可微, 并且, (A, B) 能控; 零动态

$$\dot{e}_2 = \eta(0, e_2, y) \quad (2.2)$$

对于 y 一致指数渐近稳定, 这个条件称为一致最小相位条件.

关于这种微分同胚变换的非线性几何理论可参见文献[7].

因此在此假定下, 系统(1.3)的镇定问题就转化为系统(2.1)的镇定问题.

注 1 在同步化问题中, B_0 以及 B 在某种情况下可以人为地选取, 这也是混沌控制和混沌同步化问题所具有的特殊性, 这和以往一般意义下的控制问题有所不同. 因此, 我们通过人为地选择 B (外加控制的形式)使得文中的假定在许多情况下能够成立. 这要比文献[3]的假设有更大的自由度.

注 2 系统模型(2.1)是一类相对比较广泛的模型. 易知, Duffing 方程和一些 Chua 电路满足本节的假设, 而控制加在第一个变量上的 Lorenz 系统满足本节的假设, 但不满足文献[3]的假定. 实际上, 本节的假设使得我们能够解决一些带有零动态的混沌系统的同步化问题.

下面我们分两种情况进行讨论.

情况 1 若 h 结构已知, 我们可以采用状态反馈控制:

$$u(t) = -Ke_1(t) - h(e, y). \quad (2.3)$$

其中, 取 K 使得 $L = A - BK$ 的特征值在负半平面.

定理 1 假定 A1 成立, 且 h 结构已知, 则采用

(2.3)的控制作用在系统(2.1)上, 可以保证闭环系统在原点渐近稳定.

证 将控制律(2.3)代入系统(2.1), 得闭环系统:

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = Le_1(t), \\ \dot{e}_2(t) = \eta(e_1(t), e_2(t), y). \end{cases} \quad (2.4)$$

由假定 A1, 系统是一致最小相位系统, 即 $e_2(t) = \eta(0, e_2(t), y)$ 在 $e_2(t) = 0$ 是指数渐近稳定的, 故根据逆 Lyapunov 定理, 存在 Lyapunov 函数 $V_0(e_2(t))$ 和正常数 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ 使得下式满足:

$$\begin{cases} \alpha_1 \|e_2(t)\|^2 \leq V_0(e_2(t)) \leq \alpha_2 \|e_2(t)\|^2, \\ \frac{\partial V_0}{\partial e_2} \eta(0, e_2(t), y) \leq -\lambda_1 \|e_2(t)\|^2, \\ \left\| \frac{\partial V_0(e_2(t))}{\partial e_2} \right\| \leq \lambda_2 \|e_2(t)\|. \end{cases} \quad (2.5)$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ 是和 $\eta(0, e_2(t), y)$ 有关的正常数.

对 $V_0(e_2(t))$ 沿系统(2.4)的轨线微分可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(e_2(t)) &\leq \\ &-\lambda_1 \|e_2(t)\|^2 + \lambda_2 \|e_2(t)\| \cdot \\ &\quad \|\eta(e_1(t), e_2(t), y) - \eta(0, e_2(t), y)\|. \end{aligned}$$

由于 $\eta(e_1(t), e_2(t), y)$ 关于 $e_1(t), e_2(t)$ 二阶可微, 则对于原点的一个邻域

$\Omega(c) = \{(e_1(t), e_2(t)) : \|(e_1(t), e_2(t))\| \leq c\}$, (注意: 由于 c 是人为给定的, 故根据设计要求, Ω 可取得充分大,) 存在 $l(c) > 0$, 对任意 $(e_1(t), e_2(t)) \in \Omega(c)$ 使得

$$\|\eta(e_1(t), e_2(t), y) - \eta(0, e_2(t), y)\| \leq l(c) \|e_1(t)\|.$$

于是,

$$V_0(e_2(t)) \leq -\lambda_1 \|e_2(t)\|^2 + \lambda_2 l(c) \|e_2(t)\| \|e_1(t)\|$$

取正定矩阵 Q , 使得

$$\lambda_{\min}(Q) \geq \frac{(\lambda_2 l(c))^2}{\lambda_1}.$$

其中 $\lambda_{\min}$ 表示矩阵最小特征值.

由于 Q 正定, 可知存在唯一正定矩阵 P , 使得 $L^T P + PL = -Q$. 取

$$V(e_1(t), e_2(t)) = V_1(e_1(t)) + V_0(e_2(t)),$$

则 $V(e_1(t), e_2(t))$ 正定. 对 V 沿系统(2.4)的轨线微分, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1(t), e_2(t)) &\leq \\ &-(\lambda_{\min}(Q) - \frac{(\lambda_2 l(c))^2}{2\lambda_1}) \|e_1(t)\|^2 - \frac{\lambda_1}{2} \|e_2(t)\|^2. \end{aligned}$$

于是得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$. 证毕.

情况 2 若 h 结构未知, 由于系统混沌吸引子是有界的, 因而我们可以利用混沌吸引子的有界特性, 通常假定驱动系统已基本达到稳态, 即 $\|y\|$ 是有界的, 于是我们可以进一步作如下假设: 存在 $W(e) > 0$ 使得

$$\|h(e, y)\| < W(e). \quad (2.6)$$

其中 W 为与 e 有关的正数.

定理 2 假设系统(2.1)满足 A1 和式(2.6), 采用如下控制律:

$$u(t) = -Ke_1(t) - W(e)D(e_1(t)). \quad (2.7)$$

其中 $D: e_1(t) \mapsto D(e_1(t)) \in \mathbb{R}^m$,

$$D(e_1(t)) \triangleq \begin{cases} \|B^T P e_1(t)\|^{-1} B^T P e_1(t), & B^T P e_1(t) \neq 0; \\ 0, & B^T P e_1(t) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

则系统(2.1)的闭环系统关于原点是渐近稳定的.

证 将式(2.7)代入系统(2.1)得闭环系统:

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = L e_1(t) + B(W(e)D(e_1(t)) + h(e, y)), \\ \dot{e}_2(t) = \eta(e_1(t), e_2(t), y), \end{cases} \quad (2.9)$$

取 $V_1(e_1(t)) = e_1(t)^T P e_1(t)$, 则对 V_1 沿(2.9)的轨线微分可得:

$$\dot{V}_1(e_1(t)) \leq -e_1(t)^T Q e_1(t).$$

采用与定理 1 相类似的方法可得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0.$$

证毕.

注 3 当 $W(e) = W$ 是常数, 且 W 未知时, 可采用自适应滑动模控制律实现混沌同步化^[4].

3 利用量测的同步化 (Synchronization using output)

关于混沌非线性系统的控制和同步化问题, 已有的方法往往是假设系统是完全可以量测的, 而实际上在某些特定情况下, 我们只知道其中某些状态的值, 而同样作为系统状态, 它们的高阶导数却是未知的; 又比如, 在保密通讯中, 我们只发送输出, 系统的状态都是未知的. 因此, 在进行控制器设计之前, 首先要设计观测器, 然后才设计控制器, 去实现混沌非线性系统的同步化.

由于系统中有一些未知的不能确定的因素, 一般的观测器设计不能达到所要求的精度, 我们只好采用高增益观测器. 对于高增益观测器, 混沌非线性系统是有界奇怪吸引子或周期轨道这个基本假设也是必需的.

考虑如下非线性系统

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = A e_1 + B(u + h(e, y)), \\ \dot{e}_2 = \eta(e_1, e_2, y), \\ z = C e_1. \end{cases} \quad (3.1)$$

这里, $e_1(t) \in \mathbb{R}^m$, $e_2(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$, $\eta(e_1(t), e_2(t), y)$ 关于 $e_1(t), e_2(t)$ 二次连续可微, 且假定如下:

假定 A2 (A, B) 能控; 零动态 $\dot{e}_2 = \eta(0, e_2, y)$ 对于 y 一致指数渐近稳定; (A, C) 可观.

注 4 系统(3.1)中的 z 或 C 是可以人为选取的, 因此假定 (A, C) 可观也不苛刻.

注 5 我们假定 $y(t)$ 已经非常邻近混沌吸引子 S , 假定吸引子 S 的平均中心为 y_0 , 令 $B(y_0, r)$ 为 y_0 为中心, 半径为 r 的闭球, 且 $y(t) \in B(y_0, r)$, $S \subset B(y_0, r)$; 并假定混沌吸引子具有充分大的吸引域 Θ , 下面我们的目的是选定一个紧集 $\Omega \subset \Theta$, 使得当 $\|e(t)\| \leq 2r$ 时, $x(t) \in \Omega$ 成立, 对于 Ω , 可以采用如下取法:

显然, 当 $x(t) \in B(y_0, r)$, $y(t) \in B(y_0, r)$ 时, $\|e(t)\| \leq 2r$; 取 $R = 3r$, 令 $B(y_0, R)$ 为 y_0 为中心, R 为半径的闭球, 由于混沌吸引子具有充分大的吸引域 Θ , 我们可以选取 $\Omega \supset B(y_0, R)$, 且 $\Omega \subset \Theta$. 由于 Ω 是紧集, 所以存在 $W_\Omega > 0$ 使得当 $x(t) \in \Omega$ 时有

$$\|h(e, y)\| = \|h(x(t) - y(t), y(t))\| < W_\Omega. \quad (3.2)$$

因此, 我们可以作如下假定:

假定 A3 假定混沌吸引子的吸引域 Θ 充分大, 使得我们选取的 $\Omega \subset \Theta$, 于是总存在 $W_\Omega > 0$, 使得式(3.2)成立.

实际上, 我们对于系统(3.1)可采用如下(控制)策略: 关于被驱动系统(1.2), 对任意给定的初值 x_0 , 由于混沌吸引子具有充分大的吸引域, 我们对于系统不施加控制, $x(t)$ 也会进入吸引子 $B(y_0, r)$ 的范围内. 当 $x(t) \in B(y_0, r)$, 我们就施加某种控制, 使得 $\|e(t)\| \leq 2r$, 于是 $x(t)$ 就在 Ω 中, 从而保证系统(3.2)一直成立.

由假定 A2 和 A3 对于系统(3.1)我们可以设计如下的观测器

$$\dot{\hat{e}}_1(t) = A \hat{e}_1(t) + B u(t) - K_0(z - C \hat{e}_1). \quad (3.3)$$

其中 $\hat{e}_1$ 为 $e_1(t)$ 的估计, 定义观测误差 $\epsilon(t) = e_1(t) - \hat{e}_1(t)$ 将系统(3.1)减式(3.3)得

$$\dot{\epsilon}(t) = L_0 \epsilon(t) + B h(e, y), \quad L_0 = A + K_0 C. \quad (3.4)$$

由假定 A2, (A, C) 可观测, 我们可以选择 K_0 使得

L_0 的特征根在负半平面, 且存在正定矩阵 P_0 满足

$$P_0 L_0^T + L_0 P_0 = -Q_0 = -\lambda_0 I. \quad (3.5)$$

现在讨论 $\|h(e, y)\| < W_\Omega$, W_Ω 未知的情形. 这时通常采用非线性自适应控制器, 利用 W_Ω 的估计值 $k(t)$ 代替 W_Ω 进行设计, 在实际控制过程中, 由于外界干扰和未建模动态往往是不可避免的, 这样会引起系统不稳定^[8], 克服这种未建模动态或外界干扰的有效方法是对参数 W_Ω 的估计采用 σ -修正^[7]. 因此, 在这里我们采用带有 σ -修正的参数估计律.

由于系统的复杂性, 下面的分析不是十分严格, 但具有(理论上的)启发性.

对于系统(3.1)假定 A_2, A_3 成立, 且 W_Ω 未知. 对于系统(3.1)采用如下控制律

$$u(t) = -K\hat{e}_1(t) - k(t)D(\hat{e}_1(t)) \quad (3.6)$$

和参数估计律

$$\dot{k}(t) = \|B^T P e_1\| - \sigma k(t). \quad (3.7)$$

将控制律(3.6)代入系统(3.1)得闭环系统:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A - BK)e_1(t) + B(K\hat{e}_1(t) - k(t)D(\hat{e}_1(t)) + h(e, y)); \\ \dot{e}_2(t) = \eta(e_1(t), e_2(t), y). \end{cases} \quad (3.8)$$

令 $V(t) = \epsilon(t)^T P_0 \epsilon(t)$, 则对 $V(t)$ 沿式(3.4)微分得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -\epsilon^T(t) Q_0 \epsilon(t) + 2\epsilon^T P_0 B h(e, y) \leq \\ & -(\lambda_0 - \frac{1}{\delta}) \|\epsilon(t)\|^2 + \delta \|P_0 B\|^2 W_\Omega^2. \end{aligned}$$

其中 δ 由下面分析而定. 令

$$\begin{aligned} V(t) = & e_1(t)^T P e_1(t) + (k(t) - W_\Omega)^2 + \\ & V_0(e_2(t)) + V'(\epsilon(t)), \end{aligned}$$

则对 $V(t)$ 沿式(3.6), (3.7)和式(3.4)的轨线微分, 经分析化减可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -c_0 (\|e_1(t)\|^2 + \|e_2(t)\|^2 + \\ & \|\epsilon(t)\|^2 + (W_\Omega - k(t))^2) + \bar{c}. \end{aligned}$$

其中使

$$c_0 \triangleq \min\{\lambda_{\min}(Q) - 1 - \frac{(\lambda_2 l(c))^2}{2\lambda_1}, \frac{\lambda_1}{2}\},$$

$$\lambda_0 - \frac{2}{\delta} - (\|PBK\|^2 + \frac{1}{\sigma} \|PB\|^2), \frac{\sigma}{2} \} > 0,$$

$$\bar{c} \triangleq [\sigma + \delta(4\|PB\|^2 + \|P_0 B\|^2)] W_\Omega^2 > 0.$$

令

$$\begin{aligned} \bar{V}(e_1(t), e_2(t), \epsilon(t)) \triangleq & \|e_1(t)\|^2 + \|e_2(t)\|^2 + \\ & \|\epsilon(t)\|^2 + (k(t) - W_\Omega)^2. \end{aligned}$$

$$\text{则} \quad \dot{V}(t) \leq -c_0 \bar{V}(t) + \bar{c}.$$

由(2.5)知

$$c_1 \bar{V}(t) \leq V(t) \leq c_2 \bar{V}(t).$$

$$\text{其中} \quad c_1 \triangleq \min\{\lambda_{\min}(P), \alpha_1, \lambda_{\min}(P_0), 1\},$$

$$c_2 \triangleq \max\{\lambda_{\max}(P), \alpha_2, \lambda_{\max}(P_0), 1\}.$$

$$\text{则} \quad \dot{V} \leq -cV + \bar{c}, \quad c \triangleq \frac{c_0}{c_2}.$$

$$\text{又可得} \quad 0 \leq V(t) \leq \rho + [V(0) - \rho]e^{-ct}.$$

其中 $\rho = \frac{\bar{c}}{c}$ 于是

$$\bar{V}(t) \leq \frac{V(t)}{c_1} \leq \frac{\rho}{c_1} + \frac{1}{c_1} [V(0) - \rho]e^{-ct}.$$

于是令 $\epsilon_0 > \sqrt{\frac{\rho}{c_1}}$, 则对于某给定的 ϵ_0 , 比如取 $\epsilon_0 =$

$2\sqrt{\frac{\rho}{c_1}}$, 存在 $t^* > 0$, 使得当 $t > t^*$ 时, 有 $\|e\| \leq \epsilon_0$.

4 计算机仿真研究(Simulation results)

本节中我们对 Lorenz 系统采用第二、三节的同步化方法, 在计算机上实现了混沌同步化.

图 1, 2 是在控制律(2.3)下的 e_2 和 e_3 的轨迹图, 因篇幅所限, 在控制律(2.7)下的仿真结果暂时略去. 图 3 和图 4 分别为在控制律(3.6)下的同步化误差 e_3 的轨迹图和 W_Ω 的估计曲线图.

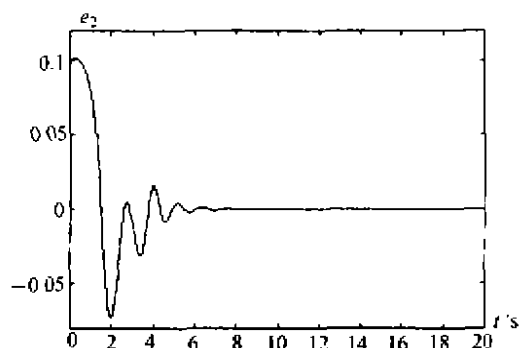


图 1 Lorenz 方程的混沌同步化误差

Fig. 1 Synchronization error of Lorenz equation

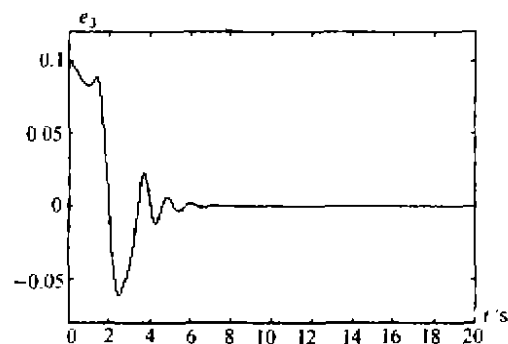


图 2 Lorenz 方程的混沌同步化误差

Fig. 2 Synchronization error of Lorenz equation

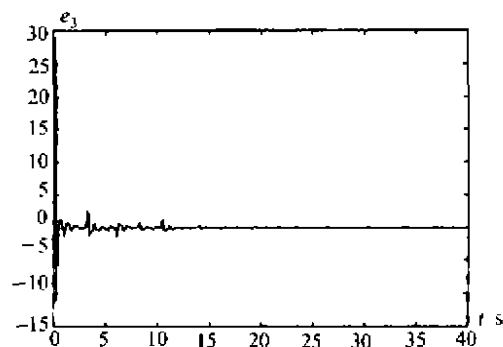
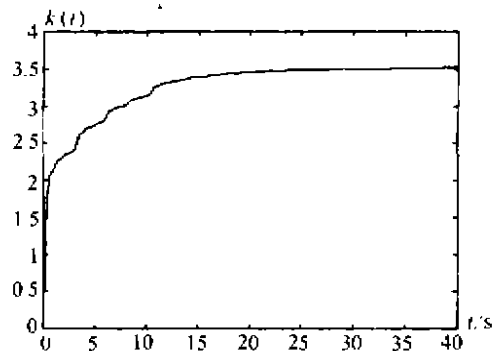


图3 Lorenz方程的混沌同步化误差

Fig. 3 Synchronization error of Lorenz equation

图4 W_0 的估计Fig. 4 Estimation of W_0

5 结论(Conclusion)

本文对于混沌非线性系统给出了一个较为一般的模型,对于这个模型我们采用了滑动模控制律和自适应滑动模控制律,实现了混沌同步化.本文的理论分析和仿真结果都显示了方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Pecora L M and Carroll T L. Synchronization in chaotic systems [J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8): 821 - 824
- [2] Wu C W and Chua L O. A unified framework for synchronization and control of dynamical systems [J]. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1994, 4(4): 979 - 998
- [3] Bernardo M D. An adaptive approach to the control and synchronization of continuous-time chaotic systems [J]. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1996, 6(6): 557 - 568
- [4] 王福田, 洪奕光. 连续时间混沌非线性系统的自适应同步化 [A]. 中国控制会议论文集[C], 庐山, 1997, 363 - 366
- [5] Chen G and Dong X. *From Chaos to Order* [M]. Singapore: World Scientific, 1998
- [6] Nijmeijer H and Berghuis H. On Lyapunov control of Duffing equation [J]. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 1995, 42(8): 473 - 477
- [7] Isidori A. *Nonlinear Control Theory* [M]. New York: Springer-Verlag, 1989
- [8] Ioannou P A and Kokotovic P. Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control [J]. *Automatica*, 1984, 20(5): 583 - 594

本文作者简介

王福田 1968年生, 1991年在山东大学数学系本科毕业, 1994年在曲阜师范大学获理学硕士学位, 1997年在中科院系统科学研究所获理学博士学位. 现工作单位为信息产业部信息化工程总体研究中心. 主要研究兴趣包括自适应控制, 混沌控制以及计算机网络.

洪奕光 1966年生, 1987年和1990年在北京大学获学士和硕士学位, 1993年在中国科学院系统科学研究所获博士学位, 毕业后留在研究所工作. 从1995年起为研究所副研究员. 主要研究兴趣包括非线性控制, 机器人控制及混沌控制等