

不确定离散时间系统的变结构控制

于双和 傅佩琛 强文义
(哈尔滨工业大学控制工程系·哈尔滨, 150001)

TP271.8

0231

摘要: 常规变结构控制用于不确定系统, 须利用不确定性界确保系统的鲁棒性, 控制器过于保守且抖振变大。本文把未知干扰和参数不确定性的影响等效为名义系统的外界干扰, 利用时延技术对干扰进行在线估计, 并将估计值引入到变结构控制中, 从而抵消掉系统中的慢变不确定性, 利用离散趋近律法, 推出了准滑动模态的存在条件及其带宽。该方法克服了以往控制方法中须已知不确定性界的限制, 且不必满足匹配条件, 用较低的控制增益保证了系统的鲁棒性, 降低了准滑动模态带即削弱了抖振。

关键词: 变结构控制; 离散时间系统; 不确定性估计; 准滑动模态
文献标识码: A

鲁棒性

Uncertain Discrete-Time Variable Structure Control Systems

YU Shuanghe, FU Peichen and QIANG Wenyi

(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, 150001, P. R. China)

Abstract: The conventional variable structure control technique for uncertain system requires that the uncertainty bound is known as a premise to assure robustness. The requirement creates an over-conservative controller and enlarges chattering. The proposed controller regards the influence of unknown disturbances and parameter uncertainties as an equivalent disturbance and generates an on-line estimation used in SMC to cancel the slowly varying uncertainties by the mechanism of time delay. The reaching law approach is used to get the conditions and band of quasi-sliding mode. The new methodology offers a robust feedback control with much lower gains and reduces chattering without a prior knowledge of the uncertainty bounds or matched conditions.

Key words: variable structure control; discrete-time systems; uncertainty estimation; quasisliding mode

1 引言 (Introduction)

变结构控制已成功地应用于不确定连续时间系统, 但是当采用计算机实现变结构方案时, 由于采样过程限制了滑动模态的存在, 状态轨迹以抖动形式沿着滑动面运动。在离散情况下, 滑动模态的性质、存在及到达条件已知改变。离散变结构控制独具的特色吸引了众多学者的兴趣。

离散时间系统变结构控制两个主要问题: 一是满足到达条件。Dote and Hofit 首次考虑了离散时间系统变结构控制, 并提出了与连续系统相对应的离散系统到达条件^[1]; Milosavljevic 提出了准滑动模态的思想, 进而指出上述条件并不充分^[2]; Sapturk 进一步给出了离散变结构控制的趋近和滑动条件^[3]; Furuta 以李雅普诺夫函数形式给出了新的到达条件^[4]。所有这些到达条件都未完全描述出离散滑动模态的令人满意的特征。高为炳定义了准滑动模态及其详细物理解释, 给出了更一般的到达条件即离

散趋近律, 推导了名义系统的准滑动模态带宽^[5]。二是在不确定性存在时保持状态轨迹呈准滑动模态。文[6]把不确定性的界引入到变结构控制来保证准滑动模态的存在, 这种方法的不足之处在于:

- 1) 设计者须首先知道不确定性的界, 而在实际中可能无法估计。
- 2) 变结构控制过于保守(高的反馈增益)且抖振加剧。

与文[6]相比, 本文的主要贡献是:

- 1) 不须首先知道不确定性的界, 而通过观察系统响应在线估计系统中的不确定性, 并将估计值引入控制器中以抵消掉系统中的慢变不确定性。
- 2) 推导了不确定系统在该控制方法下的准滑动模态存在条件及其带宽。
- 3) 不确定性包括控制通道的参数变化, 且不必满足匹配条件。

2 离散变结构控制 (Discrete variable structure control)

考虑下述不确定离散系统

$$x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + (B + \Delta B)u(k) + d(k). \quad (1)$$

式中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, (A, B) 可控, $\Delta A, \Delta B$ 为系统参数变化, $d(k)$ 为外部干扰. 未知项 $\Delta A, \Delta B$ 和 $d(k)$ 的影响可以等效为一个外部干扰:

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \Delta Ax(k) + \Delta Bu(k) + d(k) = \\ & x(k+1) - Ax(k) - Bu(k). \end{aligned} \quad (2)$$

虽然 $\phi(k)$ 是未知的, 但 $\phi(k-1)$ 可以通过下式计算:

$$\phi(k-1) = x(k) - Ax(k-1) - Bu(k-1). \quad (3)$$

设离散系统的滑模切换面为

$$s(k) = C^T x(k). \quad (4)$$

切换函数 $s(k)$ 的设计参见文[5,6].

利用文[5]提出的离散趋近律

$$\begin{cases} s(k+1) - s(k) = -qTs(k) - \epsilon T \operatorname{sgn}(s(k)), \\ \epsilon > 0, q > 0, 1 - qT > 0. \end{cases} \quad (5)$$

式中 T 为采样周期. 由于

$$\begin{aligned} s(k+1) - s(k) &= \\ C^T x(k+1) - C^T x(k) &= \\ C^T Ax(k) + C^T Bu(k) + C^T \phi(k) - C^T x(k). \end{aligned} \quad (6)$$

与式(5)相比较可解出变结构控制

$$\begin{aligned} u(k) &= -(C^T B)^{-1} [C^T Ax(k) + \\ & C^T \phi(k) - C^T x(k) + \\ & qTC^T x(k) + \epsilon T \operatorname{sgn}(C^T x(k))]. \end{aligned} \quad (7)$$

由于 $\phi(k)$ 未知, 故该控制不能实现.

假设 1 系统中不确定部分的动力学特性与采样频率相比慢的多.

如果假设 1 成立, 在 $t = kT$ 的等效干扰 $\phi(k)$ 可认为接近于 $t = (k-1)T$ 时刻的值 $\phi(k-1)$, 而 $\phi(k-1)$ 可以从式(3)求得. 在式(7)中以 $\phi(k-1)$ 替代 $\phi(k)$, $u(k)$ 即为确定的控制

$$\begin{aligned} u(k) &\approx -(C^T B)^{-1} [C^T Ax(k) + \\ & C^T \phi(k-1) - C^T x(k) + \\ & qTC^T x(k) + \epsilon T \operatorname{sgn}(C^T x(k))]. \end{aligned} \quad (8)$$

3 鲁棒性分析 (Robustness analysis)

离散趋近律法总是满足到达条件^[6]. 设计变结构控制使得即使不确定性存在, 上述离散趋近律仍然成立.

由式(1), (2), (4)和式(8)得

$$s(k+1) = (1 - qT)s(k) - \epsilon T \operatorname{sgn}(s(k)) + C^T [\phi(k) - \phi(k-1)]. \quad (9)$$

此式表明当 $\phi(k)$ 为常数时, 准滑动模态将不受系统扰动和外部干扰的影响. 而从假设 1 可知, 每个采样间隔等效干扰的变化 $|\phi(k) - \phi(k-1)|$ 很小.

假设 2 $|\phi(k) - \phi(k-1)|$ 保持在边界层 η $|\phi(k-1)|$ 内. 即

$$|\phi(k) - \phi(k-1)| < \eta |\phi(k-1)|, \quad \eta > 0. \quad (10)$$

按照文[5]中准滑动模态的定义, 系统状态轨迹一旦穿越了滑动面, 它将在每一个连续的采样时刻反复穿越滑动面. 这意味着在准滑动模态

$$\operatorname{sgn}(s(k+2)) = -\operatorname{sgn}(s(k+1)) = \operatorname{sgn}(s(k)). \quad (11)$$

另一方面, 考虑准滑动模态式(9)及边界层式(10):

$$\begin{aligned} s(k+2) &= (1 - qT)s(k+1) - \epsilon T \operatorname{sgn}(s(k+1)) + \\ & C^T [\phi(k+1) - \phi(k)] = \\ & (1 - qT)^2 s(k) + qT \epsilon T \operatorname{sgn}(s(k)) + \\ & C^T (1 - qT) [\phi(k) - \phi(k-1)] + \\ & C^T [\phi(k+1) - \phi(k)], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} |C^T (1 - qT) [\phi(k) - \phi(k-1)] + \\ C^T [\phi(k+1) - \phi(k)]| &\leq \\ C^T (1 - qT) |\phi(k) - \phi(k-1)| + \\ C^T |\phi(k+1) - \phi(k)| &< \\ C^T (1 - qT) \eta |\phi(k-1)| + C^T \eta |\phi(k)| &= \\ C^T (2 - qT) \eta |\phi(k-1)| + \\ C^T \eta |\phi(k)| - C^T \eta |\phi(k-1)| &\leq \\ C^T (2 - qT) \eta |\phi(k-1)| + C^T \eta |\phi(k) - \phi(k-1)| &< \\ C^T (2 - qT) \eta |\phi(k-1)| + C^T \eta^2 |\phi(k-1)| &= \\ C^T \eta (2 - qT + \eta) |\phi(k-1)|. \end{aligned} \quad (13)$$

在式(12)中, 前两项与 $s(k)$ 同号, 而后两项的符号可能变化. 由于 $s(k)$ 可以任意小, 若

$$\epsilon T q T < |C^T (1 - qT) [\phi(k) - \phi(k-1)] + C^T [\phi(k+1) - \phi(k)]|. \quad (14)$$

$s(k+2)$ 与 $s(k)$ 的符号可能不同. 这与式(11)及准滑动模态的定义矛盾. 这意味着如果下式不成立, 文[5]定义的准滑动模态得不到保证.

$$\epsilon T q T > C^T \eta (2 - qT + \eta) |\phi(k-1)|. \quad (15)$$

$$\text{即 } C^T \eta |\phi(k-1)| < \frac{\epsilon T q T}{2 - qT + \eta} < \epsilon T. \quad (16)$$

相反, 如果式(15)成立, 总存在 k_0 , 使得 $\forall k > k_0$,

$s(k)$ 在每一个连续的采样点改变其符号, 即 $\text{sgn}(s(k+1)) = -\text{sgn}(s(k))$. 进一步, 在式(9)中, 由于 $1 > 1 - qT > 0$, 右边的第一项的符号与 $s(k)$ 相同, 第二项的符号与 $s(k)$ 相反, 而第三项的符号与 $s(k)$ 可能相同或相反, 但由式(10), (16) 知后两项的和的符号与第二项相同. 因为 $s(k+1)$ 和 $s(k)$ 符号相反, 这意味着对于 $\forall k \geq k_0 + 1$

$$\begin{aligned} |s(k)| &< \varepsilon T + C^T[\phi(k) - \phi(k-1)] \leq \\ &\varepsilon T + C^T|\phi(k) - \phi(k-1)| < \\ &\varepsilon T + C^T\eta|\phi(k-1)| < \\ &\varepsilon T \frac{2 + \eta}{2 - qT + \eta}. \end{aligned} \quad (17)$$

准滑动模态带定义为在第一次穿越切换面后, 状态轨迹保持在状态空间中的区域^[5]. 所以, 在式(16)成立时, 不确定系统的准滑动模态带的宽度

$$2\Delta \approx 2|s(k)| < 2\varepsilon T \frac{2 + \eta}{2 - qT + \eta}. \quad (18)$$

注 1 由于

$$|s(k)| < \varepsilon T \frac{2 + \eta}{2 - qT + \eta} = \varepsilon T \frac{1}{1 - qT/(2 + \eta)}, \quad (19)$$

可以看出, η 越大, 准滑动模态带的宽度越小, 越接近于理想的准滑动模态的宽度.

注 2 在边界层 $\eta|\phi(k-1)|$ 一定时, 不确定性 $|\phi(k-1)|$ 越小, 则系统 η 越大. 所以, 注 1 是合理的; 不确定性 $|\phi(k-1)|$ 越小, 准滑动模态带的宽度越小.

注 3 文[7]利用不确定性的上下界, 得到了准滑动模态带的宽度

$$2\Delta < \frac{2\varepsilon T}{1 - qT}. \quad (20)$$

由于

$$\begin{aligned} \varepsilon T \frac{2 + \eta}{2 - qT + \eta} - \varepsilon T \frac{1}{1 - qT} &= \\ - \frac{\varepsilon T q T (1 + \eta)}{(2 - qT + \eta)(1 - qT)} &= \\ - \frac{\varepsilon T q T}{(1 + (1 - qT)/(1 + \eta))(1 - qT)} &< 0. \end{aligned} \quad (21)$$

与文[7]相比, 本文得到的不确定系统的准滑动模态带宽降低, 且 η 越大, 效果越明显.

4 系统仿真(System simulation)

为了与文[6,7]相比说明本文的特性, 考虑相同

的二阶名义系统

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k). \quad (22)$$

$$\text{式中 } A = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

转换函数 $s(x) = 5x_1 + x_2$, 理想准滑动模态是稳定的^[6].

取 $qT = 0.25, \varepsilon T = 0.5, x^T(0) = [2, -6]$. 则由式(5)得名义系统的趋近律为

$$s(k+1) = 0.75s(k) - 0.5\text{sgn}(s(k)). \quad (23)$$

图 1 为名义系统的准滑动模态.

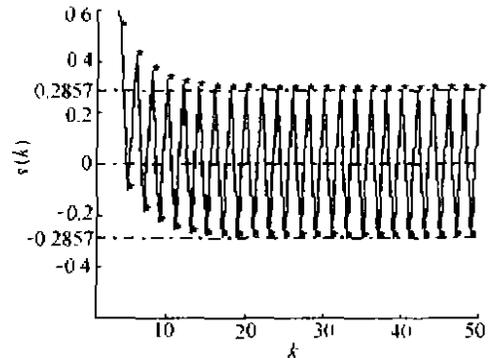


图 1 名义系统响应特性

Fig. 1 Evolution of $s(k)$ for the nominal system

考虑不确定离散时间系统的准滑动模态存在条件, 由式(16)得

$$C^T\eta|\phi(k-1)| < \frac{\varepsilon T q T}{2 - qT + \eta} = \frac{1}{14 + 8\eta}, \eta > 0. \quad (24)$$

所以, 采用本文的变结构控制方法, 准滑动模态存在条件是等效于扰 $\phi(k)$ 在每个采样间隔的变化不得超过 $1/14$.

考虑下面三种情况:

$$a) C^T[\phi(k) - \phi(k-1)] = \begin{cases} -0.07, & k \leq 25, \\ 0.07, & k > 25, \end{cases}$$

满足式(24). 图 2 表明即使在最不利的干扰下, $s(k)$ 在每一个连续采样点改变符号, 状态轨迹在每个采样间隔内穿越切换面. 因此在这种情况下满足趋近律, 准滑动模态存在. 由式(18)可得系统的准滑动模态带的宽度为 1.14.

$$b) C^T[\phi(k) - \phi(k-1)] = \begin{cases} -0.1, & k \leq 25, \\ 0.1, & k > 25, \end{cases}$$

不满足式(24). 图 3 表明 $s(k)$ 并不是在每一个连续采样点改变符号. 因此, 在这种情况下不满足趋近律, 准滑动模态不存在.

c) 设 $\eta = 0.5$, 由式(24)得

$$C^T\eta|\phi(k-1)| < \frac{1}{18},$$

$$C^T[\phi(k) - \phi(k-1)] = \begin{cases} -0.055, & k \leq 25, \\ 0.055, & k > 25. \end{cases}$$

图4表明系统的准滑动模态带的宽度为1.09.而文[7]利用不确定性的上下界得到的准滑动模态带的宽度为1.33.

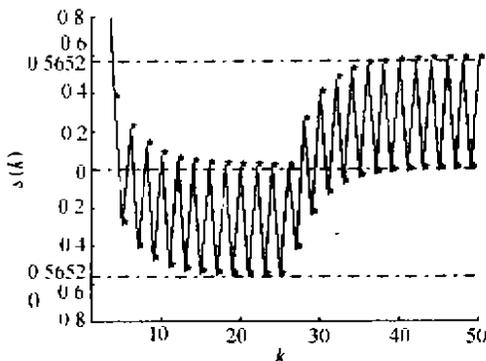


图2 不确定系统响应特性(满足(24), $\eta \rightarrow 0$)
Fig. 2 Evolution of $s(k)$ for the uncertain system with satisfied condition (24), $\eta \rightarrow 0$

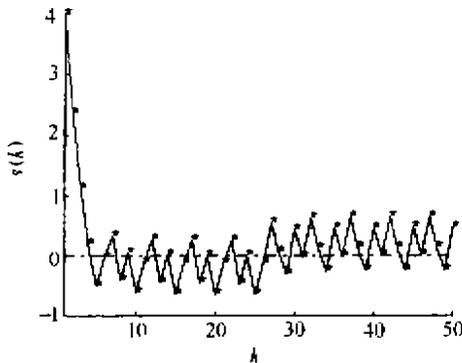


图3 不确定系统响应特性(不满足式(24))
Fig. 3 Evolution of $s(k)$ for the uncertain system with violated condition (24)

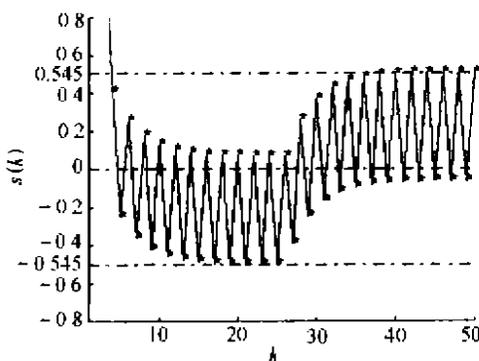


图4 不确定系统响应特性(满足(24), $\eta=0.5$)
Fig. 4 Evolution of $s(k)$ for the uncertain system with satisfied condition (24), $\eta=0.5$

5 结论(Conclusion)

本文利用离散趋近律法^[6],对具有慢变不确定性的离散时间系统提出了新的变结构控制方法,并推出了在该控制方案下准滑动模态的存在条件及带宽,与利用不确定性界的常规变结构控制方案相比,用较低的控制增益获得了系统的鲁棒性,且准滑动模态的带宽降低.分析及仿真结果证明了该方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Dote Y and Hoff R G. Microprocessor based sliding mode controller for dc motor drives [A]. Presented at the Industrial Applications Society Annual Meeting [C], Cincinnati, Ohio, 1980
- [2] Milosavljevic D. General conditions for the existence of a quasi-sliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems [J]. Automatic Remote Control, 1985, 46(3): 307-314
- [3] Sarpurk S Z, Stefanopoulos Y and Kaynak O. On the stability of discrete-time sliding mode control systems [J]. IEEE Trans. Automat Contr, 1987, 32(10): 930-932
- [4] Furuta K. Sliding mode control of a discrete system [J]. Systems & Control Letters, 1990, 14(2): 145-152
- [5] 高为炳. 离散时间系统的变结构控制[J]. 自动化学报, 1995, 21(2): 154-161
- [6] Gao W, Wang Y and Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems [J]. IEEE Trans. on Industrial Electronics, 1995, 42(2): 117-122
- [7] A drzej Bartoszewicz. Remarks on discrete-time variable structure control systems. IEEE Trans. on Industrial Electronics, 1996, 43(1): 235-238
- [8] Elmali H and Olgac N. Sliding mode control with perturbation estimation(SMCPE); a new approach [J]. Int J. Control, 1992, 56(4): 923-941

本文作者简介

于双和 1968年生,博士研究生,1990年毕业于北方交通大学通信与控制工程系,1996年获哈尔滨工业大学自动控制理论与应用专业硕士学位.研究方向为变结构控制,智能控制及其在飞行器控制中的应用.

傅佩琛 1933年生,教授,1959年哈尔滨工业大学自动控制专业毕业,研究领域为智能控制,机器人控制,变结构控制

强文义 1937年生,博士生导师,1960年哈尔滨工业大学自动控制专业毕业,研究领域为智能控制,机器人控制,过程控制.