第17卷第2期
2000年4月
193-197
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol.17,No.2
Apr.,2000

文章编号：1000-8152(2000)02-0193-05

一类反应扩散系统的参数辨识与反演方法*

江成顺　张彦肖
O235
（信息工程大学应用数学系·郑州，450002）

摘要：研究具有两个未知参数 D 和 k 的一类反应扩散系统的参数辨识与反演问题.对其中未知系数函数 $D=D(x)$，采用时空有限元数值方法进行辨识，给出其数值逼近解 D_h.将此常数数值逼近解 D_h 作为控制参数，利用反演方法确定系统的另一个未知参数 k.

关键词：反应扩散系统；参数辨识；反演；时空有限元方法
文献标识码：A

Parameter Identification and Inversion Method for a Class of Reaction-Diffusion Systems

JIANG Chengshun　and　ZHANG Yanxiao
(Department of Applied Mathematics, University of Information Engineering · Zhengzhou,450002,P.R.China)

Abstract: This paper is concerned with the problem of the numerical identification and inversion for a class of reaction-diffusion systems with two unknown parameter D and k. As one of them (i.e. $D=D(x)$) is a coefficient function, then we can identify it with the time-space finite element method. After giving the numerical approximating solution D_h for the unknown coefficient function $D=D(x)$, then we can determine parameter k by the inversion method with taking D_h as a new control parameter.

Key words: reaction-diffusion system; parameter identification; inversion; time-space finite element method

1　引言(Introduction)

本文考虑如下非线性反应扩散系统：

$$r_t=Dr_{xx}+kf_1(r)s,\quad 0<x<1,\quad t>0,\quad(1.1)$$

$$s_t=kf_2(r)s,\quad 0<x<1,\quad t>0,\quad(1.2)$$

$$r(x,0)=1,\quad s(x,0)=1,\quad 0<x<1,\quad(1.3)$$

$$r(0,t)=0,\quad r_x(0,t)=g_1(t),$$
$$r_x(1,t)=0,\quad t>0,\quad(1.4)$$

$$g_2(t)=\int_0^1 r(x,t)\mathrm{d}x,\quad(1.5)$$

其中 $r=r(x,t),s=s(x,t),r_t=\partial r/\partial t,S_t=\partial s/\partial t,r_x=\partial r/\partial x,r_{xx}=\partial^2 r/\partial x^2,D=D(x)$ 为常数或函数，k 为不依赖于 x 的参数，(1.5) 为附加条件，$g_2(t)$ 有界.

为论述问题简明起见，我们将称初边值问题 {(1.1)~(1.4)} 为正问题，而把 {(1.1)~(1.4),(1.5)} 称为反问题. {(1.1)~(1.5)} 是未知系数 $D=D(x)$ 和参数 k 的辨识与反演问题.此处 $f_i(r)(i=1,2)$ 是 r 的给定的线性或非线性函数，$g_i(t)(i=1,2)$ 为 t 的确定的函数.

反问题 {(1.1)~(1.5)} 在化学工业[1,2]中有应用模型.在文献[1,2]中，Friedman 研究了化学工业中描述彩色胶片显影技术的一反应扩散模型的一类反演问题.它是我们这里研究的参数辨识问题 {(1.1)~(1.5)} 的一些特殊情形（即当 D 和 k 均为未知常数的情形）.文献[3~8]也讨论了一些其它数学模型的参数辨识问题，这些参数辨识问题基本上可归结为相应的无穷维优化问题.因此，在[3,4]中，Banks 首先提出了所谓的“有限维逼近”的方法.在[5,6]中某些其它问题的参数辨识的数值方法被加以研究，在文献[7,8]中，来自控制论中的一些数学模型的参数辨识问题首先被转化为对应的变分形式，然后对此进行了系统的分析和研究.在一些工程技术领域中，也常常产生各种分布参数的辨识问题.例如，文献[9]陈述了地下水的水动力弥散系统的反求问题，并给出了求解此类问题的一些数值计算格式；又如文[10]论述和研究了来自于石油勘探和开采技术中的若干油藏数值模拟中几个数学问题，这

* 基金项目：中国博士后科学基金和国家自然科学基金资助项目.
收稿日期：1998-10-30；收修改稿日期：1999-06-28.

些问题有的也可以归结为未知参数的数值反演问题.最近,文[11]的作者和文[12]的作者分别研究了一类单个抛物型方程的单个未知参数的数值辨识问题.

本文的主要目的是决定系统{(1.1)~(1.5)}的未知参数 $D = D(x)$ 和 k .因此,我们将采用如下框架进行论述.

在§2中,我们先就 $D = D(x)$ 为常数的特殊情形,利用函数变换方法,把正问题{(1.1)~(1.4)}转化为热传导方程的初边值问题,由此得到正问题的解的存在唯一性和正则性结果;在§3中,首先对热方程的未知系数 $D = D(x)$ 不是常数的情形,建立一种数值逼近格式,亦即其时空有限元计算格式,然后证明辨识参数 D_h 的可解性.由此得到 $D(x)$ 的有限元逼近解 D_h,D_h 实际上是依赖于系统另一未知参数 k 的新的常数参数.对于时空有限元逼近解 D_h ,我们给出 $\| D - D_h \|_{L^2}$ 的误差估计定理.最后在§4中利用时空有限元逼近 D_h ,得到另一未知参数 k 的反演表达式.如果原反应扩散系统中的未知参数 D 和 k 都是常数参数,则不必利用有限元数值方法,就可直接进行辨识和反演.

2 当 D 和 k 都为常数参数时的正问题的可解性(Solvability of the direct problem as D and k are constant parameters)

本节先设 D 和 k 为待求常数.由(1.1)~(1.3)易得

$$s = \exp\left\{k\int_0^t f_2(r(x,\tau))\mathrm{d}\tau\right\},$$

$$r_t - Dr_{xx} = kf_1(r)\exp\left\{k\int_0^t f_2(r(x,\tau))\mathrm{d}\tau\right\} \triangleq F(x),$$

$$0 < x < 1,\quad t > 0. \tag{2.1}$$

为讨论方程(2.1)的带有初边值条件

$$r(x,0) = 1,\quad 0 < x < 1, \tag{2.2}$$

$$r(0,t) = 0,\quad r_x(0,t) = g_1(t),$$
$$r_x(1,t) = 0,\quad t > 0 \tag{2.3}$$

的定解问题,我们令

$$w(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{4Dt}} \mathrm{e}^{-p^2}\mathrm{d}p, \tag{2.4}$$

并令

$$r = w - ktw + ku. \tag{2.5}$$

注意到

$$w_t(x,t) = -\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt^3}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4Dt}},$$

$$w_x(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4Dt}},$$

$$w_t = Dw_{xx}\quad (x > 0,\quad t > 0)$$

和

$$w(0,t)=0,\quad w_x(0,t)=1/\sqrt{4Dt},\quad w(x,0)=1.$$

则正问题{(1.1)~(1.4)}可转化为

$$u_t - Du_{xx} = f_1(r)\mathrm{e}^k\int_0^t f_2(r(x,\tau))\mathrm{d}\tau + w \overset{\text{def}}{=} F^*(u),\quad (x,t)\in(0,1)\times[0,T], \tag{2.6}$$

$$u(0,t) = 0,\quad t > 0 \tag{2.7}$$

$$u_x(0,t) = \frac{1}{k}\left[g_1(t) - \frac{1-kt}{\sqrt{\pi Dt}}\right] \overset{\text{def}}{=} \bar{g}_1(t), \tag{2.8}$$

$$u_x(1,t) = [t - 1/k]w_x(1,t) \overset{\text{def}}{=} \bar{g}_2(t), \tag{2.9}$$

$$u(x,0) = 0,\quad 0 < x < 1. \tag{2.10}$$

显然当 $t\to 0$ 时有 $\bar{g}_2(t)\to 0$.这说明相容性条件成立,因此,容易推得如下可解性和正则性:

定理1 设 $f_1(r)\geqslant 0$,$g_1(t)\geqslant 0$ 且 $g_2(t)$ 有界.则对 $\forall\beta\in(0,1)$,$T > 0$,问题{(2.6)~(2.10)}有唯一解 $u\in C^{2+\beta}([0,1]\times[0,T])$.

证 利用不动点原理[13]和最大值原理[8,13],我们容易得到定理1的证明(事实上,在文献[14,15]中已有关于某些半线性抛物型方程和方程组的解的存在性,唯一性和正则性的论述.定理1的证明类同于[14,15]中有关结论的证明).故这里不详述.

注2.1 由定理1,我们易知正问题{(1.1)~(1.4)}具有可解性和正则性.

注2.2 若 $D = D(x)$ 不为常数,则我们不能得到(2.6)~(2.10).因此我们不作变换(2.4)和(2.5),但直接考虑问题{(2.1)~(2.3)},由文献[13~15]可知:问题{(2.1)~(2.3)}存在唯一正则解,因而正问题{(1.1)~(1.4)}仍有可解性和正则性.

注2.3 当 D 和 k 均为常数参数时,由定理1的正则性结果可知 u_t 有界,若结合 w 和 w_t 的表达式,则可求 $g_2'(t)$ 并反演 D(见§4中所述).

注2.4 当 $D = D(x)$ 不是常数时,我们不能利用变换(2.4)和(2.5).为此,我们试图采用有限元方法.给出 $D(x)$ 的常数有限元数值逼近解 D_h,然后利用 D_h 反演另一未知参数 k.

3 $D=D(x)$的时空有限元格式(Time-space finite element scheme as $D=D(x)$)

本节建立当 $D=D(x)$ 不为常数时，反应扩散系统{(2.1) ~ (2.3)} 的参数辨识的时空有限元格式. 为此，首先提出如下基本假设:

(H_1) 对于问题{(2.1) ~ (2.3)} 的解 $r(x,t)$，存在正的常数 T 和非负常数 m，使得

$$\sum_{i=1}^{l}\left|\int_0^T \frac{\partial^i r}{\partial x^i}\mathrm{d}t\right| > K_0 > 0,$$

$0\leqslant l\leqslant m$，$\forall x\in[0,1]$，其中 K_0 为常数.

注 3.1 假设条件(H_1)确保了{(2.1) ~ (2.3)}的参数 $D=D(x)$ 的可辨识性.

为求解 $D(x)$，定义 M 为 $D(x)$ 的容许集，即这个集合 M 包含了事先能够计算或观测出来的信息数据. 假定 M 是 $L^2([0,1])$ 中的紧子集，且

$M\subset\{D(x)\mid 0<D_*<D(x)<D^*$，存在常数 $K>0$，使得 $\|D(x)\|_{m+1}<K$，对几乎所有的 $x\in(0,1)$ 成立$\}$. (3.1)

此外，令

$$\Gamma(D)=\int_0^T\int_0^1 |r(x,t;D)-z|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{3.2}$$

其中 $r(x,t;D)$ 是系统{(2.1) ~ (2.3)} 相对于参数 $D(x)$ 的精确解(即理论解)，且 $z=z(x)$ 是关于$(x,t)\in[0,1]\times[0,T]$ 的 r 的观察数据. 因此 $D(x)$ 的反演可被转化为求 $\bar{D}\in M$，满足

$$\Gamma(\bar{D})=\inf_{D(x)\in M}\Gamma(D(x)). \tag{3.3}$$

优化问题(3.3)可利用所谓"有限维逼近"方法和技巧来研究. 例如，利用时空有限元方法来研究(见文献[3 ~ 8,16,17]等).

在本文论述过程中，还作如下基本假设:

$$D=D(x)\in H^{m+2},\quad 0<D_*<D(x)<D^*, \tag{3.4}$$

$$r\in L^\infty(0,T;H^{m+2}),\quad r_t\in L^2(0,T;H^{m+2}),$$
$$r_t^{q+1}\in L^\infty(0,T;H^1), \tag{3.5}$$

其中 $r=r(x,t)$ 为系统{(2.1) ~ (2.3)}的解. 这里的 Sobolev 空音 H^s 和函数空间 $L^\infty(0,T;H^s)$，$L^2(0,T;H^s)$ 等的记号与定义可见文献[13 ~ 15] 之论述.

我们对时间区间$[0,T]$ 和空间区域$[0,1]$分别作如下剖分:

$$I_\alpha=(t_{\alpha-1},t_\alpha),\quad e_i=(x_{i-1},x_i), \tag{3.6}$$

其中

$\alpha=1,2,\cdots,S$; $0=t_0<\cdots<t_S=T$;

$i=1,2,\cdots,N$; $0=x_0<x_1<\cdots<x_N=1$.

此外，引进剖分参数

$$\tau=\max\{\tau_\alpha=t_\alpha-t_{\alpha-1}\mid\alpha=1,2,\cdots,S\},$$
$$h=\max\{h_i=x_i-x_{i-1}\mid i=1,2,\cdots,N\}.$$

记 $S_h^{m+1}\subset H^1([0,1])$ 是 $m+1$ 阶普通有限元空间[16,17]，则时空有限元空间可以表示为:

$$V_{h,\tau}^q=\{V\mid V(x,t)=\sum_{j=0}^{q}w_{h,j}(x)t^j;\quad t\in I_\alpha,$$
$$w_{h,j}\in S_h^{m+1}\},\quad V_{h,\tau}=\{V;V|_{I_\alpha}\in V_{h,\tau}^q\}, \tag{3.7}$$

对参数 $D=D(x)$，记 πD 和 D_h 分别为 $D(x)$ 在 S_h^{m+1} 中的投影和逼近的辨识参数. 此外，记 r，r^π 和 r^* 分别是相应于参数 $D(x)$ 分别为 D，πD 和 D_h 时的系统{(2.1) ~ (2.3)} 的精确解，而记 R，R^π，R^* 为相应于参数 $D(x)$ 分别是 D，πD 和 D_h 时系统{(2.1) ~ (2.3)}的有限元逼近解.

又记

$$R_\alpha=R(t_\alpha),\quad R_\alpha^+=\lim_{t\to t_\alpha+0}R(t),$$

$$M_h=M\cap S_h^{m+1}.$$

显然 M_h 仍是 $L^2([0,1])$ 的紧子集. 因此，对任给 $v\in H^1([0,1])$，可得系统{(2.1) ~ (2.3)} 的等价变分形式:

$$(r_t,v)+(D(x)r_x,v_x)=(F(r),v)+g_1(t)v(0), \tag{3.8}$$

$$(r(T),v)+(D(x)\int_0^T r_x\mathrm{d}t,v_x)=$$
$$(\int_0^T F(r)\mathrm{d}t,v)+v(0)\int_0^T g_1(t)\mathrm{d}t. \tag{3.9}$$

在(3.8)和(3.9)中，r 是{(2.1) ~ (2.3)} 的精确解.

r^π 和 r^* 的变分形式与(3.8)和(3.9)类似，故不列出.

利用[11,12,16,17] 中的方法，可建立问题{(2.1) ~ (2.3)} 的如下时空有限元格式: 求 $R\in V_{h,\tau}$，满足

$$\int_{I_\alpha}[(R_t,V)+(D(x)R_x,V_x)]\mathrm{d}t+(R_{\alpha-1}^+-R_{\alpha-1},V_{\alpha-1}^+)=$$
$$\int_{I_\alpha}[(F,V)+V(0)g_1]\mathrm{d}t, \tag{3.10}$$

$\forall V\in V_{h,\tau}^q$，$\alpha=1,2,\cdots,S$，$R(0)=0$.

把(3.3)转化为问题 (P_h): 求 $\bar{D}_h\in M_h$，满足:

$$\Gamma(\bar{D}_h)=\inf_{D_h\in M}\Gamma(D_h)$$

且

$$\Gamma(D_h)=\int_0^T\int_0^1 |R(D_h)-z|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t >$$
$$R(D_h)\in V_{h,\tau}$$

且

$$\int_{I_\alpha}[(R_t,V)+(D_hR_x,V_x)]\mathrm{d}t+(R_{\alpha-1}^+-R_{\alpha-1},V_{\alpha-1}^+)=$$
$$\int_{I_\alpha}[F,V)+V(0)g_1]\mathrm{d}t,$$
$$\forall V\in V_{h,\tau}^q,\quad \alpha=1,2,\cdots,S,\quad R(0)=0.$$

由于问题(P_h)是由一些非线性方程组约束的优化问题.因此,(P_h)可用共轭梯度方法(参见文献[5,6,16,17]及其引述的有关文献等)来求解.

定理2 在条件(3.1)和(3.2)下,问题(P_h)可解(即(P_h)至少存在一个解$\bar{D}_h$).

证 假设$D_h,\hat{D}_h\in M_h$,(3.10)的相应解为R,$\hat{R}$,则有

$$\int_{I_\alpha}\{([R-\hat{R}]_t,V)+(\hat{D}_h[R-\hat{R}]_x,V_x)+$$
$$([D_h-\hat{D}_h]R_x,V_x)\}\mathrm{d}t+$$
$$(R_{\alpha-1}^+-\hat{R}_{\alpha-1}^+-R_{\alpha-1}+\hat{R}_{\alpha-1},V_{\alpha-1}^+)=0. \tag{3.11}$$

令$V=R-\hat{R}$,则由(3.11)可得到

$$\frac{1}{2}\int_{I_\alpha}\|R_\alpha-\hat{R}_\alpha\|_{L^2}^2\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\|R_{\alpha-1}^+-\hat{R}_{\alpha-1}^+\|_{L^2}^2+$$
$$\int_{I_\alpha}\{(\hat{D}_h[R-\hat{R}]_x,[R-\hat{R}]_x)+$$
$$([D_h-\hat{D}_h]R_x,[R-\hat{R}]_x)\}\mathrm{d}t+$$
$$(R_{\alpha-1}^+-\hat{R}_{\alpha-1}^+-R_{\alpha-1}+\hat{R}_{\alpha-1},R_{\alpha-1}^+-\hat{R}_{\alpha-1}^+)=0. \tag{3.12}$$

其中

$$\int_{I_\alpha}(\hat{D}_h[R-\hat{R}]_x,[R-\hat{R}]_x\mathrm{d}t\geqslant D_*\int_{I_\alpha}|R-\hat{R}|_1^2\mathrm{d}t, \tag{3.13}$$

$$\int_{I_\alpha}([D_h-\hat{D}_h]R_x,[R-\hat{R}]_x\mathrm{d}t\leqslant$$
$$D^*\int_{I_\alpha}|R-\hat{R}|_1^2\mathrm{d}t\int_{I_\alpha}|R_x|_1^2\mathrm{d}t, \tag{3.14}$$

这里$|\cdot|$表示$H^1([0,1])$中的半模

$$(R_{\alpha-1}^+-\hat{R}_{\alpha-1}^+-R_{\alpha-1}+\hat{R}_{\alpha-1},R_{\alpha-1}^+-\hat{R}_{\alpha-1}^+)\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\|R_{\alpha-1}^+-\hat{R}_{\alpha-1}^+\|_{L^2}^2-\frac{1}{2}\|R_{\alpha-1}+\hat{R}_{\alpha-1}\|_{L^2}^2. \tag{3.15}$$

由(3.12)~(3.15),我们可推得

$$\|R-\hat{R}\|_{L^2(0,t;L^2)}\leqslant\sqrt{T}\sup_{0\leqslant n\leqslant N}\{\|R_n-\hat{R}_n\|_{L^2}\}\leqslant$$
$$KT^{3/2}\|D_h-\hat{D}_h\|_{L^2}.$$

假设$\{D_h^n\}_1^\infty\subset M_h$且

$$\Gamma(D_h^n)=\inf_{D(x)\in M}\Gamma(D(x)),$$

且

$$\Gamma(D_h^1)\geqslant\Gamma(D_h^2)\geqslant\cdots\geqslant\Gamma(D_h^n)\geqslant\cdots,$$

则易见$\Gamma(D_h^n)\to\inf_{D_h\in M_h}\Gamma(D_h)$,$n\to\infty$.由$M_h$的假设条件知:存在$\bar{D}_h\in M_h$和子列$\{D_h^{n_j}\}$,满足

$$\|D_h^{n_j}-\bar{D}_h\|_{L^2}\to 0\quad(n_j\to\infty).$$

从而得到

$$\Gamma(D_h^{n_j})-\Gamma(\bar{D}_h)=$$
$$\int_0^T\int_0^1|R(D_h^{n_j})-z|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$
$$\int_0^T\int_0^1|R(\bar{D}_h)-z|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\tilde{K}\|R(D_h^{n_j})-R(\bar{D}_h)\|_{L^2(0,T;L^2)}\leqslant$$
$$\tilde{K}\|D_h^{n_j}-\bar{D}_h\|_{L^2}\to 0,$$

对$n_j\to\infty$成立.因此,我们得到

$$\Gamma(\bar{D}_h)=\lim_{n_j\to\infty}\Gamma(D_h^{n_j})=\lim_{n_j\to\infty}\Gamma(D_h^n)=\inf_{D_h\in M_h}\Gamma(D_h).$$

上式说明$\bar{D}_h$为(P_h)的一个解.故定理2得证.

对于时空有限元逼近D_h,我们可以证明$\|D(x)-D_h\|_{L^2([0,1])}$具有如下估计定理:

定理3 若(H_1)及(3.4),(3.5)成立,则对给定的常数$q\in(0,1)$以及充分小的剖分参数h,有如下估计式:

$$\|(D-D_h)(|\int_0^T r_x\mathrm{d}t|+h|\int_0^T r_{xx}\mathrm{d}t|+$$
$$\cdots+h^l|\int_0^T r_x^{l+1}\mathrm{d}t|)\|_{L^2([0,1])}\leqslant$$
$$\bar{K}\{\tau^{-\frac{1}{2}}h^{m+2}+h^{m+1}+\tau^{q+\frac{1}{2}}+$$
$$h^{-1}\tau^{q+1}+\tau^{-\frac{1}{2}}\varepsilon+h^{-1}\varepsilon\},$$

其中$\varepsilon>0$为观察误差,常数$l\in[0,m]$为整数.

注3.2 定理3的证明需要分四个步骤进行,并要用到一系列基本引理.受篇幅所限,此处从略.

4 系统{(1.1)~(1.5)}的参数k的反演(Inversion of the parameter k for system {(1.1)~(1.5)})

在§2,§3的基础上,若系统{(1.1)~(1.5)}中扩散系统$D=D(x)$为函数,则可用时空有限元方法求得其常数值逼近解D_h(D_h与另一参数k有关).在(1.1)中令$D=D_h$并根据(1.5),(2.4)和(2.5)可得到

$$g_2'(t) = \int_0^1 w_t \mathrm{d}x - k\int_0^1 w \mathrm{d}x - kt\int_0^1 w_x \mathrm{d}x + k\int_0^1 u_t \mathrm{d}x.$$

由 w, w_x 和 w_t 的表达式：

$$w(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{4D_h t}} e^{-p^2}\mathrm{d}p,$$

$$w_t(x,t) = -\frac{x}{\sqrt{4\pi D_h t^3}} e^{-\frac{x^2}{4D_h t}},$$

$$w_x(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi D_h t}} e^{-\frac{x^2}{4D_h t}},$$

以及 u 满足{(2.6) ~ (2.10)}，因而满足定理 1 的结论可知 u_t 有界．因而有

$$g_2'(t) = -\sqrt{\frac{D_h}{\pi t}}\left(1 - e^{-\frac{1}{4D_h t}}\right) + O(1),$$

对 $t \to 0$ 成立．亦即

$$\sqrt{D_h} = -\frac{\sqrt{\pi t}\, g_2'(t)}{1 - e^{-\frac{1}{4D_h t}}} + O(1), \quad t \to 0. \tag{4.1}$$

注 4.1　将 $D = D_h$ 代入(2.4)，使 $w(x,t)$ 可定，因而由定理 1 可知 $\int_0^1 u_{tt}\mathrm{d}x$ 有界．由此推得下面的结果：

定理 4　设定理 1,2,3 的基本条件被满足，则当时间 t 充分小时，未知参数 $D = D(x)$（常数或函数）和 k 可由给定数据 $f_i(r)$ 和 $g_i(t)(i = 1,2)$ 唯一地识别．

证　由于

$$g_2''(t) = \int_0^1 w_{tt}(x,t)\mathrm{d}x + k\int_0^1 u_{tt}(x,t)\mathrm{d}x + \sqrt{\frac{D_h}{\pi t}}\, k\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4D_h t}}\left(1 + \frac{1}{2D_h t}\right)\right],$$

我们可以得到

$$k = 2\sqrt{\frac{\pi t}{D_h}} \cdot \frac{g_2''(t) - \int_0^1 w_{tt}\mathrm{d}x}{1 - e^{-\frac{1}{4D_h t}}\left(1 + \frac{1}{4D_h t}\right) + 2\int_0^1 u_{tt}\mathrm{d}x}. \tag{4.2}$$

容易看出：当参数 D 为常数时，直接可得(4.2)且(4.2)中 $D_h = D$，当 $D(x)$ 不为常数时，可用有限元方法求出 D 的数值逼近解 D_h，然后，另一未知参数 k 也可由(4.2)反演确定．

至此定理 4 证毕．

致谢　本文是作者在山东大学做博士后期间完成的，作者衷心感谢山东大学袁益让教授的热情鼓励和悉心指导！

参考文献(References)

[1] Friedman A. Mathematics in Industrial Problems[M]. Part 2. IMA, 24. Berlin: Springer, 1989

[2] Friedman A. Mathematics in Indrstrial Problems[M]. Part 4. IMA, 38. Berlin: Springer, 1991

[3] Banks H T. Parameter identification technique for physiological control systems[J]. Lecture in Appl. Math, 1981, 19(2): 361 - 383

[4] Banks H T and Kunisch K. An approximation theory for nonlinear Partial Differential Equation with applications to identification and control[J]. SIAM J. Control Optim, 1982, 20(4): 815 - 849

[5] Falk R S. Error estimates for the numerical identification of a variable coefficient[J]. Math. Comp. 1983, 41(2): 537 - 546

[6] Krylow N V. Controlled Diffusion Processes[M]. New York: Springer-Verlag, 1980

[7] 王康宁．分布参数控制系统[M]．北京：科学出版社，1986

[8] 王康宁．最优控制的数学理论[M]．北京：国防工业出版社，1995

[9] 朱学愚，谢春红．地下水运移模型[M]．北京：中国建筑工业出版社，1990

[10] 袁益让．油藏数值模拟中几个数学问题[J]．高校应用数学学报，1989，4(4)：564 - 575

[11] Keung Y L and Zou J. Numerical identification of parameters in parabolic system[J]. Inverse Problems, 1998, 14(1): 83 - 100

[12] 张怀宇．抛物型方程参数辨识问题及非矩形区域上的算子分裂 Galerkin 方法[D]．济南：山东大学，1998

[13] Ladyzenskaja O A et al. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Providence[M]. RI: American Math. Society, 1968

[14] Pao C V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations[M]. New York: Plenum, 1992

[15] 王明新．非线性抛物型方程[M]．北京：科学出版社，1993

[16] Jim Douglas Jr. The Numerical Simulation of Miscible Displacement. Computational Methods in Nonlinear Mechanics [M]. Oden J T ed., Amsterdam: North-Holland, 1980

[17] Jim Douglas Jr and Russell T F. Numerical methods for convection dominated diffusion problems based on combining with the method of characteristics finite element of finite difference procedure[J]. SIAM J. Numer. Anal., 1982, 19(3): 871 - 885

本文作者简介

江成顺　1960 年生．1997 年获南京大学理学博士学位．1997 年 5 月至 1999 年 4 月在山东大学数学与系统科学学院做博士后科研工作．主要从事应用数学与计算数学专业中数学物理方程正、反问题的理论分析与数值模拟计算工作．目前研究方向之一是：系统控制理论和未知参数辨识与反演．

张彦肖　女．1960 年生．主要研究方向为：运筹控制与模糊数学．