

非线性控制系统的能控性及在刚体动力学中的应用

贺昌政 杨 柳

(四川联合大学(成都科技大学)应用数学系·成都, 610065)

TP273

O313.3

摘要: 在[4]的基础上运用不变流形研究非线性系统的能控性问题. 由于不变流形的构造较为容易, 通过实例表明, 文中得到的仿射非线性系统能控性定理在刚体动力学中的应用是有效的.

关键词: 非线性控制系统; 能控性; 不变流形方法; 刚体动力学系统

文献标识码: A

The Controllability of Nonlinear Control System and Its Application to Dynamics of Rigid Body

HE Changzheng and YANG Liu

(Applied Mathematics Department, Sichuan Union University·Chengdu, 610065, P. R. China)

Abstract: Based on the oriented manifold method of [4], the authors of this paper study the problem of controllability of nonlinear control system by invariant manifold method. Since the construction of invariant manifold is not too difficult, the authors illustrate the efficiency of the controllability theorem about an affine nonlinear system.

Key words: nonlinear control system; controllability; invariant manifold method; dynamic system of rigid body

1 引言(Introduction)

近年来, 由于采用微分几何方法, 使得非线性控制系统理论获得了巨大的发展. 有关这方面的结果, [1~3]已有全面介绍.

乌克兰科学院 Kovalev A. M. 教授首次把刚体动力学中发展起来的有向流形方法运用于非线性控制系统. 由于这种新的微分几何方法的运用, 他在非线性控制系统能控性理论方面得到了一系列深刻的结果, 并在不变中心引力场中的刚体运动控制中得到了应用[4].

然而, 寻找控制系统的有向流形是相当复杂的工作, 实质上类似于稳定性理论中李雅普诺夫函数的构造问题. 本文在 Kovalev 方法的基础上用不变流形[5]研究非线性控制系统的能控性, 这样, 问题得到简化, 并且不变流形的构造较为容易, 将有利于在刚体动力学控制中的应用.

2 预备知识(Preliminary)

本节内容见[4].

给定非线性控制系统

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (2.1)$$

其中 $x \in D$ 为状态向量, D 为 $\mathbb{R}^m$ 中的区域; 允许控制 u 为有界可测函数, $u = u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m, t \in T$

$\subset [0, +\infty)$, 并假定对所有允许控制, $f(x, u)$ 在 $D \times U$ 上连续可微, 且对任一允许控制, 系统(2.1)满足解的存在唯一性条件.

我们将研究系统(2.1)的能控性问题, 为此, 先给下面的定义.

定义 2.1 如果对任意两点 $x_0, x_1 \in D$, 存在允许控制 $u(t)$, 使得系统(2.1)相应的解 $x(t)$ 对某个 $t_1 \geq t_0$ 满足 $x(t) \in D, \forall t \in [t_0, t_1]$, 且

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$

则称控制系统(2.1)在区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 中能控.

下面讨论有向流形与能控性的关系.

定义 2.2 对于点 $x_1, x_2 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, 若存在系统(2.1)的轨线 $x(t)$, 使得

$$x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2,$$

$$0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty,$$

则称点 x_2 为由点 x_1 可达的.

定义 2.3 由点 $x \in D$ 可达的 D 中点的集合称为点 x 的正轨道, 记作 $Or^+ x$; D 中可达 x 的所有点的集合称为点 x 的负轨道, 记作 $Or^- x$.

定义 2.4 集合 $K \subseteq D$ 的正轨道记作 $Or^+ K = \bigcup_{x \in K} Or^+ x$; 集合 $K \subseteq D$ 的负轨道记作 $Or^- K = \bigcup_{x \in K} Or^- x$.

下面的定义按轨道分出一类特殊的流形.

定义 2.5 若流形 $M \subseteq D$ 具有下列性质之一:

1) $M = Or^+ M$;

2) $M = Or^- M$.

则称 M 为系统 (2.1) 的有向流形, 亦称定向流形 (Oriented Manifold).

我们引用 [4] 中的结论:

定理 2.1 任意点 $x \in D$ 的正轨道 $Or^+ x$ 包含系统 (2.1) 的有向流形.

由上述定义和定理 2.1, 不难推出下面的定理:

定理 2.2 系统 (2.1) 能控的充要条件是 $\forall x \in D$, 有 $Or^+ x = D$.

定理 2.3 系统 (2.1) 能控的充要条件是没有系统 (2.1) 的非平凡有向流形 N , 即 $N \subset D$ 但 $N \neq \emptyset, N \neq D$.

3 能控性的必要条件 (Necessary condition of the controllability)

Kovalev A. M. 在 [4] 中给出了控制系统 (2.1) 能控的必要条件, 然而, 由于寻找控制系统的定向流形工作十分复杂, 应用上较难. 下面, 我们针对一类特殊的仿射非线性系统用不变流形方法来讨论能控性问题, 这类系统在力学及其它各类工程问题中大量存在, 因而研究它有很大的实际意义.

我们在 [5] 的基础上提出下面的定义和定理, 并称之为不变流形方法.

3.1 不变流形定义 (Definition of the invariant manifold)

定义 3.1 假设函数 $\varphi(x), x \in D$ 连续可微, 若流形 $M = \{x \in D; \varphi(x) = 0\}$ 满足下列条件:

1) $\dim M = s < n$;

2) 对于任一允许控制 $u(t)$ 及系统 (2.1) 相应的轨线 $x(t)$, 若存在 $t^* \in T$, 使得 $\varphi(x(t^*)) = 0$, 则对任意 $t \in T$ 有 $\varphi(x(t)) = 0$, 此时, 我们称流形 M 为系统 (2.1) 的不变流形 (Invariant Manifold).

3.2 能控性必要条件 (Necessary condition of the controllability)

显然, 对于不变流形 M , 成立 $Or^+ M = Or^- M = M$, 即不变流形是有向流形的特殊情形, 从而由定理 2.3 有:

定理 3.1 若系统 (2.1) 能控, 则区域 D 中不存在系统 (2.1) 的非平凡不变流形.

为了研究不变流形 M 的存在问题, 应当从分析系统 (2.1) 在任一 $x \in D$ 的速度向量场 $f(x, u)$ 开始. 因为对任意 $p \in M$, 向量 $f(p, u)$ (对任意的 $u \in$

U) 都属于不变流形 M 在 p 点的切空间, 记为 $T_p(M)$. 设 $\dim M = s$, 则 $\forall x \in M$, 有

$$\dim T_x(M) = s.$$

见 [2]. 从而由不变流形定义的条件 1) 可知, 要使不变流形存在, 必须成立 $\dim T_x(M) = s < n, \forall x \in M$. 下面, 我们给出向量场 $f(x, u)$ 位于 s 维子空间的条件的条件, 见 [6].

引理 3.1 $\forall x \in D$, 曲面 $z = f(x, u) (u \in U \subseteq \mathbb{R}^m)$ 位于 s 维子空间 $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ 中的充要条件为

$$\text{rank} \Phi(x, u) \leq s, \quad \forall (x, u) \in D \times U,$$

其中

$$\Phi(x, u) = [f(x, 0), \frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_m}, \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial u_{m-1} \partial u_m^{n-1}}, \frac{\partial^n f}{\partial u_m^n}]. \quad (3.1)$$

定义 3.2 我们称式 (3.1) 中的 $\Phi(x, u)$ 为系统 (2.1) 在 D 上的矩阵特征函数.

这样, 我们有如下定理:

定理 3.2 若系统 (2.1) 在 $Q \subset D$ 上的矩阵特征函数 $\Phi(x, u)$ 满足:

$$\text{rank} \Phi(x, u) = n, \quad \forall u \in U,$$

则 Q 中不存在系统 (2.1) 的不变流形.

证 用反证法. 若 Q 中存在系统 (2.1) 的不变流形 $M \subseteq Q$, 由定义 3.1 有 $\dim M = s < n$, 则 $\forall x \in M$ 有 $\dim T_x(M) = s$, 从而 $f(x, u)$ 位于 s 维子空间 $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ 中. 由引理 3.1 有 $\text{rank} \Phi(x, u) \leq s < n$, 与题设矛盾, 从而说明 Q 中不存在系统 (2.1) 的不变流形. 证毕.

由定理 3.2 的证明有:

推论 3.1 若 D 中存在系统 (2.1) 的不变流形 M , 则必成立

$$\text{rank} \Phi(x, u) \leq s < n, \quad x \in M \subset D.$$

为了讨论 D 中存在系统 (2.1) 的不变流形的条件, 我们在下列定理中认为流形 $M = \{x \in D; \varphi(x) = 0\}$, $\varphi(x)$ 在 D 上连续可微, 且 $\dim M = s < n$.

定理 3.3 若 $\varphi(x)$ 满足下面的偏微分方程

$$\sum_{i=1}^n f_i(x, u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lambda(x, u) \varphi, \quad (3.2)$$

其中 $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T, \lambda(x, u)$ 在 $D \times U$ 上连续, 则 $M \subset D$ 是系统 (2.1) 的不变流形.

证 将函数 $\varphi(x)$ 沿轨线 $x(t)$ 对 t 求导, 有

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^n f_i(x, u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

再由 (3.2) 可得 $\frac{d\varphi}{dt} = \lambda(x, u) \varphi$. 从而 $\varphi(x(t))$ 有下

面的形式

$$\varphi(x(t)) = C \exp\left(\int \lambda(x, u) dt\right).$$

若存在 $t' \in T$, 使 $\varphi(x(t')) = 0$, 则可得 $C = 0$, 从而对 $\forall t \in T$, 有

$$\varphi(x(t)) = 0.$$

由定义 3.1, $M = \{x \in D; \varphi(x) = 0\}$ 是系统(2.1)的不变流形. 证毕.

定理 3.4 给定系统

$$\dot{x} = X(x), \quad (3.3)$$

其中 $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ 为状态向量. 若流形 M 是系统(3.3)的不变流形, 则存在 D 上的连续函数 $\lambda(x)$, 使 $\varphi(x)$ 满足偏微分方程

$$\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lambda \varphi. \quad (3.4)$$

证 参看文献[7].

下面我们研究一类特殊的非线性系统的能控性问题.

考察系统

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (3.5)$$

其中

$$f(x, u) = \sum_{i=1}^s a_i(x, u) f_i(x),$$

$a_i(x, u)$ 在 $D \times U$ 上连续, x 和 u 的假设见(2.1)式. 这里, 我们假设向量场 $f(x, u)$ 的维数为 s , $x \in D$ 或在 D 的某子集上成立.

我们称系统

$$\dot{x} = f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (3.6)$$

为系统(3.5)的基系统, 并有下面的定理:

定理 3.5 若流形 $M = \{x \in D; \varphi(x) = 0\}$ 为基系统(3.6)中 s 个子系统的公共不变流形, 则它必是系统(3.5)的不变流形.

证 因为 M 是 $\dot{x} = f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, s$ 的公共不变流形, 所以由定理 3.4, 存在 D 上的连续函数 $\lambda_i(x)$, 使 $\varphi(x)$ 满足下列偏微分方程组

$$\sum_{j=1}^n f_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \lambda_i \varphi, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (3.7)$$

其中 f_{ij} 为函数 $f_i(x)$ 的第 j 个分量, $j = 1, 2, \dots, n$.

由于 $f(x, u) = \sum_{i=1}^s a_i(x, u) f_i(x)$, 将(3.7)的 s 个方程两边分别乘以 $a_i(x, u)$, $i = 1, 2, \dots, s$, 再把所得的 s 个方程两边分别相加, 得

$$\sum_{j=1}^n f_j(x, u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \lambda(x, u) \varphi, \quad (3.8)$$

其中 $\lambda(x, u) = \sum_{i=1}^s a_i(x, u) \lambda_i(x)$ 为 $D \times U$ 上的连续函数, 则由定理 3.3, $M \subset D$ 为系统(3.5)的不变

流形. 证毕.

这样, 我们有系统(3.5)能控的必要条件.

定理 3.6 (能控性必要条件) 存在某集 $K \subset D$ 使系统(3.5)满足

$$\text{rank } \Phi(x, u) \leq s < n, \quad \forall (x, u) \in K \times U. \quad (3.9)$$

若该系统在 D 中可控, 则满足下列条件之一:

1) 条件(3.9)不成立;

2) 条件(3.9)成立, 但偏微分方程组(3.7)不存在满足如下条件的解 $\varphi(x)$: 它使流形 $M = \{x \in D; \varphi(x) = 0\}$ 为 D 的非平凡子集.

证 按照推论 3.1, 秩条件(3.9)是 D 中不变流形存在的必要条件.

用反证法. 若满足定理条件的解 $\varphi(x)$ 存在, 按定理 3.3, $M = \{x \in D; \varphi(x) = 0\}$ (按假设, 不妨认为在 M 上有 $\text{rank } \Phi(x, u) \leq s < n$) 为基系统(3.6)的公共不变流形, 再由定理 3.5, M 是系统(3.5)的不变流形. 最后, 由定理 3.1, 可推出与系统(3.5)能控的假设相矛盾. 证毕.

下面, 我们考虑一种仿射非线性系统的能控性问题. 设

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (3.10)$$

其中

$$f(x, u) = f_1(x) + \dots + f_{n-m}(x) + u_1 f_{n-m+1}(x) + \dots + u_m f_n(x),$$

且设 $m+1 < n$, 即要求 $\frac{\partial f(x, u)}{\partial u_i}$ 不含控制 u , 记

$$f_{i, n-m+1}(x) \triangleq \frac{\partial f(x, u)}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

先给出如下引理:

引理 3.2 假设函数 $f_y(x)$, $\lambda_i(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ 在 D 上连续可微, 方程组

$$\sum_{j=1}^n f_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \lambda_i(x) \varphi, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.11)$$

相容且 $\det \|f_{ij}(x)\| \neq 0$, 则它的解有形式

$$\varphi = C \exp U(x), \quad (3.12)$$

其中 $U(x)$ 是变量 x 的函数, C 为常数, $\det \|f_{ij}(x)\|$ 表示方阵 $[f_{ij}(x)]_{n \times n}$ 的行列式.

证 由于(3.11)相容且 $\det \|f_{ij}(x)\| \neq 0$, 关于 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ 解方程组(3.11), 得相容方程组

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \mu_i(x) \varphi, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.13)$$

方程组(3.13)相容意味着

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

于是有

$$\mu_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (3.14)$$

其中 U 为变量 x 的函数, (3.14) 代入(3.13)再积分可得(3.12)的形式. 证毕.

定理 3.7 设系统(3.10)在 D 上满足 $\Delta_n(x) \triangleq \det \|f_{ij}(x)\|$ 不恒为 0. 若它在 D 上能控, 则下列条件之一成立:

1) $\Delta_n(x) \neq 0, \forall x \in D$;

2) 当 $\Delta_n(x) = 0$ 在 D 中的一个非平凡子集上成立时, 集合 $M = \{x \in D; \Delta_n(x) = 0\}$ 不包含基系统 $\dot{x} = f_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ (3.15)

的公共不变流形.

证 先计算(3.10)的矩阵特征函数, 由(3.1)式有

$$\Phi(x, u) = [f_1(x) + \dots + f_{n-m}(x), \\ f_{n-m+1}(x), \dots, f_n(x)].$$

由系统(3.10)的假设知

$$\text{rank } \Phi(x, u) \leq m+1 < n, \quad \forall (x, u) \in D \times U.$$

现考虑定理 3.6 的条件, 当 $\Delta_n(x) \neq 0, \forall x \in D$ 成立时, 由引理 3.2, 方程组(3.7)(或(3.11))的解 $\varphi(x)$ 或者恒为 0, 或者恒不为 0, 则 M 不可能成为 D 中系统(3.10)的非平凡不变流形.

当 $\Delta_n(x) = 0$ 在 D 中非平凡子集上成立时, 则由定理 3.5, 因为基系统(3.15)的公共不变流形就是系统(3.10)的不变流形, 为保证系统(3.10)能控, 必然要求本定理中条件(2)成立. 证毕.

3.3 能控性必要条件的实现问题 (Realization of the necessary condition)

为了寻找定理 3.7 中流形 M 是否包含基系统(3.15)的不变流形, 可采用如下方法:

设函数 $f(x)$ 足够多次连续可微, 作流形

$$M = \{x \in D; f(x) = 0\}.$$

对于系统

$$\dot{x} = X(x), \quad (3.16)$$

作序列

$$f^{(i)}(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

其中

$$f^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^n X_j(x) \frac{\partial f^{(i-1)}(x)}{\partial x_j}, \\ f^{(0)}(x) = f(x).$$

定理 3.8 若集合

$$N: f^{(i)}(x) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

非空, 则在 M 中关于(3.16)的不变流形由 N 定义.

证 见文献[5].

下面, 我们以刚体动力学中一个实例来说明能控性必要条件的应用.

4 带有两个陀螺的刚体运动的可控性 (Controllability of the motion of a rigid body with two rotors about its center)

我们来研究受陀螺控制的刚体关于质心的运动. 设有两陀螺由其轴固定在刚体 B 上作无摩擦旋转(图 1), 其运动可由如下方程^[7]来描述:

$$\begin{cases} A_1 \dot{w}_1 = (A_2 - A_3) w_2 w_3 + \xi_1 (\alpha_2 w_3 - \alpha_3 w_2) + \\ \quad \xi_2 (\beta_2 w_3 - \beta_3 w_2) - \alpha_1 \dot{\xi}_1 - \beta_1 \dot{\xi}_2, \\ A_2 \dot{w}_2 = (A_3 - A_1) w_3 w_1 + \xi_1 (\alpha_3 w_1 - \alpha_1 w_3) + \\ \quad \xi_2 (\beta_3 w_1 - \beta_1 w_3) - \alpha_2 \dot{\xi}_1 - \beta_2 \dot{\xi}_2, \\ A_3 \dot{w}_3 = (A_1 - A_2) w_1 w_2 + \xi_1 (\alpha_1 w_2 - \alpha_2 w_1) + \\ \quad \xi_2 (\beta_1 w_2 - \beta_2 w_1) - \alpha_3 \dot{\xi}_1 - \beta_3 \dot{\xi}_2. \end{cases} \quad (4.1)$$

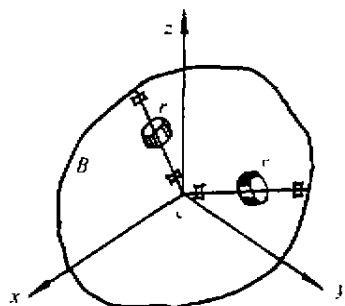


图 1 两陀螺转轴成任意角

Fig. 1 Axes of rotors form an arbitrary angle

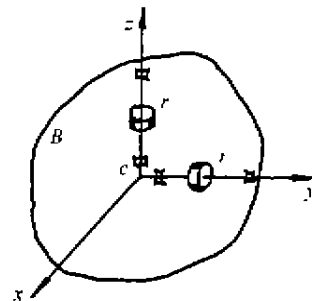


图 2 两陀螺转轴互相垂直

Fig. 2 Axes of rotors are perpendicular to each other

其中, w_i 和 $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2, 3)$ 分别是刚体角速度向量在主轴上的投影以及两陀螺角动量方向的两单位向量; ξ_1, ξ_2 是两陀螺角动量的大小, 它们可视为控制参数; $A_i (i = 1, 2, 3)$ 是刚体惯量主矩; $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2$ 是施于两陀螺的力矩.

当刚体两陀螺转轴互相垂直时,我们可根据

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1), \quad (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0, 1, 0)$$

来建立坐标系(图2),并在方程(4.1)中令 $\dot{\xi}_1 = u_1$, $\dot{\xi}_2 = u_2$, 将方程(4.1)化成如下形式:

$$\begin{cases} A_1 \dot{w}_1 = (A_2 - A_3) w_2 w_3 - \xi_1 w_2 + \xi_2 w_3, \\ A_2 \dot{w}_2 = (A_3 - A_1) w_3 w_1 + \xi_1 w_1 - u_2, \\ A_3 \dot{w}_3 = (A_1 - A_2) w_1 w_2 - \xi_2 w_1 - u_1, \\ \dot{\xi}_1 = u_1, \quad \dot{\xi}_2 = u_2. \end{cases} \quad (4.2)$$

方程(4.2)可写成仿射非线性系统(3.10)的形式,

$$\dot{x} = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + u_1 f_4(x) + u_2 f_5(x), \quad (4.3)$$

其中

$$x = (w_1, w_2, w_3, \xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^5, u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2.$$

$$f_1(x) = (a_1 w_2 w_3, a_2 w_3 w_1, a_3 w_1 w_2, 0, 0)^T,$$

$$f_2(x) = (-b_1 \xi_1 w_2, b_2 \xi_1 w_1, -b_3 \xi_2 w_1, 0, 0)^T,$$

$$f_3(x) = (b_1 \xi_2 w_3, 0, 0, 0, 0)^T,$$

$$f_4(x) = (0, 0, -b_3, 1, 0)^T,$$

$$f_5(x) = (0, -b_2, 0, 0, 1)^T,$$

$$a_1 = (A_2 - A_3)/A_1, \quad a_2 = (A_3 - A_1)/A_2,$$

$$a_3 = (A_1 - A_2)/A_3,$$

$$b_1 = 1/A_1, \quad b_2 = 1/A_2, \quad b_3 = 1/A_3.$$

根据定理3.7,我们计算

$$\Delta_5 = \det \|f_{ij}\| (i, j = 1, 2, \dots, 5),$$

$$\Delta_5 = -b_1 w_1^2 w_3 \xi_2 (a_2 b_3 w_3 \xi_2 + a_3 b_2 w_2 \xi_1). \quad (4.4)$$

若 $\Delta_5 \neq 0$, 则据定理3.7, 系统(4.3)满足能控的必要条件;

若 $\Delta_5 = 0$, 则考察由 $\Delta_5 = 0$ 定义的集合包含关于基系统[(4.5) ~ (4.9)]

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = a_1 w_2 w_3, \quad \dot{w}_2 = a_2 w_3 w_1, \quad \dot{w}_3 = a_3 w_1 w_2, \\ \dot{\xi}_1 = 0, \quad \dot{\xi}_2 = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = -b_1 \xi_1 w_2, \quad \dot{w}_2 = b_2 \xi_1 w_1, \quad \dot{w}_3 = -b_3 \xi_2 w_1, \\ \dot{\xi}_1 = 0, \quad \dot{\xi}_2 = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\dot{w}_1 = b_1 \xi_2 w_3, \quad \dot{w}_2 = \dot{w}_3 = \dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 = 0, \quad (4.7)$$

$$\dot{w}_3 = -b_3, \quad \dot{\xi}_1 = 1, \quad \dot{w}_1 = \dot{w}_2 = \dot{\xi}_2 = 0, \quad (4.8)$$

$$\dot{w}_2 = -b_2, \quad \dot{\xi}_2 = 1, \quad \dot{w}_1 = \dot{w}_3 = \dot{\xi}_1 = 0 \quad (4.9)$$

的公共不变流形的条件.

我们根据定理3.8进行检验,其结果按定理3.7知,系统(4.2)满足能控性必要条件.

当两陀螺转轴成任意角时,我们可根据条件

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1),$$

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0, \beta_2, \beta_3), \quad \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$$

来建立坐标系,讨论方法同上.讨论的最后结果为系统仍然满足能控性必要条件.

参考文献(References)

- [1] Isidori A. Nonlinear Control Systems: An Introduction [M]. Vol. 72, Berlin: Springer-Verlag, 1985
- [2] 程代展. 非线性系统的几何理论[M]. 北京: 科学出版社, 1988
- [3] 程代展等. 非线性系统研究动态与展望[J]. 控制与决策, 1991, 6(5): 394 - 400
- [4] Ковалев А. М. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем[J]. Киев: Наукова думка, 1993
- [5] Харламов П. В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений[J]. Механика твердого тела. 1974. Вып. 6, 15 - 24
- [6] Ковалев А. М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем[J]. Киев: Наукова думка, 1980
- [7] Левин-Чивита Т и Амальди У. Курс теоретической механики[M]. В. 2Т. М.: изд-во иностран. лит. Т. 2, 1951

本文作者简介

贺昌政 1947年生, 1984年毕业于西南师范大学, 获理学硕士学位. 于1988年和1997年两次(各一年)赴乌克兰, 在乌克兰科学院应用数学与力学研究所副所长 Kovalev A. M 教授指导下做研究工作. 现为四川联合大学应用数学系教授, 运筹与控制论教研室主任. 主要从事非线性控制系统的能控性, 稳定性等方面的研究及其在力学系统中的应用工作.

杨柳 1971年生, 1997年毕业于四川联合大学, 获理学硕士学位. 同年考入四川联合大学化工机械与控制工程系攻读博士学位. 近年来主要从事非线性系统的能控性, 稳定性方面研究以及膜分离技术、水力旋流器方面的研究工作.