文章编号：1000-8152(2000)02-0270-03

270-272

基于广义正交多项式的近似系统解的存在唯一性*

曾建平 程 鹏 吴 斌
(北京航空航天大学自动控制系·北京，100083)

TP271 O231

摘要：通过在投影空间中的基变换，导出了一种基于广义正交多项式(GOPs)展开的线性时变系统的新的近似模型.基于这一模型，提出了近似系统解的存在唯一性判据及其实现方案.证明了对任意线性时变系统，都可以构造出基于 GOPs 展开的近似系统，使得对任意阶的这种近似系统的解总是存在唯一的.最后，给出两个简单的例子说明了本文方法的可行性.

关键词：广义正交多项式；线性时变系统；近似系统；存在唯一性
文献标识码：A

近似系统解

On the Existence of Unique Solution to the Approximated System Based on General Orthogonal Polynomials

ZENG Jianping, CHENG Peng and WU Bin
(Department of Automatic Control, Beijing University of Aeronautics & Astronautics · Beijing, 100083, P. R. China)

Abstract: In this paper, a new approximated model for linear time-varying systems is deduced via general orthogonal polynomials(GOPs) expansion by basis transformation in projection space. Based on the model, the existence criterion of unique solution to the approximated system and its algorithm are proposed. It is shown that the approximated system via GOPs expansion can be constructed for any linear time-varying system, such that there always exists a unique solution to the approximated system of any order. Finally, two simple examples are given to show feasibility of the method in this paper.

Key words: GOPs; linear time-varying system; approximated system; existence uniqueness

1 引言(Introduction)

近 20 年来，许多学者利用各种正交多项式(OPs)及广义正交多项式(GOPs)来研究线性时变系统的控制问题，并在系统分析、辨识及最优控制等方面取得了不少成果.这些工作多侧重于特定系统、特定问题中的应用，对于一般性的体系结构性质研究甚少.OPs/GOPs 方法在把微分方程转化为代数方程的同时，也破坏了原系统在较弱条件下成立的解的存在唯一性.文[1]给出了时变系统的近似系统存在唯一解的充要条件，但验证困难.在定常情形下，文[2,3]的结果表明：该问题等价于 $\lambda\mu\neq 1(\lambda\in\sigma(A),\mu\in\sigma(P)$，其中 $\sigma(\cdot)$ 为特征值集合，P 为积分算子矩阵)，这一结果不易推广到时变系统，且按[3]的方法来寻找存在唯一解的近似系统，验证不方便.本文基于 GOPs 展开，构造了一种近似系统模型，基于该模型给出了近似系统解存在唯一的判据及其实现方案，该结果较文[2,3](定常)和[1](时变)的结果要优越.

2 预备与约定(Preliminaries and terminology)

设 $L_{2,\rho}[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上，满足 $\int_a^b\rho(t)[f(t)]^2\mathrm{d}t<\infty$ 的可测函数 $f(t)$ 的全体构成的集合，其中 $\rho(t)$ 是权函数. $\forall f,g\in L_{2,\rho}[a,b]$，定义内积 $\langle f,g\rangle:=\int_a^b\rho(t)f(t)g(t)\mathrm{d}t$，由内积诱导范数 $\|f\|_{2,\rho}=\langle f,f\rangle^{1/2}$，则 $L_{2,\rho}[a,b]$ 构成一个可分的 Hilbert 空间[4]，因而存在一组完全的正交基 $\{\phi_i(t)\}$，且除系数外该正交基是唯一的.

记 $H_m[a,b]:=\mathrm{span}(\phi_0(t),\cdots,\phi_m(t))$，则 $H_m[a,b]$ 是 $m+1$ 维的 Hilbert 空间[5]. 所谓 GOPs 展开，即为从 $L_{2,\rho}[a,b]$ 到 $H_m[a,b]$ 的正交投影变换 P_m：

$$P_m:L_{2,\rho}[a,b]\to H_m[a,b],\quad P_m(x)=\sum_{i=0}^{m}x_i^{\phi}\phi_i(t),\tag{1}$$

其中 $x_i^{\phi}=\langle x,\phi_i\rangle/\langle\phi_i,\phi_i\rangle$ 为 x 的广义 Fourier 系数.

* 基金项目：博士学科点基金(9525)及国家自然科学基金(69574013)资助项目
收稿日期：1998-07-13；收修改稿日期：1999-03-19.

P_m 可自然推广到 x 为向量(矩阵)的情形,即可定义 $P_m^n(P_m^{k\times l})$ 把 n 维向量($k\times l$ 矩阵)的每一元素从 $L_{2,\rho}[a,b]$ 投影到 $H_m[a,b]$ 上. 以下对 P_m 和 $P_m^n(P_m^{k\times l})$ 不加区分, 从上下文易予确定. $\forall s\in H_m[a,b]$,设 $S^\phi\in\mathbb{R}^{m+1}$ 为其坐标,且形式的记为 $s=(\phi_0,\phi_1,\cdots,\phi_n)S^\phi$. $\{1,t,\cdots,t^m\}$ 也是 $H_m[a,b]$ 的一组基,令 s 在这组基下的坐标为$S^t\in\mathbb{R}^{m+1}$,同样形式的记为 $s=(1,t,\cdots,t^m)S^t$. s 在两组基下的坐标变换公式为:

$$S^t=F_mS^\phi, \tag{2}$$

其中 $F_m\in\mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$ 是下三角阵,其非零元可由 $\rho(t)$ 唯一确定[4]. 在不引起混淆的情况下,以下对关于基底$\{1,t,\cdots,t^m\}$下的坐标的上标 t 省略不写.

一般而言, $L_{2,\rho}[a,b]$ 包含了较平方可积空间 $L_2[a,b]$ 更广的函数类,即有:$L_{2,\rho}[a,b]\supseteq L_2[a,b]$. 相反的包含关系成立依赖于特定的 GOPs. 因此, $L_{2,\rho}[a,b]$ 包含了通常的控制函数集. 在以下讨论中,总假定函数的 GOPs 展开级数一致收敛.

3 主要结果(Main results)

考虑线性时变系统 Σ:

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\\ y=C(t)x.\end{cases} \tag{3}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n,u\in\mathbb{R}^p,y\in\mathbb{R}^q,A(t),B(t),C(t)$ 分别为相应维数的矩阵. 令 $P_m(x(t))=\sum\limits_{i=0}^{m}x_i^\phi\phi_i(t)$, $P_m(x)$ 在基底 $\{1,t,\cdots,t^m\}$ 下可表为 $P_m(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}x_it^i$. 同理,对 $u(t),y(t),A(t),B(t)$ 和 $C(t)$ 进行投影变换 P_m, 可导出:

命题 1

$$kx_k=\sum_{j=0}^{k-1}(A_{k-j-1}x_j+B_{k-j-1}u_j),\quad k>0; \tag{4a}$$

$$y_k=\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}x_j,\quad k\geqslant 0. \tag{4b}$$

证　将(3)中各量以其 GOPs 展式代替, 易证, 略.

记

$$\Lambda_m=\mathrm{diag}(E_n,\cdots,mE_n)+\begin{bmatrix}0&0\\(-A_{i-j})_{(m-1)\times(m-1)}&0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{mn\times mn},$$

$$V_m=[A_0^{\mathrm T},\cdots,A_{m-1}^{\mathrm T}]^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^{mn\times n},$$

$$D_m=(B_{i-j})_{m\times m}\in\mathbb{R}^{mn\times mp},$$

$$G_{m+1}=(C_{i-j})_{(m+1)\times(m+1)}\in\mathbb{R}^{(m+1)q\times(m+1)n},$$

其中当 $i<0$ 时,A_i,B_i 和C_i 分别表示相应维数的零矩阵. E_n 为单位矩阵. 将(4)写成矩阵形式,即为:

$$\Lambda_mX_m=D_mU_m+V_mx_0, \tag{5a}$$

$$Y_m=G_{m+1}\bar{X}_m, \tag{5b}$$

其中, $X_m=(x_1^{\mathrm T},\cdots,x_m^{\mathrm T})^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^{mn},U_m=(u_0^{\mathrm T},\cdots,u_{m-1}^{\mathrm T})^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^{m\times p},Y_m=(y_0^{\mathrm T},\cdots,Y_m^{\mathrm T})^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^{(m+1)q},\bar{X}_m=(x_0^{\mathrm T},X_m^{\mathrm T})^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^{(m+1)n}$. 令 $P_m(x)=\bar{x},P_m(y)=\bar{y}$, 即

$$\bar{x}(t)=\sum_{i=0}^{m}x_it^i, \tag{6a}$$

$$\bar{y}(t)=\sum_{i=0}^{m}y_it^i. \tag{6b}$$

定义 1　称(5),(6)式为系统 Σ 关于 $\{\phi_i(t)\}$ 的 $m(m\geqslant 1)$ 阶近似系统,记为 Σ_m. 近似系统 Σ_m 的初始条件定义为 $\bar{x}(t_0)=x(t_0)$.

求解 Σ_m 需要求Λ_m 的逆,容易证明有如下递推计算公式:

命题 2　$\Lambda_1^{-1}=E_n,\Lambda_{m+1}^{-1}=\begin{bmatrix}\Lambda_m^{-1}&0\\\tilde{V}_m\Lambda_m^{-1}/(m+1)&E_n/(m+1)\end{bmatrix},\tilde{V}_m=(A_{m-1},\cdots,A_0)$.

可见,本文定义的 Σ_m 适合于递推计算. 另外, 与传统 GOPs 展式相比,(6)式仅多了一坐标变换(2),而使得其约束关系(5)较传统的近似系统约束方程[1,3]不仅形式简捷,且推证上更为直接,避免了正交基乘积和积分运算等引起的繁琐的矩阵运算. 另外,由(5)式还可显式地构造状态转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 的近似模型 $\bar{\Phi}_m(t,t_0)$,并可证明 $\bar{\Phi}_m(t,t_0)$ 保持了 $\Phi(t,t_0)$ 的性质,这也说明Σ_m 集中了较多的系统结构信息,因不属本文范畴,将另文介绍.

定义 2[1]　称 Σ_m 的解是存在唯一的, 如果 $\forall\bar{x}(t_0)$、$\forall U_m(u(t)),\bar{X}_m(\bar{x}(t))$ 都存在唯一.

记 $\Psi_m(t)=E_n+(t,t^2,\cdots,t^m)\Lambda_m^{-1}V_m$, 则可得近似系统解的存在唯一性判据:

定理 1　Σ_m 存在唯一解,当且仅当 $\Psi_m(t_0)$ 非奇异.

证　由(5)及定义 2,易证,略.

与命题 2 类似, $\Psi_m(t)$ 也可以实现递推计算:

命题 3　$\Psi_{m+1}(t)=\Psi_m(t)+[\tilde{V}_m\Lambda_m^{-1}V_m+A_m]t^{m+1}/(m+1),\Psi_1(t)=E_n$.

由定理 1 可得推论:

推论 1　若 $t_0=0$,则 Σ_m 的解必存在唯一.

推论 2　在定常情形下, Σ_m 的解存在唯一,当

且仅当 $\forall\lambda\in\sigma(A),\sum_{i=0}^{m}(\lambda t_0)^i/i!\neq 0$.

证 在定常情形下，$\Psi_m(t)=\sum_{i=0}^{m}t^iA^i/i!$，令 $J=Q^{-1}AQ$ 为 A 的约当型，其中 Q 为非奇异矩阵，则 $Q^{-1}\Psi_m(t)Q=\sum_{i=0}^{m}t^iJ^i/i!\Rightarrow\Psi(t_0)$ 非奇异 $\Leftrightarrow\det(Q^{-1}\Psi_m(t_0)Q)\neq 0\Leftrightarrow\forall\lambda\in\sigma(A)\sum_{i=0}^{m}(\lambda t_0)^i/i!\neq 0$. 证毕.

定理1给出了易于检验的存在唯一性判据.在定常情形下，推论2的结果要比文[2,3]得到的结果优越.由推论1，可以证明对任意线性时变系统，$\forall_m$ 都可以构造出基于GOPs展开的近似系统 Σ_m，使得 Σ_m 的解总是存在唯一的.

定理2 若 $0\in[a,b]$，则 $\forall\Sigma,\forall m,\exists\Sigma_m$, s.t. Σ_m 的解存在唯一.

证 设 Σ 的时间作用范围是 $[t_0,t_f]$，定义映射 $\tau:[t_0,t_f]\to[0,b]$，$\tau(t)=b(t-t_0)/(t_f-t_0)$，则 $\tau:\Sigma\to\tau(\Sigma)$，由 $\tau(t_0)=0$，即 $\tau(\Sigma)$ 的初始时刻为0，由推论1，即得证.

若 $0\notin[a,b]$，可预先对GOPs的作用区间 $[a,b]$ 进行线性变换 $\pi:[a,b]\to[a',b']$，使得 $0\in[a',b']$. 令 $\pi:\rho(t)\to\rho^*(t)$, $\pi:\phi_i(t)\to\phi_i^*(t)$，则：

定理3 $\{\phi_i^*(t)\}$ 是 $[a',b']$ 上关于权函数 $\rho^*(t)$ 的正交基.

证 $\forall[a',b']$, s.t. $0\in[a',b']$，令 $\pi(t)=((a'-b')t+ab'-a'b)/(a-b)$，可直接验证，略. 证毕.

定理2,3说明对任意线性系统，都可以构造出解必存在唯一的近似系统.

4 算例(Illustrative examples)

为说明本文方法，给出两个简单算例：

例1 设 $A(t)=e^t$，采用Legendre多项式展开：

$$P_2(A(t))=1.1752\phi_0+1.1036\phi_1+0.3578\phi_2=$$
$$0.9963+1.1036t+0.5367t^2$$

则 $\Psi_2(t)=1+0.9963t+1.0481t^2$, $\forall t_0\in[-1,1]$, $\Psi_2(t_0)\neq 0$，由定理1，近似系统 Σ_2 解存在唯一.

例2 设 $A(t)=\mathrm{diag}(e^t,2)$，同例1，采用Legendre多项式展开.并设系统 Σ 作用区间为 $[-0.5,1]$，$t_0=-0.5$. 可计算出：

$$P_1(e^t)=1.1752\phi_0+1.1036\phi=1.1752+1.1036t,$$
$$P_1(A(t))=\mathrm{diag}(1.1752,2)+\mathrm{diag}(1.1036,0)t,$$
$$\Psi_1(t)=\mathrm{diag}(1+1.1752t,1+2t),$$

显然 $\Psi_1(t_0)$ 奇异，由定理1，Σ_1 不存在唯一解.进行线性变换 $\tau(t)=2(2t+1)/3$，则 $\tau(t_0)=0$，由推论1，近似系统 $\tau(\Sigma)_1$ 的解必存在唯一.

5 结语(Conclusions)

本文通过在 $H_m[a,b]$ 中的基底变换，建立了一种基于GOPs展开的系统参数及输入/输出关系的约束代数方程，这组方程可以看成是一种新的基于GOPs展开的线性系统的近似系统模型.这种近似系统与传统的近似系统模型[1]本质上是相同的，其优点是：1)除GOPs展开外，不再在模型中引入新的舍入误差；2)结构简单；3)压缩了近似系统的结构信息，可以直接派生出近似系统状态转移矩阵等新概念，从而可以进一步在分析系统结构性质在近似系统上的保持和反映发挥作用；4)由该模型得出的解的存在唯一性判据易于验证，较文[1~3]的相应结果要简单.而且，按照这一思想，可以对一般线性系统，构造出解唯一存在的近似系统.构造这一系统，除对原系统作一简单的时间尺度变换外，与基于GOPs展开的传统方法相比，并不增加其它的计算负担，而使得近似系统解的存在唯一性得到自然的解决.

参考文献(References)

[1] Tsay Shun-Chuan and Lee Tsu-Tian. Analysis and optimal control of linear time-varyig systems via general orthogonal polynomials[J]. Int. J. Syst. Sci., 1987, 18(8): 1579 - 1594

[2] Lewis F L and Mertzios B G. Analysis of singular system using orthogonal function [J]. IEEE Trans. on Automat. Contr., 1987, AC-32(6): 527 - 530

[3] Ding X and Frank D M. Structure analysis via orthogonal function [J] Int. J. Control, 1989, 50(6): 2285 - 2300

[4] 徐利治，周蕴时，孙玉柏.逼近论[M].北京：国防工业出版社，1985

[5] 韩崇昭，胡保生.泛函分析及其在自动控制理论中的应用[M].西安：西安交通大学出版社，1991

本文作者简介

曾建平 1966年生.分别于1989年和1992年在东北大学和华北工学院获理学学士和工学硕士学位.目前在北京航空航天大学攻读博士学位.感兴趣的研究领域有：线性系统，鲁棒控制，H_∞控制理论.

程 鹏 1938年生.1962年毕业于北京大学数学力学系，现任北京航空航天大学自动控制系教授、博士生导师.研究领域为：线性系统理论，多变量系统理论，鲁棒控制和运动稳定性.

吴 斌 1970年生.现为北京航空航天大学控制理论与应用专业博士研究生.主要研究方向为：正交函数在线性系统理论中的应用，鲁棒控制等.