文章编号：1000-8152(2000)02-0273-04

一类结构不确定的非线性相似组合系统的分散鲁棒镇定*

王银河　刘粉林　黎阳生　张嗣瀛
(东北大学自动控制系·沈阳，110006)

摘要：首先描述了两个控制系统间的相似性概念，然后讨论了一类结构不确定的非线性相似组合系统的鲁棒镇定问题。设计出一类分散控制器，这种控制器由线性和非线性两部分组成。结果表明，相似结构确实可以简化组合系统鲁棒镇定的判据。最后的算例和仿真表明了本文结论的有效性。

关键词：非线性相似组合系统；分散控制器；分散鲁棒镇定
文献标识码：A

Robust Decentralized Stabilization for a Class of Nonlinear Composite Systems with Structure Uncertainty and Similarity

WANG Yinhe, LIU Fenlin, LI Yangsheng and ZHANG Siying
(Department of Automatic Control, Northeastern University · Shenyang, 110006, P.R.China)

Abstract: The system description with similarity is given, then robust decentralized stabilization for a class of nonlinear systems with sturcture uncertainties and similarity is discussed. A robust decentralized stabilizing controller is designed, which is composed of linear part and nonlinear part. It is shown that similar structure can simplify the analysis and design of composite systems. Moreover, the similar structures of nonlinear composite systems have the characters which can stabilize the systems.

Key words: similar nonlinear composite systems; robust decentralized stabilizing controller; robust decentralized stabilization

1　相似性概念(Similarity concepts)

由于非线性组合系统固有的内部复杂性及外围环境的干扰，目前还没有统一的处理方法。即使控制系统本身是线性的，但由于其外围环境的非线性干扰以及建模过程的参数不准确性，也无法完全将其按线性系统对待处理。所以，非线性系统的镇定问题将是控制理论界最重要的尚待解决的问题，其中，如何设计分散镇定控制器是一个重要方面。按文[1,2]的思想，首先考虑具有特殊结构的系统，比如具有级联结构的级联系统[3]，具有对称结构的对称系统[4]，具有相似结构的相似系统[5]等，然后再讨论一般的系统可能是一条非常有效的途径。关于具有相似结构的控制系统的研究目前已有一些结果[1,2,5,6]，但还有许多问题尚待进一步解决。首先，如何用数学语言描述两个控制系统间的相似性是开始研究的重要一环。受文[1,2,6]的启发，系统的相似性应该是其与另一系统间的或其各子系统间的在某种相互作用中保持不变的性质或保持部分不变的性质。而系统间的相互作用可以用映射描述。为了充分利用数学中的微积分方法，用微分几何中的映射描述控制系统的相似性较为有效。

考虑如下两个非线性系统：

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, v, t), \tag{1}$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{2}$$

其中，状态变量 $\bar{x} \in \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^m$，$x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$，$\bar{U}$，$U$ 分别是 $\mathbb{R}^m$，$\mathbb{R}^n$ 中的开集(为方便起见，以下均设 $m \geqslant n$)。$\bar{f}(\bar{x}, v, t)$，$f(x, u, t)$ 是相应维数的光滑向量场。控制 $u, v \in \mathbb{R}^d$。

定义 1　若存在局部正则嵌入(或微分同胚) φ: $U \mapsto \bar{U}$，$x \mapsto \bar{x}$，及正则反馈 $u = \alpha(x, t) + \beta(x, t)v$，使切映射 φ_* 满足 $\varphi_* f(x, \alpha(x, t) + \beta(x, t)v, t) = \bar{f}(\varphi(x), v, t)$，则称系统(2)与(1)相似，$(\varphi, \alpha, \beta)$ 称为相似参量。这里 $\alpha(x, t)$ 是 d 维光滑向量场，$\beta(x, t)$ 是 d 阶光滑可逆函数矩阵。

命题 1　对系统(1)，(2)，若存在微分同胚或正则嵌入 φ，正则反馈 $u = \alpha_1(x, t) + \beta_1(x, t)\bar{v}$，$v =$

* 基金项目：国家自然科学基金(69774005)、攀登计划及高校博士点基金资助课题。
收稿日期：1998-03-02；收修改稿日期：1999-03-29。

$\alpha_2(x,t)+\beta_2(x,t)\bar{v}$，使

$$\varphi_* f(x,\alpha_1(x,t)+\beta_1(x,t)\bar{v},t)=\bar{f}(\varphi(x),\alpha_2(\varphi(x),t)+\beta_2(\varphi(x),t)\bar{v},t),\tag{3}$$

则系统(2)与(1)相似，相似参量为$(\varphi,\alpha_1-\beta_1\beta_2^{-1}\alpha_2,\beta_1\beta_2^{-1})$.（证明略）

对于系统矩阵分别是(A,B,C)和$(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$的两个定常线性系统，容易验证下面结果：

命题2 如果存在列线性无关的$m\times n$阶实矩阵F，d可逆实方阵$\beta,\bar{\beta}$，$d\times n$阶矩阵K和$d\times m$阶矩阵$\bar{K}$使

$$F(A+BK)=(\bar{A}+\bar{B}\bar{K})F,\quad FB\beta=\bar{B}\bar{\beta}\tag{4}$$

成立，则此两定常线性系统相似.相似参量为：微分同胚或正则嵌入$\bar{x}=Fx$，正则反馈$u=(K-\bar{\beta}\beta^{-1}\bar{K}F)x+\bar{\beta}\beta^{-1}v$.

注1 i) 如果$\beta,\bar{\beta}$为单位矩阵，$K,\bar{K}$为零矩阵，$m=n$，则(4)式正是线性系统理论中相似系统的定义，所以定义1可以看作是线性系统理论中相似系统的定义在非线性系统中的一般化. ii) 考虑到实际应用中线性系统的特殊性，本文以后称两个线性系统是相似的，均指命题2中条件(4)成立. $F,K,\bar{K},\bar{\beta},\beta$称为相似参量矩阵.

如何通过较简单的计算判别两个控制系统是相似的，是一个值得深入研究的问题.对于命题2所陈述的两个线性系统，我们有

引理1 如果两线性系统都是单输入系统，且系统(A,B,C)完全可控，秩$[\bar{B},\bar{A}\bar{B},\bar{A}^2\bar{B},\cdots,\bar{A}^{m-1}\bar{B}]=n$，则两线性系统相似.

证 因为系统(A,B,C)是完全可控的，所以容易验证存在非奇异线性变换$x=Py$和反馈$u=(-a_n,-a_{n-1},\cdots,-a_1)y+v_1$使系统$(A,B,C)$变为如下形式：

$$\dot{y}=A^0y+B^0v_1,\tag{5}$$

这里

$$A^0=\begin{bmatrix}0 & I_{n-1}\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

I_{n-1}是$n-1$阶单位矩阵，$B^0=(0\ \cdots\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$.

因为秩$[\bar{B},\bar{A}\bar{B},\bar{A}^2\bar{B},\cdots,\bar{A}^{m-1}\bar{B}]=n$，所以，若$m=n$. 通过线性变换两线性系统都可化为形式(5)，由命题2知此两系统是相似的；当$m\neq n$时，存在非奇异线性变换$\bar{x}=\bar{Q}\bar{z}$和反馈$\bar{v}=(-b_n,-b_{n-1},\cdots,-b_1,0,\cdots,0)\bar{z}+\bar{v}$，可将系统$(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$进行可控结构分解得如下形式：

$$\dot{\bar{z}}=\begin{bmatrix}A^0 & \bar{A}_{12}\\ 0 & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{z}_1\\ \bar{z}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B^0\\ 0\end{bmatrix}\bar{v},\tag{6}$$

取

$$F=\bar{Q}\begin{bmatrix}I_n\\ 0\end{bmatrix}P^{-1},\ K=(-a_n,-a_{n-1},\cdots,-a_1),$$

$$\bar{K}=(-b_n,b_{n-1},\cdots,-b_1,0,\cdots,0),$$

$$\beta=\bar{\beta}=1,$$

这里I_n是n阶单位矩阵，易见F是列线性无关矩阵，$\bar{Q},P^{-1}$可由线性系统理论求出.容易验证(4)式成立.所以由命题2知两线性系统相似. 证毕.

2 主要结果(Main results)

考虑如下结构不确定组合大系统：

$$\dot{x}_i=A_ix_i+\Delta f_i(x_i)+B_i(u_i+\Delta g_i(x_i))+(H_i(x)+\Delta H_i(x))x_i,\tag{7}$$

其中$i=1,2,\cdots,N$.状态向量$x_i\in\mathbb{R}^{n_i}$，输入$u_i\in\mathbb{R}^d$，$\Delta f_i(x_i),\Delta g_i(x_i),\Delta H_i(x)$都是结构不确定项. $n_1=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_N\}$. $x=(x_1^{\mathrm{T}},x_2^{\mathrm{T}},\cdots,x_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

定义2 若组合大系统(7)的每一个标称线性系统均与第1个标称线性系统相似，则称(7)为具有相似结构的组合大系统或简称(7)的相似组合大系统.

假设1 若(7)是相似组合大系统，设第i个标称线性系统与第1个标称线性系统间的相似参量矩阵为$(F_i,K_i,K_1,\beta_i,\beta_1)$，即有下式成立：

$$F_i(A_i+B_iK_i)=(A_1+B_1K_1)F_i,$$
$$F_iB_i\beta_i=B_1\beta_1,\quad i=1,2,\cdots,N.\tag{8}$$

假设2 存在矩阵$\bar{K}_1$使$\bar{A}_1+B_1\bar{K}_1$为渐近稳定阵.

显然，如果假设2成立，则对任一给定的正定矩阵Q，下面的Lyapunov方程存在唯一正定矩阵解P：

$$(A_1+B_1\bar{K}_1)^{\mathrm{T}}P+P(A_1+B_1\bar{K}_1)=-Q.\tag{9}$$

假设3 i) $\|\Delta g_i(x_i)\|\leqslant\xi_i(x_i)$;

ii) $\|\Delta f_i(x_i)\|\leqslant\alpha_i(x_i)\|x_i\|$;

iii) $\|\Delta H_i(x)\|\leqslant\eta_i(x)$.

其中$\xi_i(\cdot),\eta_i(\cdot),\alpha_i(\cdot)$均是已知的连续函数，$\|\cdot\|$表示欧氏范数.

对系统(7)，提出如下主要由相似参量决定的鲁棒分散控制器：

$$u_i=u_i^a+u_i^b,\tag{10a}$$

$$u_i^a = K_i x_i + \beta_i \beta_1^{-1} (\bar{K}_1 - K_1) F_i x_i, \tag{10b}$$

$$u_i^b = \begin{cases} -\dfrac{B_i^{\mathrm{T}} F_i^{\mathrm{T}} P F_i x_i}{\| B_i^{\mathrm{T}} F_i^{\mathrm{T}} P F_i x_i \|} \xi_i(x_i), & B_i^{\mathrm{T}} F_i^{\mathrm{T}} P F_i x_i \neq 0. \\ 0, & B_i^{\mathrm{T}} F_i^{\mathrm{T}} P F_i x_i = 0. \end{cases} \tag{10c}$$

定理 1　设(7)是满足假设 1～3 的相似组合大系统,如果在 $x = 0$ 的某邻域内下列条件成立:

$$\lambda_{\min}(F_i^{\mathrm{T}} Q F_i) - 2\lambda_M(F_i^{\mathrm{T}} P F_i H_i(x)) -$$
$$2\lambda_{\max}(F_i^{\mathrm{T}} P F_i)\eta_i(x) > 0, \quad i = 1,2,\cdots,N,$$

则组合大系统(7)可用鲁棒分散控制器(10)局部渐近镇定.其中 $\lambda_{\min}(\cdot)$、$\lambda_{\max}(\cdot)$、$\lambda_M(\cdot)$ 分别表示相应矩阵的最小特征值、最大特征值、最大奇异值. $\|\cdot\|$ 表示欧氏范数.

证　由(7)与(10)构成的闭环系统为:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \Delta f_i(x_i) + B_i(u_i^a + u_i^b + \Delta g_i(x)) + (H_i(x) + \Delta H_i(x)) x_i. \tag{11}$$

考虑正定函数 $V(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i^{\mathrm{T}} (F_i^{\mathrm{T}} P F_i) x_i$,沿系统(11)的导数为:

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(11)} = \sum_{i=1}^{N} \{ & [A_i x_i + B_i u_i^a]^{\mathrm{T}} (F_i^{\mathrm{T}} P F_i) x_i + \\ & x_i^{\mathrm{T}} (F_i^{\mathrm{T}} P F_i)[A_i x_i + B_i u_i^a] + \\ & 2x_i^{\mathrm{T}} (F_i^{\mathrm{T}} P F_i)[\Delta f_i(x_i) + B_i(u_i^b + \Delta g_i(x_i))] + \\ & 2x_i^{\mathrm{T}} (F_i^{\mathrm{T}} P F_i)(H_i(x) + \Delta H_i(x)) x_i \}. \end{aligned} \tag{12}$$

由(8)、(10b)得:

$$x_i^{\mathrm{T}} (F_i^{\mathrm{T}} P F_i)[A_i x_i + B_i u_i^a] = x_i^{\mathrm{T}} F_i^{\mathrm{T}} P (A_1 + B_1 \bar{K}_1) F_i x_i. \tag{13}$$

由假设 2 ii)可知:

$$x_i^{\mathrm{T}} (F_i^{\mathrm{T}} P F_i) \Delta f_i(x_i) \leqslant \alpha_i(x_i) \lambda_{\max}(F_i^{\mathrm{T}} P F_i) \| x_i \|^2. \tag{14}$$

由(10c)可得:

$$\begin{aligned} & x_i^{\mathrm{T}} (F_i^{\mathrm{T}} P F_i)[B_i \Delta g_i(x_i) + B_i u_i^b] \leqslant \\ & \| x_i^{\mathrm{T}} F_i^{\mathrm{T}} P F_i B_i \| (-\xi_i(x_i) + \| \Delta g_i(x_i) \|) \leqslant 0. \end{aligned} \tag{15}$$

所以由(12)～(15)得:

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(11)} \leqslant \sum_{i=1}^{N} \{ & - x_i^{\mathrm{T}} F_i^{\mathrm{T}} Q F_i x_i + \\ & 2x_i^{\mathrm{T}} (F_i^{\mathrm{T}} P F_i)(H_i(x) + \Delta H_i(x)) x_i + \\ & \alpha_i(x_i) \lambda_{\min}(F_i^{\mathrm{T}} P F_i) \| x_i \|^2 \} \leqslant \\ - \sum_{i=1}^{N} \{ & [\lambda_{\min}(F_i^{\mathrm{T}} Q F_i) - 2\lambda_M(F_i^{\mathrm{T}} P F_i H_i(x)) - \\ & 2\lambda_{\max}(F_i^{\mathrm{T}} P F_i)(\alpha_i(x_i) + \eta_i(x))] \| x_i \|^2 \}. \end{aligned}$$

因此,当定理 1 的假设条件得到满足时, $\dot{V}|_{(11)}$ 是负定的.　　证毕.

3　仿真算例(Simulation example)

考虑形如(7)的由三个子系统($i = 1,2,3$)构成的组合大系统,其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$x_1 = (x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13})^{\mathrm{T}},$$

$$x_j = (x_{j1} \quad x_{j2}), \quad j = 1,2. \quad H_i(x) = 0.$$

结构不确定项

$$\| \Delta f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \| \leqslant 0.1 \sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_i^2},$$

$$\| \Delta f_2(x_5, x_6) \| \leqslant \frac{1}{9} \sqrt{\sum_{i=5}^{6} x_i^2},$$

$$\| \Delta f_3(x_7, x_8) \| \leqslant 0.1 \sqrt{\sum_{i=7}^{8} x_i^2},$$

$$\| \Delta g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \| \leqslant 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_i^2},$$

$$\| \Delta g_2(x_5, x_6) \| \leqslant 2 \sqrt{\sum_{i=5}^{6} x_i^2},$$

$$\| \Delta g_3(x_7, x_8) \| \leqslant 2 \sqrt{\sum_{i=7}^{8} x_i^2},$$

$$\| \Delta H_1(x) \| \leqslant 0.1, \quad \| \Delta H_2(x) \| \leqslant 0.11,$$

$$\| \Delta H_3(x) \| \leqslant 0.13.$$

由引理 1 或通过观察取 $F_1 = I_4$(4 阶单位矩阵), $F_2 = F_3 = (I_2 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$, $K_1 = (1, -1, 0, 0)$, $K_2 = K_3 = (0, 0)$.容易验证此系统是相似组合系统.取 $Q = I_4$, $\bar{K}_1 = (-7, -3, 0, 0)$.容易验证定理 1 中的条件都得到满足,所以,此组合系统可用形如(10)的分散鲁棒控制器渐近镇定.

分别取:

$$\Delta f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$0.1(x_1 \sin x_2 \quad x_1 \cos x_2 \quad x_2 \quad x_3)^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta f_2(x_5, x_6) = \frac{1}{9}(x_5 \quad x_6)^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta f_2(x_5,x_6) = 0.1(x_7 \quad x_8)^{\mathrm{T}};$$

$$\Delta g_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_3\sin x_4,$$

$$\Delta g_2(x_5,x_6) = 2x_5\sin x_6,$$

$$\Delta g_3(x_7,x_8) = 2x_7\sin x_8;$$

$$\Delta H_1(x) = 0.1\sin x_7,\quad \Delta H_2(x) = 0.11\sin x_1,$$

$$\Delta H_3(x) = 0.12\sin x_5,$$

初值

$$x(0) = [-1,0.8,-1.3,2,-0.9,0.75,-0.8,0.5].$$

进行仿真如图1.

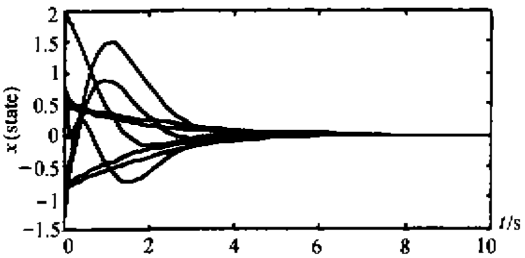

图1 状态响应曲线

Fig. 1 The state corresponding curve

由此例可以看出定理1中的条件可用来估计系统镇定域的大小.由于控制器(10c)的"砰砰"结构,一般情况下,系统在控制器(10)的作用下会出现颤动现象.

4 结论(Conclusion)

由于在实际存在的组合大系统中,各子系统间的互联关系往往由于各种原因其结构并不完全已知,所以将组合大系统中的互联项分为已知和未知两部分分别处理是有实际背景的.这样的处理方法也可以减少所得结论的保守性.另外,本文假设2只涉及第1个标称线性系统,因此,当 N 较大时,这种假设条件具有计算量小的优点.由于本文所定义的系统相似概念包含了文[1,2,5,6]中的情景,所以本文所呈现的处理方法更具有一般性.本文的结果表明,相似结构具有稳固系统的特性,可以简化系统分散镇定的判据,这与文[1,2]的预见完全吻合.

参考文献(References)

[1] 张嗣瀛,王景才,刘晓平.微分几何方法与非线性控制系统(5)[J].信息与控制,1992,21(5):288-294

[2] 张嗣瀛.复杂控制系统的对称性及相似性结构[J].控制理论与应用,1994,11(2):231-237

[3] Qu Zhihua and Darren M Dawson. Robust control of cascaded and individually feedback linearizable nonlinear systems [J]. Automatica, 1994,30(6):1057-1064

[4] 赵军,张嗣瀛.非线性系统的广义对称性和可控性[J].科学通报,1991,18(1):1428-1430

[5] Yang Guanghong and Zhang Siying. Structural properties of large-scale systems possessing similar structures[J]. Automatica, 1995,31(7):1011-1017

[6] 严星刚,张嗣瀛.不确定非线性相似组合大系统的结构相似鲁棒控制器设计[J].控制理论与应用,1997,14(4):513-519

本文作者简介

王银河 1962年生.1990年毕业于四川师范大学数学系,获硕士学位.现在东北大学攻读博士学位.目前的研究领域是非线性系统的结构性质研究,鲁棒控制与自适应控制等.

刘粉林 1964年生.1991年毕业于哈尔滨工业大学基础数学专业,获硕士学位.现在东北大学攻读博士学位.主要研究方向:复杂系统的鲁棒控制等.

黎阳生 1959年生.1989年在东北大学获硕士学位.现在东北大学攻读博士学位.主要研究领域为复杂系统的鲁棒控制等.

张嗣瀛 1925年生.1948年毕业于武汉大学机械系,1957年至1959年赴前苏联莫斯科大学数学力学系进修.现为东北大学自动控制系教授,中国科学院院士.主要研究方向为对策理论及复杂控制系统结构分析.