文章编号: 1000-8152(2000)02-0309-03

非线性摄动离散系统 H_∞ 鲁棒控制

屈百达 吕艳辉

(沈阳工业学院管理工程系·沈阳 110045) (东北大学工商管理学院·沈阳, 110006)

黄小原

TP271.8

摘要: 对于具有非线性摄动的离散系统, 提出了 H_∞ 鲁棒控制问题. 应用离散系统 H_∞ 范数与 Riccati 不等式的关系, 给出了考虑具有不确定非线性摄动离散系统的 H_∞ 鲁棒性能设计准则, 以此, 给出了对于这样的被控对象的反馈控制器设计方法.

关键词: 离散系统; 非线性摄动; 不确定性; Riccati 不等式; H_∞ 鲁棒控制

文献标识码: A

Robust H_∞ Control for Discrete-Time Systems with Nonlinear Perturbations

QU Baida and LU Yanhui

(Management Engineering Department of Shenyang Institute of Technology·Shenyang, 110045, P. R. China)

HUANG Xiaoyuan

(Business Management School of Northeastern University·Shenyang, 110006, P. R. China)

Abstract: This paper addresses the robust H_∞ control problem of discrete systems with nonlinear perturbations. Using the relation between H_∞ -norm and Riccati inequality, a design criterion of robust H_∞ performance is given for the class of discrete-time systems with uncertain nonlinear perturbation. A robust H_∞ control strategy is then proposed for discrete-time systems with nonlinear perturbations.

Key words: discrete-time system; nonlinear perturbation; uncertainty; Riccati inequality; robust H_∞ control

1 引言 (Introduction)

离散系统在电气、电子工程、经济管理工程等领域具有广泛的应用背景. 对于离散系统的 H_∞ 控制问题, 近年来已有许多研究^[1-3]. 文献[1]提出了离散系统 H_∞ 控制的状态空间法, 文献[2]又提出了其传递函数法, 并在离散有界实引理^[1]基础上给出了离散系统 H_∞ 范数与 Riccati 方程的关系, 文献[3]将离散有界实引理应用于系统的 H_∞ 状态反馈控制, 并给出了设计方法, 以此, 奠定了对离散系统 H_∞ 控制进行广泛而深入研究的基础. 然而, 对于具有不确定性特别是具有非线性摄动的离散系统, 研究尚不充分, 且未发现面向应用且易于操作的成果. 而这类系统在许多实际应用中却是普遍的. 因此, 本文将对此类系统进行一工程应用性研究, 旨在给出方便可行的设计方法.

2 离散系统 H_∞ 鲁棒性能设计准则 (Design criteria for H_∞ robust performance of discrete systems)

考虑一具有不确定非线性摄动和 L_2 扰动的系统

$$x(k+1) = Ax(k) + \Delta f(x(k), k) + Bw(k), \quad (1a)$$

$$z(k) = Cx(k). \quad (1b)$$

其中, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量, $\Delta f(x(k), k): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ 表示未知非线性函数阵, 满足

$$\Delta f(x, k) = E\delta(x, k), \quad \|\delta\| \leq \|W_\delta\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

$E \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为已知阵, $\delta: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为满足 $\delta(0, k) = 0$ 的未知函数向量; $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 为扰动输入阵, $w(k) \in \mathbb{R}^r$ 为 L_2 扰动向量, $z(k) \in \mathbb{R}^q$ 为系统评价输出向量, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ 为状态加权阵, (C, A) 为可观测对.

引理 1^[2,3] 对于给定传递函数 $G(z) = C(zI - A)^{-1}B$ 的可观测实现, A 为稳定阵且成立 $\|G(z)\|_\infty < 1$ 的充分必要条件为 Riccati 不等式 $A^T X A - X + A^T X B (I - B^T X B)^{-1} B^T X A + C^T C < 0$ 具有正定解 $X = X^T$, 使得 $I - B^T X B > 0$.

定理 1 (证明从略) 对于 $w = 0$, 若 A 为稳定阵且存在适当的标量 $\lambda > 0$, 使得

$$\|\bar{C}(zI - A)^{-1}B\|_{\infty} < 1 \quad (3)$$

成立,则系统(1)的平衡点 $x = 0$ 对于 $\forall \Delta f$ 是渐近稳定的,其中

$$B = \lambda E, \quad C = \lambda^{-1}W. \quad (4)$$

定理 2(证明从略) 如果存在适当的标量 $\lambda > 0$, 使得 Riccati 不等式

$$A^T X A - X + A^T X \hat{B} (I - \hat{B}^T X \hat{B})^{-1} \hat{B}^T X A + \hat{C}^T \hat{C} < 0 \quad (5)$$

具有正定解 $X = X^T$, 使得 $I - \hat{B}^T X \hat{B} > 0$, 则系统(1)满足 H_{∞} 鲁棒性能指标:

1) 对于任意满足(2)的 Δf , 当 $w = 0$ 时, 系统的平衡点 $x = 0$ 是稳定的;

2) 对于任意满足(2)的 Δf 和 $\forall w \in L_2[0, T]$ 当 $x(0) = 0$ 时, $\|z\|_T < \|w\|_T$ 对任意给定的 $T > 0$ 成立.

其中

$$\hat{B} = [B \quad \lambda E], \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C \\ \lambda^{-1} W \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\|\cdot\|_T = \left[\sum_{k=0}^T \cdot^T(k) \cdot(k) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

显然, 当 $T \rightarrow \infty$ 时, 上述 $L_2[0, T]$ 等价于 L_2 .

3 反馈控制设计(Feedback control design)

考虑具有不确定非线性摄动的离散被控对象

$$x(k+1) = Ax(k) + \Delta f(x(k), k) + B_1 w(k) + B_2 u(k), \quad (7a)$$

$$z(k) = Cx(k) + Du(k), \quad (7b)$$

其中, $u(k) \in \mathbb{R}^p$ 为控制输入向量, B_1, B_2, D 为适当维数已知阵, (C, A) 可观测, (A, B_2) 可稳定. 其 H_{∞} 鲁棒控制设计问题叙述为: 对于被控对象(7), 设计控制器

$$u(k) = Kx(k), \quad (8)$$

使得(7)与(8)构成的闭环系统满足 H_{∞} 鲁棒性能指标 1) 和 2).

为此, 定义辅助标称系统

$$x(k+1) = Ax(k) + B_1 w(k) + B_2 u(k). \quad (9a)$$

$$z'(k) = C_e x(k) + D_e u(k), \quad (9b)$$

其中

$$B_e = [B_1 \quad \lambda E], \quad C_e = \begin{bmatrix} C \\ \lambda^{-1} W \end{bmatrix}, \quad D_e = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

$\lambda > 0$ 为任意给定标量, 引入反馈控制(8), 则从 w' 到 z' 的闭环传递函数为

$$G_{z,w'}(z) = (C_e + D_e K)(zI - A - B_2 K)^{-1} B_e.$$

定理 3 对于被控对象(7), 若存在适当的标量 $\lambda > 0$, 使得(9)与(8)构成的闭环系统内部稳定且 $\|G_{z,w'}(z)\|_{\infty} < 1$, 则(7)与(8)构成的闭环系统满足 H_{∞} 鲁棒性能指标 1) 和 2).

证 (8)与(9)构成的闭环系统可表示为

$$x(k+1) = A_f x(k) + \Delta f(x, k) + B_1 w(k), \quad (11a)$$

$$z(k) = C_f x(k), \quad (11b)$$

其中

$$A_f = A + B_2 K, \quad C_f = C + DK. \quad (12)$$

根据定理 2, 并构造

$$\hat{B}_f = [B_1 \quad \lambda E], \quad \hat{C}_f = \begin{bmatrix} C_f \\ \lambda^{-1} W \end{bmatrix}, \quad (13)$$

结合(13)与(10), (12), (9)与(8)构成的闭环系统可表示为

$$x(k+1) = A_f x(k) + \hat{B}_f w', \\ z'(k) = \hat{C}_f x(k).$$

由引理 1, 通过相应的推算即证得定理 3.

上述定理表明, 对于具有非线性摄动的被控对象, 其 H_{∞} 鲁棒控制的性能准则设计问题, 可以通过对适当的标称系统(9)所对应的 H_{∞} 标准设计问题来求解.

定理 4 对于被控对象(7), (8), 如果存在适当的标量 $\lambda > 0$, 使得 Riccati 不等式

$$A^T X A - X + A^T X B_e (I - B_e^T X B_e)^{-1} B_e^T X A + C_e^T C_e - [B_e^T X B_e (I - B_e^T X B_e)^{-1} B_e^T A + D_e^T C_e]^T [B_e^T X B_e (I - B_e^T X B_e)^{-1} B_e^{-1} B_2 + D_e^T D_e]^{-1} [B_e^T X B_e (I - B_e^T X B_e)^{-1} B_e A + D_e^T C_e] < 0 \quad (14)$$

具有正定解 $X = X^T$, 使得 $(I - B_e^T X B_e)^{-1} > 0$, 则使闭环系统满足 H_{∞} 鲁棒性能指标 1) 和 2) 的状态反馈控制器给定为

$$K = - [D_e^T D_e + B_e^T X B_e (I - B_e^T X B_e)^{-1} B_e^{-1} B_2]^{-1} \cdot [B_e^T X B_e (I - B_e^T X B_e)^{-1} B_e^T A + D_e^T C_e]. \quad (15)$$

其中, B_e, C_e 和 D_e 定义如(13).

证 由定理 3 知, (7)与(8)构成的闭环系统满足 H_{∞} 鲁棒性能指标 1), 2) 的充分条件为存在适当的 $\lambda > 0$, 使得(10)定义下的标称系统(9)与反馈控制器(8)构成的闭环系统内部稳定且

$$\|G_{z,w'}(z)\|_{\infty} < 1 \quad (16)$$

成立. 由引理 1, 上述条件满足的充分必要条件为

$$\begin{aligned} & (A + B_2 K)^T X (A + B_2 K) - X + \\ & (A + B_2 K)^T X B_e (I - B_e^T X B_e)^{-1} \cdot \\ & B_e^T X (A + B_2 K) + \\ & (C_e + D_e K)^T (C_e + D_e K) < 0 \end{aligned} \quad (17)$$

具有正定解 $X = X^T$, 使得 $(I - B_e^T X B_e)^{-1} > 0$; 将(17)展开并整理, 最后得:

$$\begin{aligned} & A^T X A - X + A^T X B_e M B_e^T X A + C_e^T C_e - \\ & (B_2^T X B_e M B_e^{-1} A + D_e^T C_e)^T (B_2^T X B_e M B_e^{-1} B_2 + \\ & D_e^T D_e)^{-1} (B_2^T X B_e M B_e^{-1} A + D_e^T C_e) < \\ & - S^T S \leq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} S = & (B_2^T X B_e M B_e^{-1} B_2 + D_e^T D_e)^{\frac{1}{2}} [K + \\ & (B_2^T X B_e M B_e^{-1} B_2 + D_e^T D_e)^{-1} \cdot \\ & (B_2^T X B_e M B_e^{-1} A + D_e^T C_e)], \\ M = & (I - B_e^T X B_e)^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

因此, 如果存在反馈阵 K 使得(9)与(8)构成的闭环系统内部稳定且(16)成立, 则(17)有正定解 $X = X^T$, 使得 $I - B_e^T X B_e < 0$. 进而, 由(18), (19)可知, 该解 X 满足 Riccati 不等式(14). 反之, 如果(14)有正定解 $X = X^T$, 使得 $I - B_e^T X B_e > 0$ 成立. 令 K 构造如(15), 则由(19), (18)成立. 也即(17)成立, 故 $A + B_2 K$ 稳定且(16)成立. 于是定理 4 得证.

由上研究, 可以得出使具有不确定非线性摄动的被控对象经状态反馈控制后满足 H_∞ 鲁棒性能指标 1), 2) 的设计方法:

1) 对被控对象(7), 选择 $\lambda_i > 0$. 定义矩阵关系(11);

2) 应用定理 4, 按给定指标 $\gamma = 1$ (如果 $\gamma \neq 1$, 可用 $B_{e\gamma} = \gamma^{-1} B_e$ 代替 B_e) 预解不等式 $I - B_e^T X B_e > 0$, 取适当的正定解 $X_i = X_i^T$;

3) 用 X_i 检验(14), 如果(14)不成立, 则取 $\lambda_{i+1} < \lambda_i$, $i = i + 1$, 返回 1);

4) 按(15)构造反馈阵 K .

4 应用简例 (Simple example for application) (略)

5 结论 (Conclusion)

对于具有非线性摄动的离散系统的 H_∞ 鲁棒准则设计问题, 可应用离散系统 H_∞ 范数与 Riccati 不等式的关系, 建立相应的标称系统, 利用对应的矩阵关系, 等价于 H_∞ 鲁棒控制的标准设计问题进行求解. 本文给出的方法 (如简例中波动的快速衰减及强扰动和摄动抑制能力) 已表明适合于工程应用且能得到满意的结果. 相反, 用其他方法, 如 LQG 设计, 则由于扰动的不确定性加之模型摄动均不能予以考虑, 因而不能得出满意的结果.

参考文献 (References)

- [1] Iglesias P A and Glover K. State-space approach to discrete time H_∞ control[J]. Syst. Contr. Lett., 1990, 15(2): 275 - 286
- [2] Isaac Yaesh and Uri Shaked. A transfer function approach to discrete time H_∞ control[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, 36(11): 1264 - 1271
- [3] Songa de C B and Xie L. On the discrete time bounded real lemma with application in the characterization of state feedback H_∞ controllers[J]. Syst. Contr. Lett., 1992, 18(1): 61 - 71

本文作者简介

屈百达 1956年生, 沈阳工业学院教授、高级工程师, 研究方向为工业自动化, H_∞ 鲁棒控制及应用等.

吕艳辉 1971年生, 在读硕士生, 研究领域为工业自动化, 电气自动化等.

黄小原 1947年生, 东北大学工商管理学院教授、博士生导师, 研究方向为控制理论及应用, 系统工程、金融工程等.