文章编号：1000-8152(2001)01-0113-03

动态区间系统的鲁棒稳定性*

吴方向 史忠科 戴冠中
(西北工业大学自动控制系·西安,710072)

摘要：研究了动态连续区间系统和离散区间系统的鲁棒稳定性问题.在给出了区间系统的一种等价描述之后,利用Lyapunov方法和Riccati方程方法,分别得到了连续区间系统和离散区间系统鲁棒稳定的充分条件.最后的数值例子说明本文的结果不仅保守性小,而且计算简单.

关键词：连续/离散的区间系统；区间矩阵；Riccati方程方法；鲁棒稳定性

文献标识码：A

On Robust Stability of Dynamic Interval Systems

WU FangXiang, SHI Zhongke and DAI Guanzhong
(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University·Xi'an, 71072, P.R.China)

Abstract: In engineering, many systems can be described by dynamic interval systems. However, the stability criteria for interval systems in the existing literatures are either too conservative, or too difficult in application. We firstly present a kind of equivalent description of interval systems. Then by employing Lyapunov method and Riccati equation approach, some simple sufficient conditions of robust stability for dynamic continuous and discrete interval systems are obtained, respectively. These conditions can be tested by only solving Riccati inequalities (Eq.(3.1) and (Eq.(3.2)) or equivalently by computing H_∞ norm (Eq.(3.2)). The numerical example shows that our result is not only less conservative, but also simple and easy to implement.

Key words: continuous/discrete interval system; interval matrix; Riccati equation approach; robust stability

1 引言(Introduction)

在实际工程系统中存在着各种不确定性,其中一类不确定性可描述为系统的状态矩阵的各个元素在一些确定的区间内变化,这就是所谓的区间系统.这种摄动虽不改变系统的阶次,但由于它的存在可以使原来以标称系统设计的性能指标衰退,甚至破坏系统的稳定性.近年来关于区间系统鲁棒稳定性分析取得了许多结果[1~8].从已有的文献来看,所得结果要么不容易用来检验稳定性,要么保守性较大,并且难于用来进一步研究区间控制系统的鲁棒控制问题.

本文将研究动态连续的区间系统和离散的区间系统的鲁棒稳定性问题.在第二节,提出了区间系统的一种等价描述;在此基础上,第三节利用Lyapunov原理和Riccati方程方法,分别给出了连续的区间系统和离散的区间系统的鲁棒稳定性新的充分条件,检验这些条件仅需要求解相应的Riccati(不等式)方程;第四节的数值例子说明了我们的结果;最后总结了全文.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑下述方程描述的线性动态系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{2.1}$$

$$x(k+1) = Ax(k). \tag{2.2}$$

这里,$x \in \mathbb{R}^n$为状态向量,$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$为状态矩阵.$A$中的元素不能完全确定,但是,它们属于某些确定的区间,因此将矩阵A称为区间矩阵,系统(2.1)和(2.2)称为区间系统.其中系统(2.1)称为连续的区间系统,系统(2.2)称为离散的区间系统.一般地,区间矩阵描述为

$$A \in N[P,Q] = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid P_{ij} \leqslant a_{ij} \leqslant q_{ij}, i,j = 1,\cdots,n\}. \tag{2.3}$$

这里P,Q分别为矩阵A中各元素的上界和下界元素组成的矩阵.

* 基金项目:国家重点基础研究发展规划项目(G1998030417)和航空自选课题(98DX0901)资助项目.
收稿日期:1998-07-06; 收修改稿日期:1999-10-13.

引理 2.1[9] 区间矩阵 $A \in N[P,Q]$ 可等价的描述为

$$A = A_0 + E\Sigma F,\ \Sigma \in \Sigma^*. \tag{2.4}$$

其中 $A_0 = (P+Q)/2, H = (Q-P)/2$，显然，矩阵 H 的每一个元素都是非负数.

$$\Sigma^* = \{\Sigma \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2} \mid \Sigma = \mathrm{diag}[\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1n},\cdots,\varepsilon_{n1},\cdots,\varepsilon_{nn}],\ |\varepsilon_{ij}| \leqslant 1, i,j = 1,\cdots,n\},$$

$$E = [\sqrt{h_{11}}e_1 \cdots \sqrt{h_{1n}}e_1 \cdots \sqrt{h_{n1}}e_n \cdots \sqrt{h_{nn}}e_n], \tag{2.5}$$

$$F = [\sqrt{h_{11}}e_1 \cdots \sqrt{h_{1n}}e_n \cdots \sqrt{h_{n1}}e_1 \cdots \sqrt{h_{nn}}e_n]^{\mathrm{T}}. \tag{2.6}$$

这里 $e_i(i=1,\cdots,n)$ 为 $n\times n$ 单位矩阵的第 i 个列向量，因此 E 为 $n\times n^2$ 阶矩阵，F 为 $n^2\times n$ 阶矩阵. 显然对 $\forall \Sigma \in \Sigma^*$，有 $\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma \leqslant I$ 成立.

由引理 2.1，区间系统(2.1)和(2.2)可分别描述为

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + E\Sigma Fx(t), \tag{2.7}$$

$$x(k+1) = A_0x(k) + E\Sigma Fx(k). \tag{2.8}$$

定义 2.1 如果对于集合 $N[P,Q]$ 中的任意矩阵 A，系统(2.1)(系统(2.2))都是渐近稳定的，那么称系统(2.1)(系统(2.2))是鲁棒稳定的.

3 主要结果(Main results)

首先对于连续的区间系统的鲁棒稳定性问题，我们有如下结果.

定理 3.1 如果下列条件之一成立，那么连续的区间系统(2.1)是鲁棒稳定的.

C1) 存在标量 $\lambda > 0$ 和对称正定矩阵 X 满足下列 Riccati 不等式方程

$$XA_0 + A_0^{\mathrm{T}}X + \lambda^{-1}XEE^{\mathrm{T}}X + \lambda F^{\mathrm{T}}F < 0; \tag{3.1}$$

C2) A_0 是渐近稳定的，且

$$\| F(sI - A_0)^{-1}E \|_\infty < 1; \tag{3.2}$$

C3) 存在标量 $\lambda > 0, \varepsilon > 0$，使代数 Riccati 方程

$$XA_0 + A_0^{\mathrm{T}}X + \lambda^{-1}XEE^{\mathrm{T}}X + \lambda F^{\mathrm{T}}F + \varepsilon I = 0 \tag{3.3}$$

存在唯一的对称正定矩阵解 X.

证 设 λ 和 X 分别为满足式(3.1)的标量和对称正定矩阵，并令式(3.1)的左端为 $-Y$，显然 Y 为对称正定矩阵. 我们构造如下 Lyapunov 泛函

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}Xx. \tag{3.4}$$

式(3.4)沿系统(2.8)的解，对时间求导数可得

$$\dot{V}(x) = x^{\mathrm{T}}(t)(XA_0 + A_0^{\mathrm{T}}X)x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)XE\Sigma Fx(t),\ \forall \Sigma \in \Sigma^*. \tag{3.5}$$

众所周知，下列不等式

$$2\xi^{\mathrm{T}}\Sigma\eta \leqslant \lambda^{-1}\xi^{\mathrm{T}}\xi + \lambda\eta^{\mathrm{T}}\eta,\ \forall \Sigma \in \Sigma^*. \tag{3.6}$$

这里，ξ 和 η 为任意适当维数的列向量，$\lambda > 0$ 为任意常数. 对式(3.5)的最后一项利用不等式(3.6)，我们有

$$2x^{\mathrm{T}}(t)XE\Sigma F \leqslant \lambda^{-1}x^{\mathrm{T}}(t)XEE^{\mathrm{T}}Xx(t) + \lambda x^{\mathrm{T}}(t)F^{\mathrm{T}}Fx(t),\ \forall \Sigma \in \Sigma^*. \tag{3.7}$$

将式(3.7)代入式(3.5)，并进行整理可得

$$\dot{V}(x) \leqslant -x^{\mathrm{T}}(t)Yx(t).$$

根据 Lyapunov 稳定性定理，当条件 C1)成立时，系统(2.7)是鲁棒稳定的，因此由引理 2.1，连续的区间系统(2.1)是鲁棒稳定的. 由文献[10]、条件 C2)和 C3)均与条件 C1)等价，因此当条件 C2)或 C3)成立时，连续的区间系统(2.1)也是鲁棒稳定的.

注 3.1 尽管 $E, F^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n^2}$，但是式(3.1)和式(3.3)中只与矩阵 EE^{T} 和 $F^{\mathrm{T}}F$ 有关，而它们均为 n 阶对角矩阵，通过简单的计算可得

$$\begin{aligned} EE^{\mathrm{T}} &= \mathrm{diag}[\sum_{j=1}^{n}h_{1j}\ \cdots\ \sum_{j=1}^{n}h_{nj}], \\ F^{\mathrm{T}}F &= \mathrm{diag}[\sum_{j=1}^{n}h_{j1}\ \cdots\ \sum_{j=1}^{n}h_{jn}]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

进一步，我们可将式(3.1)～(3.3)中的 E 和 F 分别换为满秩矩阵 E_0 和 F_0，而这里矩阵 E_0 和 F_0 分别满足 $E_0E_0^{\mathrm{T}} = EE^{\mathrm{T}}$ 和 $F_0^{\mathrm{T}}F_0 = F^{\mathrm{T}}F$.

注 3.2 由式(3.8)及矩阵的无穷范数的定义

$$EE^{\mathrm{T}} + F^{\mathrm{T}}F \leqslant (\|H\|_\infty + \|H^{\mathrm{T}}\|_\infty)I. \tag{3.9}$$

因此如果文献[4]中的主要定理(定理 1)成立，那么取 $\lambda = 1$ 时，$X = I$ 是满足 Riccati 不等式方程(3.1)的正定矩阵. 这说明文献[4]的主要结果是本文定理 3.1的推论.

其次讨论离散的区间系统的鲁棒稳定性问题，为了证明有关结论，需要下列引理.

引理 3.1[9] 给定适当维数的矩阵 A_0, E, F，以及适当维数的对称矩阵 X，如果存在标量 $\varepsilon > 0$，使得

$$\varepsilon^{-1}I - E^{\mathrm{T}}XE > 0, \tag{3.10}$$

那么对 $\forall \Sigma \in \Sigma^*$ 有

$$A_0^{\mathrm{T}}XE\Sigma F + (E\Sigma F)^{\mathrm{T}}XA_0 + (E\Sigma F)^{\mathrm{T}}XE\Sigma F \leqslant A_0^{\mathrm{T}}XE(\varepsilon^{-1}I - E^{\mathrm{T}}XE)^{-1}E^{\mathrm{T}}XA_0 + \varepsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F \tag{3.11}$$

成立，这里 I 为适当维数的单位矩阵.

定理 3.2 如果存在标量 $\varepsilon > 0$ 和对称正定矩

阵 X 使得式(3.10)和下列 Riccati 不等式方程

$$A_0^{\mathrm{T}}XA_0 + A_0^{\mathrm{T}}XE(\varepsilon^{-1}I - E^{\mathrm{T}}XE)^{-1}E^{\mathrm{T}}XA_0 + \varepsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F - X < 0 \tag{3.12}$$

成立,那么离散的区间系统(2.2)是鲁棒稳定的.

证　设标量 $\varepsilon > 0$ 和对称正定矩阵 X 满足式(3.11)和(3.12),并令式(3.12)的左端为 $-Y$,显然 Y 为对称正定矩阵.我们构造如下 Lyapunov 泛函

$$V(x(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)Xx(k), \tag{3.13}$$

沿着系统(2.8)的解对(3.13)求差分可得

$$\begin{aligned}
&\Delta V = \\
&V(x(k+1)) - V(x(k)) = \\
&x^{\mathrm{T}}(k+1)Xx(k+1) - x^{\mathrm{T}}(k)Xx(k) = \\
&x^{\mathrm{T}}(k)[(A_0 + E\Sigma F)^{\mathrm{T}}X(A_0 + E\Sigma F) - X]x(k) = \\
&x^{\mathrm{T}}(k)[A_0^{\mathrm{T}}XA_0 - X + (E\Sigma F)^{\mathrm{T}}XA_0 + \\
&A_0^{\mathrm{T}}X(E\Sigma F) + (E\Sigma F)^{\mathrm{T}}X(E\Sigma F)]x(k).
\end{aligned}$$

对上式中括号中的最后三项使用引理 3.1,可得

$$\Delta V \leqslant -x^{\mathrm{T}}(k)Yx(k).$$

根据 Lyapunov 稳定性定理,系统(2.8)是渐近稳定的,即离散的区间系统(2.2)是鲁棒稳定的.

注 3.3　通过简单的矩阵运算,我们可得与式(3.12)等价的如下 Riccati 不等式方程

$$A_0^{\mathrm{T}}XA_0 + A_0^{\mathrm{T}}XE_0(\varepsilon^{-1}I - E_0^{\mathrm{T}}XE_0)^{-1}E_0^{\mathrm{T}}XA_0 + \varepsilon^{-1}F_0^{\mathrm{T}}F_0 - X < 0, \tag{3.14}$$

这里矩阵 E_0 和 F_0 与注 3.1 中的意义相同.因此当式(3.10)和式(3.14)同时成立时,离散的区间系统(2.2)是鲁棒稳定的.

4 数值例子(Numerical example)

例 4.1[6,8]　考虑区间系统(2.1),其中

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ -4 & 1 & -4 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix},$$

由此可得

$$A_0 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix},\ F_0^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

经过计算可得

$$\| F_0(sI - A_0)^{-1}E_0 \|_\infty = 0.8694 < 1.$$

故该例的区间系统是鲁棒稳定的.从该例可以看出,即使对于高阶系统本节的判据也比已有的判据[8]算法简单,而文献[4]中的定理 1 在这里是无效的.

5 结论(Conclusion)

利用 Lyapunov 原理和 Riccati 方程方法,分别给出了连续的区间系统和离散的区间系统鲁棒稳定性的充分条件.与已有结果的不同之处在于:本文得到的鲁棒稳定性判据是检验 Riccati 不等式方程是否有正定解或计算 H_∞ 范数,而这在 Matlab 软件中有标准的工具可用,因此本文的判据容易检验;其次本文的结果很容易用来研究区间系统的鲁棒控制等问题(关于这方面的研究,我们将另文讨论).

参考文献(References)

[1] Balas S. A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices [J]. Int. J. Control, 1983,38(4):717 - 722

[2] Heinen J A. Sufficient condition for stability of interval matrices [J]. Int. J. Control, 1984,40(6):1323 - 1328

[3] Wang K. Michel A N and Liu D. Necessary and sufficient conditions for the Hurwitz and Schur stability of interval matrices [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1994,39(8):1251 - 1255

[4] Zhou C S and Deng J L. The stability of the grey linear system Int. J. Control, 1986,43(1):313 - 320

[5] Mei Z Y. Sufficient condition for stability of interval matrices [J]. Control Theory and Applicatons, 1993,140(3):461 - 465

[6] Soh C B. Robust stability of dynamic interval matrices [J]. Control Theory and Advanced Techonlogy, 1994,10 (1):73 - 80

[7] Sun Jitao. On the stability of interval matrix [J]. Acta Automatica Sinica, 1991,17(6):745 - 748(in Chinese)

[8] Mao Weijie and Sun Youxian. Criteria for the robust stability of interval matrices [J]. Control and Decission, 1997,12(3):264 - 268

[9] Wu Fangxiang. Research on analysis of robust stability and design of robust controller for systems with uncertainties [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 1998(in Chinese)

[10] Sheng Tielong. H_∞ control theory and applications [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996(in Chinese)

本文作者简介

吴方向　1966 年生.分别于 1990 年和 1993 年获大连理工大学应用数学专业学士学位和硕士学位.1998 年获西北工业大学自动控制理论及应用专业博士学位,现为该校自动控制系副教授.目前的研究方向有鲁棒控制,容错控制,非线性控制和机器人控制等.

史忠科　1956 年生.毕业于西北工业大学,获博士学位.现为西北工业大学自动控制系教授,博士生导师.目前的研究领域:估计、辨识方法,鲁棒控制,智能控制,交通控制等.

戴冠中　1937 年生.西北工业大学教授,博士生导师,现任校长.目前的研究方向:具有通讯网络的大系统理论,智能控制与应用,并行处理与并行仿真计算机,控制理论在信号处理中的应用等.