文章编号: 1000-8152(2001)04-0601-04

基于 Volterra 级数的 MIMO 非线性系统的镇定设计

方洋旺　韩崇昭
(西安交通大学电信工程学院·西安,710049)

摘要: 基于 Volterra 级数理论,针对一类 MIMO 非线性系统,首先给出了此类系统可镇定的充分条件;接着讨论了 MIMO 纯输入与纯输出非线性系统的镇定性的问题,并给出了具体设计方法;最后,用实例仿真验证了其有效性.

关键词: 非线性传递函数矩阵; Volterra 级数; 镇定性; 局部稳定性
文献标识码: A

Stabilization of MIMO Nonlinear Control System Based on the Theory of Volterra Series*

FANG Yangwang　and　HAN Chongzhao
(School of Electronic & Information Engineering, Xi'an Jiaotong University · Xi'an, 710049, P.R.China)

Abstract: Based on the theory of Volterra series, the paper, first of all, gives the sufficient condition of stabilization for a class of MIMO nonlinear control system; then it discusses the robust stabilizability of the MIMO pure input and pure output nonlinear system and gives the condition of stabilization. Finally, it proves their efficiency by a simulation example.

Key words: nonlinear transfer function matrix; Volterra series; stabilization; local stability

1 引言(Introduction)

基于 Volterra 级数的非线性传递函数或广义频率响应函数为非线性系统研究提供了一个新的研究方法.文[1~3]对非线性频域分析有很深入的研究,在非线性系统仿真,非线性辩识,及其在工业控制中的应用方面都取得了重要进展.文[3,4]中分别讨论了基于广义频率响应函数的非线性系统开环与系统闭环稳定性.但目前尚未见到利用此方法讨论非线性系统的镇定及鲁棒镇定性问题.而此类问题是非线性控制系统中比较困难而又非常重要的一类问题.利用时域的方法已得到很多好的结果[5,6].本文试图利用频域的方法即 Volterra 级数法讨论此类问题.

本文基于 Volterra 级数理论,针对一类 MIMO 非线性系统,首先给出了此类系统可镇定的充分条件;接着讨论了 MIMO 纯输入与纯输出非线性系统的镇定性的问题,并给出了具体设计方法;最后,用实例仿真验证了其有效性.

2 问题描述(Problems description)

考虑如图 1 所示的镇定问题.

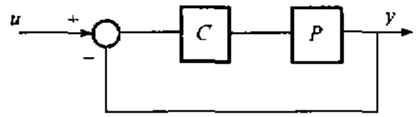

图 1　非线性反馈镇定系统
Fig. 1　Nonlinear feedback stabilization system

假设 P 是 MIMO 多项式类非线性系统:

$$\sum_{n=1}^{N}\Big\{\sum_{p_1=0}^{M}\cdots\sum_{p_n=0}^{M}\Big[a_{n,p_1,\cdots,p_n}\prod_{i=1}^{n}D^{p_i}y(t)+c_{n,p_1,\cdots,p_n}\prod_{i=1}^{n}D^{p_i}u(t)\Big]\Big\}+\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{q=1}^{N-n}\Big[\sum_{p_1=0}^{M}\cdots\sum_{p_{n+q}=0}^{M}b_{n,q,p_1,\cdots,p_{n+q}}\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=n+1}^{N}D^{p_i}y(t)D^{p_k}u(t)\Big]=0,$$

式中 D 表示微分算子,M 为最大的微分阶数,N 是最高次方,a,b,c 是系数矩阵,$u\in\mathbb{R}^r$ 和 $y\in\mathbb{R}^m$ 分别是系统的输入和输出信号.假设 P 具有 Volterra 级数表示,$P_n(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 为它的 n 阶非线性传递函数矩阵(参见文[4]).C 为待设计的控制器.
$\|P_n\|_\infty := \sup\limits_{\omega_1,\cdots,\omega_n\in\mathbb{R}}(\|P_n(j\omega_1,j\omega_2,\cdots,j\omega_n)\|)$.

收稿日期:1999-09-21; 收修改稿日期:2000-06-30.

注 以下如不作特别说明，总假设非线性系统是MIMO多项式类非线性系统.

定义 2.1[4] 非线性系统 P 称为局部稳定的，若它的线性子系统 P_1 是渐近稳定的. 且 $\sum_{n=0}^{\infty}\|P_n\|_\infty x^n$ 是收敛的.

定义 2.2 非线性系统 P 称为可镇定的，若存在一个控制器 C，使得图1所示的闭环非线性系统是局部稳定的.

3 非线性系统的镇定设计(Stabilization design of nonlinear system)

对于非线性系统 P，我们先来讨论当它的线性子系统 $P_n(s)$ 不是渐近稳定的，但 $\sum_{n=0}^{\infty}\|P_n\|_\infty x^n$ 收敛，如何设计补偿器 C，使闭环系统是局部稳定的.

引理 3.1 若 $P(s)\in\mathbb{R}^{1\times q}$ 是线性系统，记 $P(s)=N(s)D^{-1}(s)$，若 $P(s)$ 正则，且 $N(s),D(s)$ 右互质，则一定存在一个 m 阶 $q\times 1$ 正则补偿器 $C(s)=D_c^{-1}(s)N_c(s)$，满足 $\|C(j\omega)\|<+\infty$，$\forall\omega$，使闭环系统的极点几乎可任意配置. 这里 m 是 $P(s)$ 的行指数.

证 记如图1所示的闭环系统的传递函数为：

$$g_f(s):=D_f^{-1}(s)N_f(s)=$$

$$[D_c(s)D(s)+N_c(s)N(s)]^{-1}N(s)N_c(s),$$

由文[8]中定理9~12知，对于任意给的 $n+m$ 阶 $D_f(s)$，多项式方程 $D_f(s)=D_c(s)D(s)+N_c(s)N(s)$ 的解 $\{D_c(s),N_c(s)\}$ 一定存在，从而 $C(s)=D_c^{-1}(s)N_c(s)$ 存在. 若 $\|C(j\omega)\|<+\infty$，$\forall\omega$，则 $C(s)$ 即为所求的正则补偿器.

若 $\|C(j\omega)\|<+\infty$，$\forall\omega$ 不满足，即 $D_c(s)$ 有零实部的零点，为简化起见，不妨设 $D_c(s)=(s^2+a)\bar{D}_c(s)$，$a\geqslant 0$，且 $|\bar{D}_c(j\omega)|\neq 0$，$\forall\omega$，记

$$D_c(s,\varepsilon)=(s^2+\varepsilon s+a)\bar{D}_c(s),$$

$$D_f(s,\varepsilon)=D_c(s,\varepsilon)D(s)+N_c(s)N(s),$$

则当 $\varepsilon\to 0$ 时，有

$$D_c(s,\varepsilon)\to D_c(s),\ D_f(s,\varepsilon)\to D_f(s).$$

由根与系数的关系知，若 $D_f(s)$ 的根具有负实部，则对充分小的 ε 也有 $D_f(s,\varepsilon)$ 的根具有负实部. 记 $C(s,\varepsilon)=D_c^{-1}(s,\varepsilon)N_c(s)$，则 $\|C(j\omega,\varepsilon)\|<+\infty$，$\forall\omega$，故 $C(s,\varepsilon)$ 即为所求的正则补偿器.

注 在上述证明中，若 $D_c(s)$ 有多于两个零实部的零点，可用类似的方法证明.

引理 3.2 假设 $P(s)$ 是 n 次 $q\times p$ 循环正则有理函数矩阵，记 $m=\min\{u,v\}$，则一定存在 m 次 $p\times q$ 正则有理矩阵 $C(s)$，且 $\|C(j\omega)\|<+\infty$，$\forall\omega$，使闭环系统的极点几乎可任意配置. 其中 u,v 分别是 $P(s)$ 的任一不可简约实现的可控性指数与可观测性指数.

证 由于 $P(s)$ 是循环矩阵，故存在 $p\times 1$ 的常向量 T，使 $\Delta(P(s))=\Delta(P(s)T)$，对于对象为 $\hat{P}(s):=P(s)T$ 的极点配置问题. 由引理3.1知，存在 $\hat{C}(s)$，满足 $\|\hat{C}(j\omega)\|<+\infty$，$\forall\omega$，使得以 $\hat{P}(s)$ 为对象的闭环系统极点可任意配置. 记 $C(s):=\hat{C}(s)T$，则 $\|C(j\omega)\|<+\infty$，$\forall\omega$. 由文[8]中定理9~14证明知，$C(s)$ 能使以 $P(s)$ 为对象的闭环系统的极点几乎可任意配置.

引理 3.3 假设 $P(s)$ 是 n 次 $q\times p$ 正则有理函数矩阵，记 $m=\min\{u,v\}$，则一定存在 m 次 $p\times q$ 正则有理函数矩阵 $C(s)$，且 $\|C(j\omega)\|<+\infty$，$\forall\omega$，使闭环系统的极点几乎可任意配置. 其中 u,v 分别是 $P(s)$ 的任一不可简约实现的可控性指数与可观测性指数.

证 首先取常值矩阵 K，使 $\hat{P}(s)=(I+P(s)K)^{-1}P(s)$ 为循环矩阵，对于对象 $\hat{P}(s)$，利用引理3.2知，存在 $\hat{C}(s)$，满足 $\|\hat{C}(j\omega)\|<+\infty$，$\forall\omega$，使闭环系统的极点几乎可任意配置. 记 $C(s):=\hat{C}(s)+K$，则 $\|C(j\omega)\|<+\infty$，$\forall\omega$. 而由文[8]证明知，$C(s)$ 使得以 $P(s)$ 为对象的闭环系统的极点几乎可任意配置.

引理 3.4[4] 若非线性系统 H,P 具有Volterra级数表示，且它们的传递函数矩阵分别是 $\{H_n\}$，$\{P_n\}$，若 $\sum_{n=1}^{\infty}\|H_n\|_\infty x^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\|P_n\|_\infty x^n(x\neq 0)$ 是收敛的，则级联系统 $G:=H\circ P$ 也具有Volterra级数表示，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\|G_n\|_\infty x^n$ 也是收敛的.

定理 3.5 若非线性系统 P 具有Volterra级数表示，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\|P_n\|_\infty x^n$ 也是收敛的. 则一定存在一个线性补偿器 C，使图1所示的闭环系统是局部稳定的.

证 由于 $\|P_1\|_\infty$ 存在，故 $P_1(s)$ 是正则的，且没有零实部的极点. 由引理3.3知，存在正则补偿器 $C(s)$，满足 $\|C\|_\infty<+\infty$，使闭环系统 $H:=(I+L)^{-1}\circ L$，其中 $L:=P\circ C$，的线性子系统；$H_1:=(I+L_1)^{-1}\circ L_1$ 是渐近稳定的. 下证，H 是局部稳定的. 即证 $\sum_{n=0}^{\infty}\|H_n\|_\infty x^n$ 收敛. 由于 $L=P\circ C$，则它

的非线性传递函数矩阵为：

$$L_1(s)=P_1(s)C(s),$$
$$L_2(s_1,s_2)=P_2(s_1,s_2)(C(s_1)\otimes C(s_2))\cdots,$$
$$L_n(s_1,s_2,\cdots,s_n)=P_n(s_1,s_2,\cdots,s_n)(C(s_1)\otimes C(s_2))\otimes\cdots\otimes C(s_n)).$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\|L_n\|_\infty x^n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|P_n\|_\infty(\|C\|_\infty x)^n$，由于 $\|C(\mathrm{j}\omega)\|<+\infty,\forall\omega$，且 $C(s)$ 是正则的，故 $\|C\|_\infty<\infty$，再由 $\sum_{n=1}^{\infty}\|P_n\|_\infty x^n$ 收敛，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\|L_n\|_\infty x^n$ 也收敛.

记 $G:=(I+L)^{-1}$，则它的非线性传递函数矩阵为：

$$G_1(s_1)=(1+L_1(s_1))^{-1},\cdots,G_n(s_1,s_2,\cdots,s_n)=-(1+L_1(s_1+\cdots+s_n))^{-1}\cdot\sum_{m=2}^{n}\sum_{k_1+\cdots K_m=n}L_m((s_1+\cdots+s_{k_1}),\cdots,(s_{n-k_m+1}+\cdots+s_n))(G_{k_1}(s_1,\cdots,s_{k_1})\otimes\cdots\otimes G_{k_m}(s_{n-k_m+1},\cdots,s_n)),$$

$n\geqslant 2$，则

$$\|G_n\|_\infty\leqslant\|G_1\|_\infty\sum_{m=2}^{n}\sum_{k_1+\cdots K_m=n}\|L_m\|_\infty\|G_{k_1}\|_\infty\cdots\|G_{k_m}\|_\infty,$$

$n\geqslant 2$. 从而，对于任意的正整数 N，有

$$\sum_{n=2}^{N}\|G_n\|_\infty x^n\leqslant\sum_{m=2}^{N}\|G_1\|_\infty\|L_m\|_\infty(\sum_{k_1=1}^{N}\cdots\sum_{k_m=1}^{N}\|G_{k_1}\|_\infty\cdots\|G_{k_m}\|_\infty x^{k_1+\cdots+k_m}=\sum_{m=2}^{N}\|G_1\|_\infty\|L_m\|_\infty(\sum_{k=1}^{N}\|G_k\|_\infty x^k)^m.$$

下证 $\sum_{n=1}^{\infty}\|G_n\|_\infty x^n$ 是收敛的. 记 $\alpha_n:=\|G_n\|_\infty,n=1,2,\cdots,q_m:=\|G_1\|_\infty\|L_m\|_\infty,m=2,3,\cdots$，则上述不等式化为：对于任意的正整数 N，及任意的 $x\geqslant 0$，有不等式 $\sum_{n=2}^{N}\alpha_n x^n\leqslant\sum_{m=2}^{N}q_m(\sum_{k=1}^{N}\alpha_m x^k)^m$，故当 $N=2$ 时，有

$$\alpha_2x^2\leqslant q_2\alpha_1^2x^2\Rightarrow\alpha_2\leqslant q_2\alpha_1^2;$$

当 $N=3$ 时，有

$$\alpha_2x^2+\alpha_3x^3\leqslant q_2\alpha_1^2x^2+(2q_2\alpha_1\alpha_2+q_3\alpha_1^3)x^3,$$

即

$$[\alpha_3-(2q_2\alpha_1\alpha_2+q_3\alpha_1^3)]x^3\leqslant(q_2\alpha_1^2-\alpha_2)x^2,$$

由于 $(q_2\alpha_1^2-\alpha_2)x^2\geqslant 0$，故要使此不等式对于 $\forall x>0$ 都成立，必须 $\alpha_3\leqslant 2q_2\alpha_1\alpha_2+q_3\alpha_1^3$. 以此类推，从而有 $\alpha_2\leqslant q_2\alpha_1^2$、$\alpha_3\leqslant 2q_2\alpha_1\alpha_2+q_3\alpha_1^3,\cdots$，

以下类似于文[4]定理3.2的证明，可证 $\sum_{n=1}^{\infty}\|G_n\|_\infty x^n$ 是收敛的.

再由于 $H=G\circ L$，由引理3.4知，$\sum_{n=1}^{\infty}\|H_n\|_\infty x^n$ 收敛，而 $H_1=(I+L_1)^{-1}\circ L_1$ 是渐近稳定的，故闭环系统是局部稳定的.

推论3.6 对于纯输入非线性系统 P(参看文[3])，若 $P_1(s)$ 无零实部的极点，且 $P_n(s_1,\cdots,s_n)$，$n=1,2,\cdots,N$ 是正则的，则一定存在正则线性控制器 C，使闭环系统可镇定.

引理3.7 考虑如图2所示的非线性反馈系统 F，若满足：

1) 若 G 是线性系统，且 $G(s)\in\mathbb{R}^{m\times r}$ 无零实部的极点，$H:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^r,y=H(u)$，满足 $H(0)=0$，且 $y=H(u)$ 解析.

2) $I+G(\infty)H'(0)$ 是非奇异矩阵，且 $(I+G(s)H'(0))^{-1}$ 是正则矩阵，它的特征多项式无零实部的零点，其中 $H'(0):=\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{x=0}$ 为雅可比矩阵在 $x=0$ 的取值. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\|F_n\|_\infty x^n$ 是收敛的.

定理3.8 对于纯输出系统 P：

$$A_1(D)y+f(y)=u,f(y)=a_2y^{(2)}+\cdots+a_ny^{(N)},$$
$$y^{(n)}=\underbrace{y\otimes\cdots\otimes y}_{n},n=\overline{2,N},$$
$$A_1(D)=b_0D^n+b_1D^{n-1}+\cdots+b_nI,$$

其中 $u\in\mathbb{R}^r,y\in\mathbb{R}^m$ 分别为系统的输入输出信号. 若 $A_1(s)$ 无零实部的零点. 则一定存在控制器 C，使闭环系统可镇定.

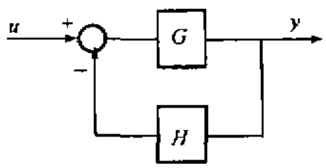

图2 非线性反馈系统

Fig. 2 Nonlinear feedback system

证 由于 P 可表示成图2所示的反馈系统，其中 $G:A(D)y=u,H:y=f(u)$，则 $f(0)=0$，且

$f'(0):=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}=0$，从而 $I+G_1(\infty)f'(0)=I$，且 $(I+G(s)f'(0))^{-1}=I$ 是正则的．由引理3.7知，$\sum_{n=1}^{\infty}\|P_n\|_{\infty}x^n$ 是收敛的，又因为 $A_1(s)$ 无零实部的零点，即 $P_1(s)$ 无零实部的极点，利用定理3.5知，存在控制器 C，使闭环系统可镇定．

4 仿真研究(Simulation study)

例 假设非线性系统

$$P:\begin{cases}y_1'-2y_1+0.1y_1y_2-u_1=0,\\ y_2'+y_2+0.2y_1^2-u_2=0,\end{cases}$$

利用文[3]中的迭代算法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\|P_n\|_{\infty}x^n$ 收敛，且它的一阶子系统为：$P_1(s)=\frac{1}{(s-2)(s+1)}\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 0 & s-2\end{bmatrix}$，由于 $P_1(s)$ 是循环矩阵．故存在 2×1 矩阵 $T=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，使 $\bar{P}_1(S):=p_1(s)T$ 满足 $\Delta(\bar{P}_1(s))=\Delta(P_1(s))$，其中 $\Delta(\cdot)$ 表示有理矩阵的特征多项式．则 $\bar{P}_1(s):=N(s)D^{-1}(s)=\begin{bmatrix}s+1\\ s-2\end{bmatrix}(s^2-s-2)^{-1}$，对于对象 $\bar{P}_1(s)$，由引理3.5知，存在 $v=1$ 阶线性控制器 $\bar{C}(s)=D_c^{-1}(s)N_c(s)$，使得图1所示的闭环系统的极点几乎可任意配置．其中 $v=1$ 为 $\bar{P}_1(s)$ 的行指数．不妨设它们的极点为 $-2,-1,-1$，则由多项式方程 $(s+2)(s+1)^2=D_c(s)D(s)+N_c(s)N(s)$ 可得 $D_c(s)=s+5$，$N_c(s)=[12\quad 0]$．从而 $\bar{C}(s)=\begin{bmatrix}\frac{12}{s+5} & 0\end{bmatrix}$．而由定理3.5知，控制器 $C(s):=T\bar{C}(s)=\begin{bmatrix}\frac{12}{s+5} & 0\\ \frac{12}{s+5} & 0\end{bmatrix}$，使得图3.1所示的闭环MIMO非线性系统是FDBIBO稳定的(参见图3与图4)．

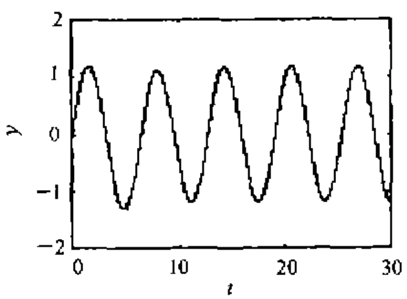

图3 闭环镇定系统输出响应 $y_1(t)$

Fig. 3 output response $y_1(t)$ of colsed-loop stabilization system

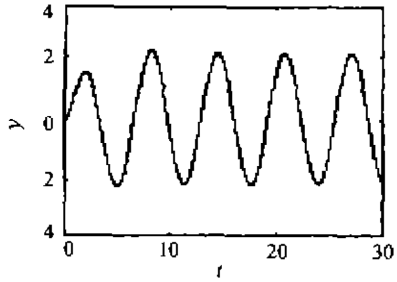

图4 闭环镇定系统输出响应 $y_2(t)$

Fig. 4 output response $y_2(t)$ of colsed-loop stabilization system

5 结论(Conclusions)

本文主要是基于Volterra级数理论，讨论了MIMO多项式类非线性系统的镇定问题，并给出了此类非线性系统可镇定的充分条件．对于一般MIMO非线性系统的镇定问题有待进一步研究．

参考文献(References)

[1] Billings S A and Tsang K M. Spectral analysis for nonlinear systems, Part II: Interpretation of nonlinear frequency response functions [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1989, 3(4):341 – 359

[2] Zhang H and Billings S A. Analysing the transfer function of nonlinear systems in the frequency domain [J]. J. Mechanism Systems and Signal Processing, 1993, 7(5):531 – 550

[3] Han Chongzhao, Cao Jianfu. Study on stability of nonlinear control system based on generalized frequency response functions [J]. Control Theory and Applications, 1996, 13(5):573 – 582

[4] Fang Yangwang, Han Chongzhao. Study on stability of nonlinear closed-loop control systems based on generalized frequency response function matrices [J]. Control Theory and Applications, 1999, 16(6):916 – 920

[5] Chen Pengnian, Han Zhengzhi and Zhang Zhongjun. Development on the Stabilization of Nonlinear Control System [J]. Control Theory and Applications, 1995, 12(4):401 – 409 (in Chinese)

[6] Hidenori Kimura. Robust stabilizability for a class of transfer functions [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1984, 9(29):788 – 793

[7] Rugh W J. Nonlinear System Theory: The Volterra/Wiener Approach [M]. London: The Johns Hopkins University Press, 1981

[8] Chen Qizhong. Modern Control Theory and Design [M]. Beijing: Chinese Science Press, 1981

本文作者简介

方洋旺 1966年生．1990年获陕西师范大学数学系理学硕士学位，1998年西安交通大学系统工程专业博士毕业，现为西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室博士后．主要兴趣是 H_∞ 控制，鲁棒控制，非线性控制系统及通信信号处理．

韩崇昭 1943年生．1968年毕业于西安交通大学电机工程系，1981年毕业于中国科学院研究生院并获硕士学位，现为西安交通大学电信学院副院长，教授，博士生导师．研究兴趣主要为随机与自适应控制理论，工业过程控制与稳态优化，非线性系统频域分析等．