

## 二阶过阻尼系统传递函数辨识的新方法

严德昆

(中国矿业大学自动化系·江苏徐州, 221008)

**摘要:** 对二阶过阻尼系统传递函数的辨识给出一种数值计算与寻优相结合的方法, 求出具有高拟合精度的一组模型参数。

**关键词:** 二阶系统; 传递函数; 辨识

**文献标识码:** A

## A New Method for Identification of 2-Order Superdamping System Transfer Function

YAN Dekun

(Department of Automation, China University of Mining and Technology · Jiangsu Xuzhou, 221008, P.R. China)

**Abstract:** A new method for identification of 2-order superdamping system transfer function with a combination of numerical calculus and optimization is presented. A group of model parameter with high fitting exactness is obtained.

**Key words:** 2-order system; transfer function; identification

### 1 引言(Introduction)

经典控制理论中, 从阶跃响应曲线辨识二阶系统传递函数的三个参数——时间常数  $T_1, T_2$ , 纯滞后时间  $\tau$ ——已经有了两点近似法、相良节夫法、半对数法和面积法。它们不外是在阶跃响应曲线上寻找特殊点、查图表和进行计算。前三种方法精度受到限制, 而面积法计算量较大, 精度也受间隔划分和积分计算精度的影响。本文对二阶过阻尼系统传递函数的辨识给出一种数值计算与寻优相结合的方法, 应用二分法逼近和寻优, 求出对阶跃响应曲线有较高拟合精度的一组参数。

### 2 主要结果(Principal result)

二阶过阻尼系统的传递函数形式为

$$G(s) = \frac{1}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1} e^{-s\tau} \quad (1)$$

这里,  $\tau$  为纯滞后时间,  $T_1, T_2$  为时间常数,  $T_1 \neq T_2$ , 假定  $T_1 < T_2$ 。阻尼系数

$$\xi = \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 \cdot T_2}} > 1. \quad (2)$$

令

$$K_0 = \frac{T_2}{T_1}, \quad (3)$$

因而  $0 < K_0 < 1$ 。

如果对该系统从静止加一个单位阶跃输入, 那么阶跃响应为

$$y(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t-\tau}{T_2}} = 1 - \frac{1}{1 - K_0} e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} + \frac{K_0}{1 - K_0} e^{-\frac{t-\tau}{T_2}}. \quad (4)$$

它的图形如图1所示。

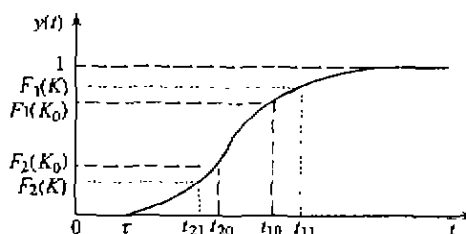


图1 二阶过阻尼系统的阶跃响应

Fig. 1 Step response of 2-order superdamping system

于是,

$$y(\tau + T_1) = 1 - \frac{1}{1 - K_0} e^{-1} + \frac{K_0}{1 - K_0} e^{-1/K_0}, \quad (5)$$

$$y(\tau + T_2) = 1 - \frac{1}{1 - K_0} e^{-K_0} + \frac{K_0}{1 - K_0} e^{-1}. \quad (6)$$

令

$$F_1(K) = 1 - \frac{1}{1 - K} e^{-1} + \frac{1}{1 - K} e^{-1/K}, \quad (7)$$

$$F_2(K) = 1 - \frac{1}{1-K}e^{-K} + \frac{K}{1-K}e^{-1}. \quad (8)$$

如果取  $K = K_0$ , 由式(7)和式(8)分别求出  $F_{10} = F_1(K_0)$  和  $F_{20} = F_2(K_0)$ , 也就是  $y(\tau + T_1)$  和  $y(\tau + T_2)$  的值. 在图1上据此二值查出对应的  $t$  值  $t_{10}$  和  $t_{20}$ , 显然

$$K_0 = \frac{T_2}{T_1} = \frac{t_{20} - \tau}{t_{10} - \tau}$$

定义 任取  $K \in (0, 1)$ , 由式(8)和式(9)求出  $F_1(K)$  和  $F_2(K)$ , 作为  $y(t)$  的值, 再分别从飞升曲线上插值(Lagrange 二次插值公式)求出  $t$  的值  $t_{11}$  和  $t_{21}$ . 令

$$K_1 = \frac{t_{21} - \tau}{t_{11} - \tau}, \quad (9)$$

$$Q(K) = K - K_1. \quad (10)$$

我们把上述求取  $Q(K)$  的值过程称为  $Q$  过程. 显然,  $Q(K_0) = 0$ . 这时,  $K = K_1 = K_0$ . 我们就得出了系统的时间常数

$$T_1 = t_{11} - \tau, \quad T_2 = t_{21} - \tau.$$

实际上, 只要  $|Q(K)| < \varepsilon$ , 这儿  $\varepsilon$  是预先指定的允许误差, 我们认为  $K$  就是所求的  $K_0$ . 问题在于如何找到  $K$ , 使  $|Q(K)| < \varepsilon$ .

定理 对于具有时间常数  $T_1$  和  $T_2$  的二阶过阻尼系统,  $K_0 = T_2/T_1$ . 在  $K_0$  的  $\delta$  邻域内任取一个  $K$ ,  $0 < K < 1$ , 应用  $Q$  过程求取  $Q(K)$  的值, 则有

$$Q(K) \begin{cases} < 0, & K < K_0, \\ = 0, & \text{当 } K = K_0, \\ > 0, & K > K_0. \end{cases} \quad (11)$$

证 将  $Q(K)$  在  $K_0$  的  $\delta$  邻域内按泰勒级数展开, 并取一阶近似:

表1 在  $(0, 1)$  区间内  $Q(K)$  随  $K_0$  变化的分布

Table 1 The distribution of  $Q(K)$  as variance of  $K_0$  in  $(0, 1)$  region

$Q(k)$

| $K_0$ | $K$       |           |           |           |           |           |           |           |           |          |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|
|       | 0.05      | 0.15      | 0.25      | 0.35      | 0.45      | 0.55      | 0.65      | 0.75      | 0.85      | 0.95     |
| 0.05  | 0         | 0.040945  | 0.075663  | 0.098445  | 0.109221  | 0.109059  | 0.098888  | 0.079822  | 0.52982   | 0.019144 |
| 0.15  | -0.022059 | 0         | 0.022791  | 0.037808  | 0.045312  | 0.046453  | 0.042365  | 0.034141  | 0.22505   | 0.008023 |
| 0.25  | -0.033879 | -0.018162 | 0         | 0.012674  | 0.019700  | 0.022226  | 0.21197   | 0.017422  | 0.011544  | 0.004157 |
| 0.35  | -0.039354 | -0.027869 | -0.011700 | 0         | 0.007088  | 0.010441  | 0.010999  | 0.009471  | 0.006423  | 0.002312 |
| 0.45  | -0.043021 | -0.033645 | -0.018411 | -0.007147 | 0         | 0.003896  | 0.005364  | 0.005091  | 0.003609  | 0.001329 |
| 0.55  | -0.045437 | -0.036991 | -0.022512 | -0.011437 | -0.004021 | 0         | 0.002022  | 0.002489  | 0.001924  | 0.000728 |
| 0.65  | -0.046542 | -0.039177 | -0.025009 | -0.014071 | -0.006788 | -0.002365 | 0         | 0.000926  | 0.000915  | 0.000371 |
| 0.75  | -0.047321 | -0.040401 | -0.026488 | -0.015668 | -0.008218 | -0.003763 | -0.001204 | 0         | 0.000322  | 0.000161 |
| 0.85  | -0.047842 | -0.041114 | -0.027326 | -0.016503 | -0.009168 | -0.004532 | -0.001855 | -0.000509 | 0         | 0.000047 |
| 0.95  | -0.048147 | -0.041428 | -0.027656 | -0.016871 | -0.009524 | -0.004856 | -0.002126 | -0.000720 | -0.000139 | 0        |

$$Q(K) =$$

$$Q(K_0) + Q'(K_0) \cdot (K - K_0) =$$

$$0 + (K - K_1)'_{K=K_0} \cdot (K - K_0) =$$

$$\left\{ 1 - \left( \frac{t_{21} - \tau}{t_{11} - \tau} \right)'_{K=K_0} \right\} \cdot (K - K_0) =$$

$$\left\{ 1 - \left( \frac{\gamma^{-1}[F_2(K)] - \tau}{\gamma^{-1}[F_1(K)] - \tau} \right)'_{K=K_0} \right\} \cdot (K - K_0) =$$

$$\left\{ 1 - \frac{1}{T_1^2} \left[ \frac{\frac{1}{(1-K_0)^2} (e^{-1} - K_0 e^{-K_0})}{\frac{1}{T_1(1-K_0)} e^{K_0} - \frac{K_0}{T_2(1-K_0)} e^{-1}} \cdot T_1 - \right. \right.$$

$$\left. \frac{\frac{1}{K_0(1-K_0)^2} (e^{-1/K_0} - K_0 e^{-1})}{\frac{1}{T_1(1-K_0)^2} e^{-1} - \frac{K_0}{T_2(1-K_0)} e^{-1/K_0}} \cdot T_2 \right\} \cdot (K - K_0) =$$

$$\frac{e^{-1} \cdot (e^{-K_0} + e^{-1/K_0} - 2e^{-1})}{(e^{-K_0} - e^{-1}) \cdot (e^{-1} - e^{-1/K_0})} \cdot (K - K_0) \triangleq$$

$$\frac{1}{a_0} \cdot (K - K_0). \quad (12)$$

对于  $K_0 \in (0, 1)$ , 可以简单地判断  $a_0 > 0$ , 因而定理式(11)得证.

推论 对于具有时间常数  $T_1$  和  $T_2$  的二阶过阻尼系统,  $K_0 = T_2/T_1$ ,  $0 < K_0 < 1$ . 任取  $K \in (0, 1)$ , 应用  $Q$  过程求得  $Q(K)$  的值, 则有

$$Q(K) \begin{cases} < 0, & K < K_0, \\ = 0, & \text{当 } K = K_0, \\ > 0, & K > K_0. \end{cases} \quad (13)$$

由于  $Q''(K)$  极其复杂, 现用数值计算方法给以证明. 取  $K_0 \in (0, 1)$  以步长 0.1 变化, 再取  $K \in (0, 1)$  也以步长 0.1 变化, 考察  $Q(K)$  的分布. 结果证实了推论的正确性.

于是,得出了二阶过阻尼系统的  $Q(K)$  函数的分布特性. 对于  $(0,1)$  区间内的  $K, Q(K)$  满足式(12), 式(13), 因而在  $(0,1)$  内有单根  $K_0$ , 可以用二分法逐次逼近求之, 同时也就辨识出了系统的时间常数. 二分法的收敛性无需证明, 收敛速度也比较快.

### 3 误差分析(Error analysis)

令先给定要求  $|Q(K)| < \epsilon$ , 即

$$|K - K_1| = \frac{1}{a_0} \cdot |K - K_0| < \epsilon.$$

又

$$\begin{aligned} |K_1 - K_0| &= |(K_1 - K) + (K - K_0)| \leq \\ &|K_1 - K| + |K - K_0| < \\ &\epsilon + a_0 \cdot \epsilon = (1 + a_0)\epsilon, \end{aligned}$$

即:

$$\begin{aligned} \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} - \frac{T_{20}}{T_{10}} \right| &= \\ \left| \frac{T_{21} \cdot T_{10} - T_{20} \cdot T_{11}}{T_{11} \cdot T_{10}} \right| &< (1 + a_0)\epsilon. \end{aligned}$$

设  $T_{21}, T_{11}$  与准确值  $T_{20}, T_{10}$  的绝对偏差都为  $\mu$ , 则:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(T_{20} \pm \mu) \cdot T_{10} - T_{20} \cdot (T_{10} \pm \mu)}{T_{11} \cdot T_{10}} \right| &= \\ \left| \frac{(T_{10} \pm T_{20})\mu}{T_{11} \cdot T_{10}} \right| &< (1 + a_0)\epsilon, \end{aligned}$$

所以

$$\mu \leq \frac{T_{10}^2 \cdot (1 + a_0)}{T_{10} - T_{20}} \cdot \epsilon.$$

实际计算  $\mu$  的上界时,  $K_0, T_{10}, T_{20}$  都分别用其近似值  $K_1, T_{11}, T_{21}$  代入.

### 4 应用结果(Application results)

1) 选择  $\tau = 0, T_1 = 10$  秒,  $T_2 = 8.1$  秒, 因而  $K_0 = 0.81$ . 以采样周期 0.5 秒, 仿真计算(4)式单位阶跃响应数据 50 个. 指定  $\epsilon = 10^{-5}$ , 辨识结果

$$K_1 = 0.80625, T_1 = 10.0223, T_2 = 8.08055.$$

拟合误差  $J = \sum_{i=1}^{50} |y(i) - y_i| = 1.22 \times 10^{-3}$ .

2) 对一个电热真空恒温槽做阶跃响应, 按 25 分钟采样周期得输出响应数据 34 个. 辨识得到 ( $\epsilon = 0.05$ );  $\tau = 0.4$  分,  $T_1 = 194.024$  分,  $T_2 = 5.250$  分,

$K_1 = 0.027$ . 拟合误差  $J = \sum_{i=1}^{34} |y(i) - y_i| = 0.3166$ . 如果指定的  $\epsilon < 0.05$ , 将得出  $T_2 = 0$ , 即按一阶系统辨识.

### 5 应用本方法的注意事项(Points for attention in use of the method)

1) 阶跃响应实验数据是单调增加的. 如有滞后, 在达到滞后时间之前的采样数据取作 0.

2) 阶跃响应数据应比较准确, 亦即做阶跃响应实验过程中应尽量排除外界干扰, 至少在到达稳态值的 0.632 以前应是这样.

3) 本方法中, 由  $y(t)$  值查  $t$ , 如果采用 Lagrange 二次插值公式, 则要求相邻的三个数据不能在同一条直线上, 否则采用线性插值.

4) 由于阶跃响应实验过程中多少总有一些噪声干扰, 以及计算误差等, 并不是  $\epsilon$  越小, 求出的  $K$  越精确接近  $K_0$ . 一般可先给较小的  $\epsilon$ , 看看  $Q(K)$  的分布情况, 再结合  $\tau$  的寻优选择比较适中的  $\epsilon$ .

5) 应用的经验表明, 对于有滞后的系统, 每次决定的  $\tau$  选得大于真实的  $\tau$ , 往往会出现  $T_2 = 0$  的结果. 为此, 可予先用其它方法估计一个粗略  $\tau$ , 然后按照寻优的思想, 在  $\tau$  左右选择若干个  $\tau$ , 分别辨识出  $K$ , 算出  $T_1, T_2$ . 根据拟合误差  $J$  最小决定一组最佳参数  $\tau, T_1$  和  $T_2$ , 而  $\tau$  不必是采样间隔的整数倍.

### 参考文献(References)

- [1] Motor Engineering Handbook Editor Committee. Production Process Automatic Control System, 49-th Book [M]. Beijing: Machinery Industry Publishing House, 1979 (in Chinese)
- [2] Beijing University, Jilin University and Nanjing University Calculating Mathematics Teaching and Research Sections. Calculating Mathematics [M]. Beijing: People Education Publishing House, 1961 (in Chinese)

### 本文作者简介

尹德昆 1945 年生, 1968 年毕业于清华大学数学力学系, 1979 ~ 1998 年在中国科学院从事控制理论与应用研究. 1993 ~ 1994 年赴美国耶鲁大学高访, 研究人工神经网络与控制, 现为中国矿业大学自动化系研究员, 中国自动化学会理事. 目前主要研究自适应控制, 智能控制理论与应用, 人工神经网络.