

非线性控制系统与状态空间的几何结构*

王 红

(西北工业大学数学与信息科学系·西安, 710072; 南开大学数学科学院·天津, 300071)

摘要: 首先从整体化的观点定义了一种建立在黎曼流形上的非线性控制系统, 给出了系统的状态方程在黎曼流形的局部坐标系下的表达式. 讨论了黎曼流形的几何结构对非线性系统的影响, 研究了非线性系统的能控性和能观测性. 其次, 利用对合分布与全测地子流形的性质, 给出了建立在黎曼流形上的非线性系统的局部能控结构分解, 局部能观结构分解和 Kalman 分解. 第三, 分别利用彼此正交的对合分布族和递增对合分布族与全测地子流形族的性质, 研究了建立在黎曼流形上的非线性控制系统平行解耦问题和级联解耦问题, 以及仿射非线性控制系统的局部干扰解耦问题.

关键词: 非线性系统; 黎曼流形; 局部坐标表示; 对合分布; Kalman 分解; 状态反馈解耦

文献标识码: A

Nonlinear Control System and Geometrical Structure of State Space

WANG Hong

(Department of Mathematics and Information Science, Northwestern Polytechnical University · Xi'an, 710072, P.R. China)

(College of Mathematics, Nankai University · Tianjin, 300071, P.R. China)

Abstract: In this paper, first of all from global viewpoint we define a kind of nonlinear control systems on Riemannian manifold, and give the representation of state equation for the nonlinear systems under a local coordinate system of Riemannian manifold. show that the geometrical structure of Riemannian manifold affect on nonlinear control systems, and discuss the local controllability and observability of nonlinear system on Riemannian manifold. Second, we give the local controllability decomposition of structure, the local observability decomposition of structure and local Kalman decomposition for nonlinear control system on Riemannian manifold by using the involutive distribution and totally geodesic submanifold. Third, we study some decoupling problem of nonlinear control system on Riemannian manifold and describe respectively the parallel decomposition problem and cascade decomposition problem for nonlinear control system on Riemannian manifold in which the characters of a family of mutually orthogonal involutive distributions, a family of increasing involutive distributions and a family of totally geodesic submanifold are used. We also discuss the local disturbance decoupling problem of affine nonlinear control system on Riemannian manifold.

Key words: nonlinear system; Riemannian manifold; local coordinate representation; involutive distribution; Kalman decomposition; state feedback decoupling

1 引言(Introduction)

控制系统的几何理论是非线性控制研究的一个重要方面^[1-8]. 随着非线性控制系统研究的深入发展, 人们逐步意识到状态空间的几何结构对非线性系统的精确控制有着重要的影响, 例如大范围大迎角飞行的飞行器系统和深层空间探测器系统等. 近年来, 由于微分几何方法在非线性的控制理论中的广泛应用, 使得人们可以对状态空间的几何结构与非线性控制系统之间的内在联系作深入探讨. 例如文献[9~15], 从力学系统的角度出发研究了相关的控制问题, 精确力学系统的追迹问题以及非精

确力学系统的动力学和控制问题. 这样讨论对实际问题的背景比较清楚, 易于理解. 但是, 由于受力学定理的限制, 这种研究方法往往陷于局部小范围内处理问题, 现代几何学整体化的思想方法难以系统地发挥作用. 文献[16~18]研究了建立在一般纤维丛上的非线性控制系统, 探讨了系统结构的各种特性, 但这种方法不够直观. 虽然讨论了纤维空间结构对非线性控制系统的影响, 但没有研究底流形的几何结构对非线性控制系统的影响. 90 年代以后, 几何方法研究非线性控制系统有所减弱, 虽然有微分代数方法的介入, 进展也不明显. 一些著名的几

* 基金项目: 国家自然科学基金(19771066); 陕西省自然科学基金(97CS0101)和西北工业大学“双新计划”资助项目.

收稿日期: 1999-02-02; 收修改稿日期: 2000-05-08.

何控制论学者转入研究非线性系统的反馈镇定及各种品质设计,一些新的控制方法介入,如 H_∞ 控制,自适应控制等,也出现不少研究结果,但对非线性控制系统的整体和全局的问题还缺乏深刻的理解和认识.纵观控制系统几何理论的发展,我们发现这一理论所研究的控制系统很少直接讨论状态空间的几何结构对系统的影响.这是因为系统的状态方程中没有引入与状态空间的几何结构有关的量.这样,一方面对控制系统的研究很不精确,不同几何结构的流形上,系统的状态方程是一样的^[19];另一方面,几何学强有力的工具难以在控制系统研究中充分发挥作用.因此,必须想办法将状态空间的几何结构与控制系统的状态方程建立直接联系.

本文,选择光滑的黎曼流形作为系统的状态空间.针对上述问题,根据黎曼流形的特点,我们从整体化的观点出发定义了建立在黎曼流形上的非线性控制系统.取流形上光滑的切向量场为控制系统的状态向量场.通过附属曲线将黎曼流形与状态向量场相联系.这样做有三点好处:第一,在流形的局部坐标系下给出的非线性系统的状态方程表示中引入了与黎曼流形的几何结构相关的联络系数项,通过这种联系可以直接研究流形的几何结构对非线性控制系统的影响.第二,当黎曼流形是平坦的欧氏空间时,联络系数全为零,我们定义的黎曼流形上的非线性控制系统与通常欧氏空间中的非线性控制系统是一致的.此外,黎曼流形上有度量结构,可以刻画切向量场的正交性,从而控制系统的推理、论证和计算可以得到简化.第三,在物理学和力学中有各种场,如流场、电场、磁场、引力场、规范场等,研究以光滑的切向量场为状态向量场的非线性系统,不仅在数学上有重要的理论意义,而且可以为力学和物理学深入研究相应的问题提供精确语言和有力工具.

下面,对于建立在黎曼流形上的非线性控制系统,分别从状态方程的局部坐标表示、局部能控、能观结构分解和各类解耦问题等三方面介绍相关的研究结果.

2 黎曼流形上非线性控制系统的局部表示 (The local representation of nonlinear control system on Riemannian manifold)

本文所引用的数学以及控制论的概念和定义,如不特别声明,均可参见相关的文献[2,4,5,7,19,20,24~28].

设 (M, G) 是一个 m 维的光滑的黎曼流形, G 是 M 上的黎曼度量, D 为 M 上度量 G 的 Levi-Civita

联络. TM 是 M 的切丛, $\Gamma(TM)$ 为切丛 TM 的光滑截面的集合^[24~26].

考虑 M 上的非线性控制系统

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = f(X(t), u(t)), \\ Y(t) = h(X(t)). \end{cases} \quad (2.1)$$

其中,状态向量场 $X(t)$ 是黎曼流形 M 上的光滑的切向量场, $X(t) \in \Gamma(TM)$, 允许控制向量 $u(t): \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个光滑的向量函数, $f: \Gamma(TM) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma(TM)$ 和 $h: \Gamma(TM) \rightarrow \mathbb{R}^r$ 都是光滑映射.

对于 $X(t)$ 为 M 上的状态向量场,若存在一条 M 上的嵌入曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$, 并且它的像集 $\gamma([a, b])$ 包含在 M 的一个坐标邻域 (U, x^i) 内,使得在局部满足 $X(t) = X(\gamma(t))$, 即状态向量场 $X(t)$ 就是 M 上的光滑切向量场 X 在曲线 $\gamma(t)$ 上的限制,则称曲线 $\gamma(t)$ 为状态向量场 $X(t)$ 在坐标邻域 (U, x^i) 内的附属曲线.进一步,若 $X(t)$ 是沿着附属曲线 $\gamma(t)$ 的切向量场,即 $X(t) = d\gamma/dt$, 则称曲线 $\gamma(t)$ 为状态向量场 $X(t)$ 的状态曲线.引进状态向量场 $X(t)$ 的附属曲线 $\gamma(t)$ 之后,则 $dX(t)/dt$ 即为状态向量场 $X(t)$ 沿着附属曲线的切方向 $d\gamma/dt$ 的方向导数,利用 M 的 Levi-Civita 联络 D , 可表示为 $\frac{dX(t)}{dt} = D\frac{d\gamma(t)}{dt}X(t)$. 在局部坐标邻域 (U, x^i) 内,设

$$\begin{aligned} X(t) &= \sum_{i=1}^m X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma(t)), \\ \frac{d\gamma(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^m \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma(t)), \\ f(X(t), u(t)) &= \sum_{i=1}^m f^i(X(t), \gamma(t), u(t)) \frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma(t)). \end{aligned}$$

则通过计算可得:

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{dX^k(t)}{dt} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) X^i(t) \frac{d\gamma^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}(\gamma(t)). \end{aligned}$$

于是,在局部坐标系 (U, x^i) 内,非线性系统(2.1)的状态方程可以表示为:

$$\begin{aligned} \frac{dX^k(t)}{dt} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) X^i(t) \frac{d\gamma^j}{dt} &= \\ f^k(X(t), \gamma(t), u(t)), \quad k &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 $\Gamma_{ij}^k(i, j, k = 1, 2, \dots, m)$ 是 M 的 Levi-Civita 联络在局部坐标系下的联络系数.若 $\gamma(t)$ 是 $X(t)$ 的状态曲线,在局部坐标系 (U, x^i) 内, $X(t) =$

$d\gamma^i/dt, i = 1, 2, \dots, m$. 由(2.2)可得:

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} = f^k\left(\frac{d\gamma}{dt}, \gamma(t), u(t)\right), k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.3)$$

方程组(2.2)和(2.3)是非线性常微分方程组, 根据常微分方程组理论, 在给定初始值, 则局部总存在满足初始值的唯一解^[27].

值得注意的是: 虽然这里考虑流形上的局部坐标邻域, 但它与我们通常意义下的局部邻域是有区别的. 这里的局部坐标邻域是相对整体来说的, 实际上可以是比较大的区域. 例如, 对欧氏空间来说, 它只有一个坐标邻域, 就是它自身. 对于球面来说, 它的一个局部坐标邻域可以是开的半球.

上述可见, 在黎曼流形 M 的局部坐标系下, 对于非线性系统(2.1)而言, 关于状态向量场 $X(t)$ 的研究与关于 $X(t)$ 的状态曲线 $\gamma(t)$ 的研究是等价的. 事实上, 若已知状态向量场 $X(t)$, 则 $X(t)$ 的积分曲线即为 $X(t)$ 的状态曲线. 反之, 若已知状态曲线 $\gamma(t)$, 则沿着 $\gamma(t)$ 的切向量场即为状态向量场. 方程组(2.2)、(2.3)含有黎曼流形 M 上的 Levi-Civita 联络 D 在局部坐标系下的联络系数, 它们将建立在黎曼流形上的非线性控制系统与黎曼流形的内在几何结构紧密联系起来. 一方面通过方程组(2.2)、(2.3)可以研究状态空间的几何结构对非线性控制系统的影响, 另一方面, 整体微分几何强有力的工具可以通过这种联系而发挥作用.

本文侧重于研究状态流形的几何结构对建立在其上的非线性控制系统的制约和影响. 为进一步看清楚建立在黎曼流形上的非线性系统(2.1)与黎曼流形的内在结构有关. 分别给出了建立在三种空间形式: 欧氏空间、单位球面、双曲空间上的非线性控制系统在局部坐标系下的表示, 展示了黎曼流形的曲率结构对非线性系统的影响. 也给出了建立在柱面、锥面上的非线性控制系统在局部坐标系下的表示, 展示了特殊的曲面结构和奇异结构对非线性控制系统的影响. 利用非线性控制系统(2.1)的局部坐标表示(2.2)和(2.3), 还可以证明:

定理 2.1 建立在黎曼流形 M 上的非线性控制系统的状态向量场 $X(t)$ 是系统的平衡态的充要条件是 $X(t)$ 的状态曲线 $\gamma(t)$ 是 M 上的测地线.

定理 2.2 若建立在黎曼流形 M 上的非线性控制系统都是完备的, 那么, M 一定是完备的黎曼流形.

定理 2.3 建立在黎曼流形上的非线性控制系

统总是局部能控的和局部能观测的.

3 非线性控制系统的能控、能观分解问题 (The problems of controllability and observability decomposition for nonlinear control systems)

我们知道在现代控制论中线性系统的能控标准形、能观标准形以及 Kalman 分解等问题的研究是线性系统理论及其应用的重要内容之一. 这些用几何方法描述的线性控制系统的理论在非线性控制系统理论的研究中得到相应推广. 非线性控制系统特别是仿射非线性控制系统的局部能控分解、局部能观分解以及局部 Kalman 分解等问题的研究已成为非线性控制系统的几何理论的重要内容之一^[4,5,7,8].

在第 2 节研究的基础上, 本节我们研究了建立在黎曼流形上的非线性控制系统的局部能控结构分解、局部能观结构分解与局部 Kalman 分解.

3.1 局部能控结构分解 (The local controllability decomposition of structure)

下面, 我们利用黎曼流形上黎曼度量的局部正交性以及对称分布和全测地子流形的性质, 证明了建立在黎曼流形上的非线性系统(2.1)的局部能控结构分解定理. 为了方便, 规定指标变化范围如下: $A, B, C = 1, 2, \dots, m; i, j, k = 1, 2, \dots, d; \alpha, \beta, \sigma = d+1, d+2, \dots, m$.

定理 3.1 设 Δ 是黎曼流形 M 上的一个非奇异对称分布, $\dim \Delta = d$, 若非线性系统(2.1)对任何允许控制 $u(t)$, 都有 $f(X(t), u(t)) \in \Delta$, 并且对任意一点 $p \in M$, 过 p 点的 Δ 的积分子流形 S 在 M 的诱导联络下是 M 的一个全测地子流形. 那么, 存在 M 上 p 点的一个局部坐标邻域 (W, z^A) 使得非线性系统(2.1)的状态方程有下述局部能控分解表示

$$\begin{cases} \frac{dX^k(t)}{dt} + \sum_{i,j=1}^d \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) X^i(t) \frac{d\gamma^j}{dt} + \sum_{\alpha,\beta=d+1}^m \Gamma_{\alpha\beta}^k(\gamma(t)) X^\alpha(t) \frac{d\gamma^\beta}{dt} = f^k(X(t), \gamma(t), u(t)), & k = 1, 2, \dots, d, \\ \frac{dX^\sigma(t)}{dt} + \sum_{\alpha,\beta=d+1}^m \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(\gamma(t)) X^\alpha(t) \frac{d\gamma^\beta}{dt} = 0, & \sigma = d+1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.1)$$

若 $\gamma(t)$ 是非线性系统(2.1)的状态向量场 $X(t)$ 在局部坐标邻域 (W, z^A) 中的状态曲线, 那么 $\gamma(t)$ 满足下述局部能控分解方程组

$$\begin{cases} \frac{d^2 \gamma^k(t)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^d \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} + \\ \sum_{\alpha,\beta=d+1}^m \Gamma_{\alpha\beta}^k(\gamma(t)) \frac{d\gamma^\alpha}{dt} \frac{d\gamma^\beta}{dt} = \\ f^k\left(\frac{d\gamma}{dt}, \gamma(t), u(t)\right), k = 1, 2, \dots, d, \\ \frac{d^2 \gamma^\sigma(t)}{dt^2} + \sum_{\alpha,\beta=d+1}^m \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(\gamma(t)) \frac{d\gamma^\alpha}{dt} \frac{d\gamma^\beta}{dt} = 0, \\ \sigma = d+1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.2)$$

我们注意到:如果将黎曼流形 M 看作为位形流形, $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t), \dots, \gamma^m(t)) \in M$ 看作为位形,那么方程组(3.2)描述了一类非精确的力学系统,可以利用文献[14,15]中相关的研究方法对方程组(3.2)进行分析和讨论.非精确力学系统在实际中经常会遇到,如柔性机器人控制系统,卫星的姿态控制系统,有冗余度的机械控制系统等.

如果再进一步考虑到非奇异对合分布 Δ 的正交补分布 $\Delta^\perp$ 的结构,我们还可以证明下述建立在黎曼流形上的非线性系统(2.1)的局部能控结构完全分解定理.

定理 3.2 设 Δ 是黎曼流形 M 上的一个非奇异对合分布, $\dim \Delta = d$. 若非线性系统(2.1)对任何允许控制 $u(t)$, 都有 $f(X(t), u(t)) \in \Delta$, 并且对任意一点 $p \in M$, 过 p 点的 Δ 和 $\Delta^\perp$ 的积分子流形 S 和 $S^\perp$ 在 M 的诱导联络下都是 M 的全测地子流形. 那么, 存在 M 上 p 点的一个局部坐标邻域 (W, z^A) 使得非线性系统(2.1)完全分解为下述两个子系统:

$$\begin{cases} \text{I} \begin{cases} \frac{dX^k(t)}{dt} + \sum_{i,j=1}^d \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) X^i(t) \frac{d\gamma^j}{dt} = \\ f^k(X(t), \gamma(t), u(t)), k = 1, 2, \dots, d, \\ Y(t) = h(X^1(t), \dots, X^d(t), 0, \dots, 0), \end{cases} \\ \text{II} \begin{cases} \frac{dX^\sigma(t)}{dt} + \sum_{\alpha,\beta=d+1}^m \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(\gamma(t)) X^\alpha(t) \frac{d\gamma^\beta}{dt} = 0, \\ \sigma = d+1, \dots, m, \\ Y(t) = h(0, \dots, 0, X^{d+1}(t), \dots, X^m(t)). \end{cases} \end{cases} \quad (3.3)$$

其中系统 II 是不能控的, 完全由状态流形 M 的内部结构决定. 此时, 状态流形 M 局部微分同胚于 $S \times S^\perp$.

为了更好的理解对合分布、全测地子流形与系统的能控结构完全分解定理, 我们还证明了建立在黎曼流形 M 上的仿射非线性系统的能控结构完全分解定理. 进一步, 我们也考虑了建立在黎曼流形上具有反馈控制的非线性系统的能控结构分解问题.

设 $\phi: \Gamma(TM) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个光滑映射, 使得

非线性控制系统(2.1)的允许控制向量 $u(t) = \phi(X(t), v(t))$, 则称 $\phi(X(t), v(t))$ 为非线性系统(2.1)的一个状态反馈. 在状态反馈作用下非线性系统(2.1)变为

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = f_\phi(X(t), v(t)), \\ Y(t) = h(X(t)). \end{cases} \quad (3.5)$$

其中 $f_\phi(X(t), v(t)) = f[X(t), \phi(X(t), v(t))]$ 是 M 上的光滑的切向量场. 可以对非线性系统(3.5)研究能控结构分解问题, 类似于定理 3.2 中的讨论, 我们也证明了具有反馈控制的非线性系统的能控结构分解定理.

3.2 局部能观结构分解与局部 Kalman 分解 (The local observability decomposition of structure and local Kalman decompositions)

先考虑建立在黎曼流形上的非线性控制系统(2.1)的局部能观结构分解问题. 对于建立在黎曼流形 M 上的非线性控制系统(2.1), $h: \Gamma(TM) \rightarrow \mathbb{R}^r$ 是一个光滑映射. 考虑 Δ_h 是包含在 $\text{Ker}(h)$ 中的最大非奇异对合分布, 且对任何允许控制 $u(t)$, Δ_h 是 $f(X(t), u(t))$ 不变的. 类似于定理 3.2 可证明下述定理:

定理 3.3 设 Δ_h 是黎曼流形上包含在 $\text{Ker}(h)$ 中的最大非奇异对合分布, $\dim \Delta_h = d$. 若对任何允许控制 $u(t)$, Δ_h 是 $f(X(t), u(t))$ 不变的, 并且对任意一点 $p \in M$, 过 p 点的 Δ_h 和 $\Delta_h^\perp$ 的积分子流形 S 和 $S^\perp$ 在 M 的诱导联络下都是 M 的全测地子流形, 那么, 存在 M 上 p 点的一个局部坐标邻域 (W, z^A) 使得非线性系统(2.1)完全分解为下述两个子系统

$$\begin{cases} \text{I} \begin{cases} \frac{dX^k(t)}{dt} + \sum_{i,j=1}^d \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) X^i(t) \frac{d\gamma^j}{dt} = \\ f^k(X(t), \gamma(t), u(t)), k = 1, 2, \dots, d, \\ Y(t) = h(X_2(t)), \end{cases} \\ \text{II} \begin{cases} \frac{dX^\sigma(t)}{dt} + \sum_{\alpha,\beta=d+1}^m \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(\gamma(t)) X^\alpha(t) \frac{d\gamma^\beta}{dt} = \\ f^\sigma(X_2(t), \gamma(t), u(t)), \sigma = d+1, \dots, m, \\ Y(t) = h(X_2(t)). \end{cases} \end{cases} \quad (3.6)$$

其中 $X_2(t) = (0, \dots, 0, X^{d+1}(t), \dots, X^m(t))$, 系统 I 是不能观测的. 此时, 状态流形 M 局部微分同胚于 $S \times S^\perp$. Δ_h 称为局部不能观分布.

在上述关于非线性控制系统的局部能控结构分解和局部能观结构分解的研究基础上, 我们可进一步给出建立在黎曼流形上的非线性控制系统(2.1)的 Kalman 分解.

定理 3.4 设 Δ_c 是黎曼流形 M 上的一个非奇异对合分布, 并且非线性系统(2.1) 对任何允许控制 $u(t)$, 都有 $f(X(t), u(t)) \in \Delta_c$. Δ_u 是 M 上包含在 $\text{Ker}(h)$ 中的最大非奇异对合分布, 并且非线性系统(2.1) 对任何允许控制 $u(t)$, Δ_u 是 $f(X(t), u(t))$ 不变的. 如果对任意一点 $p \in M$, 过 p 点的 $\Delta_c \cap \Delta_u^\perp$ 和 $(\Delta_c + \Delta_u)^\perp$ 的积分子流形在 M 的诱导联络下都是 M 的全测地子流形. 那么, 存在 M 上 p 点的一个局部坐标邻域 (W, z^i) , 使得非线性系统(2.1) 有如下的 Kalman 分解表示:

$$\begin{aligned} \frac{dX_1^k}{dt} + \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{j_k=1}^{d_k} \Gamma_{j_k}^k(\gamma(t)) X_2^j(t) \frac{d\gamma^j}{dt} &= f_1(\hat{X}(t), \gamma(t), u(t)), \\ \frac{dX_2^k}{dt} + \sum_{\lambda=2}^3 \sum_{j_k=1}^{d_k} \Gamma_{j_k}^k(\gamma(t)) X_2^j(t) \frac{d\gamma^j}{dt} &= f_2(\hat{X}(t), \gamma(t), u(t)), \\ \frac{dX_3^k}{dt} + \sum_{\lambda=2}^3 \sum_{j_k=1}^{d_k} \Gamma_{j_k}^k(\gamma(t)) X_2^j(t) \frac{d\gamma^j}{dt} &= 0, \\ \frac{dX_4^k}{dt} + \sum_{\lambda=2}^4 \sum_{j_k=1}^{d_k} \Gamma_{j_k}^k(\gamma(t)) X_2^j(t) \frac{d\gamma^j}{dt} &= 0, \\ Y(t) &= h(\hat{X}(t)). \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mu &= 1, 2, 3, 4, \quad k_\mu = 1, 2, \dots, d_\mu, \\ \hat{X}(t) &= (X_1^1(t), \dots, X_{11}^1(t), 0, \dots, 0, X_3^1(t), \dots, \\ &\quad X_{33}^3(t), 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

这些研究结果表明建立在黎曼流形上的非线性控制系统的能控分解、能观分解、Kalman 分解等问题与状态流形的局部几何结构有密切的联系. 这些理论上的研究使我们对非线性控制系统的整体有更深刻的理解.

4 黎曼流形上非线性控制系统的解耦问题 (The decoupling problems of nonlinear control systems on Riemannian manifold)

多年来, 系统的各种解耦问题一直是线性和非线性控制系统的几何理论研究的重要内容之一[4, 5, 7, 8, 20~23]. 这不仅是因为研究系统解耦问题的方法和设计使得我们能将所研究的控制系统化繁为简, 化难为易. 更重要的是因为解耦问题是联系控制系统结构与系统的状态空间结构的纽带, 解耦问题的研究揭示了控制系统的本质结构.

本节研究了建立在黎曼流形上的非线性系统的解耦问题. 利用彼此正交的对合分布族与全测地子流形族的性质, 研究了建立在黎曼流形上的非线性

控制系统状态方程无反馈平行解耦问题和非线性控制系统的状态反馈平行解耦问题. 利用递增对合分布族与全测地子流形族的性质, 研究了建立在黎曼流形上的非线性控制系统状态方程无反馈级联解耦问题和非线性控制系统的状态反馈级联解耦问题. 且作为状态反馈解耦问题的应用, 研究了建立在黎曼流形上的仿射非线性控制系统的局部干扰解耦问题.

4.1 状态方程级联解耦问题(The cascade decomposition problem of state equation)

利用递增对合分布族与递增全测地子流形族的性质, 研究建立在黎曼流形上的非线性控制系统(2.1) 的状态方程无反馈级联解耦问题, 获得下述定理:

定理 4.1 设 $\{\Delta_\lambda \mid \lambda = 1, 2, \dots, d\}$ 是定义在黎曼流形 M 的一个开集 U 上一个递增对合分布族, $\dim \Delta_1 = d_1, \dim \Delta_k - \dim \Delta_{k-1} = d_k, k = 2, 3, \dots, d$, $d_0 = m - \sum_{\lambda=1}^d d_\lambda$. 且非线性系统(2.1) 对任何允许控制 $u(t)$, $\{\Delta_\lambda \mid \lambda = 1, 2, \dots, d\}$ 是局部相容 f -不变递增分布族. 如果对任意一点 $p \in U$, 过 p 点的 $\Delta_\lambda (\lambda = 1, 2, \dots, d)$ 的积分子流形 $S_\lambda (\lambda = 1, 2, \dots, d)$ 在 M 的诱导联络下, S_k 是 S_{k+1} 的全测地子流形, $k = 1, 2, \dots, d_1$, S_d 是 M 的全测地子流形, 那么, 建立在黎曼流形 M 上的非线性控制系统(2.1) 在 p 点具有级联解耦.

4.2 具有状态反馈的非线性系统的解耦问题(The state feedback decoupling problem of nonlinear control system)

我们可以讨论非线性系统(3.5) 的解耦问题. 如果非线性系统(3.5) 具有平行(级联)解耦, 那么称非线性系统(2.1) 具有状态反馈平行(级联)解耦. 可以证明下述非线性系统状态反馈平行解耦定理.

定理 4.2 设 $\{\Delta_\lambda \mid \lambda = 1, 2, \dots, d\}$ 是定义在黎曼流形 M 的一个开集 U 上一族彼此正交的对合分布族, $\dim \Delta_\lambda = d_\lambda, \Delta_0$ 是 $\{\Delta_\lambda \mid \lambda = 1, 2, \dots, d\}$ 的正交补分布, $\dim \Delta_0 = d_0 = m - \sum_{\lambda=1}^d d_\lambda$. 如果非线性系统(2.1) 具有状态反馈 $u(t) = \varphi(X(t), v(t))$, 使得对任何允许控制 $v(t)$, $\{\Delta_\lambda \mid \lambda = 1, 2, \dots, d\}$ 是局部相容 f_φ -不变正交分布族, 并且对任意一点 $p \in U$, 过 p 点的 $\Delta_\lambda (\lambda = 1, 2, \dots, d)$ 的积分子流形 $S_\lambda (\lambda = 0, 1, \dots, d)$ 在 M 的诱导联络下都是 M 的全测地子流形. 那么建立在黎曼流形 M 上的非线性控制系统(2.1) 具有状态反馈平行解耦.

该定理表明: 对于非线性控制系统(2.1), 如果能找到适当的状态反馈 $\varphi(X(t), v(t))$, 使得系统

具有状态反馈平行解耦,那么建立在黎曼流形上 M 的非线性控制系统(2.1)在局部就化为下述一族子系统 $I_\lambda, \lambda = 0, 1, \dots, d$.

$$I_\lambda: \begin{cases} \frac{dX_\lambda^k(t)}{dt} + \sum_{i_1, i_2=1}^{d_\lambda} \Gamma_{i_1 i_2}^k(\gamma(t)) X_\lambda^{i_1}(t) \frac{d\gamma_{i_2}^k}{dt} = \\ f_{\varphi_\lambda}^k(X_\lambda(t), v_\lambda(t)), \\ Y_\lambda(t) = h(X_\lambda(t)), k_\lambda = 1, 2, \dots, d_\lambda. \end{cases}$$

其中

$$v_0(t) = (0, \dots, 0),$$

$$X_\lambda(t) = (0, \dots, 0, X_\lambda^1(t), \dots, X_\lambda^{d_\lambda}(t), 0, \dots, 0),$$

$$\lambda = 0, 1, \dots, d, d_0 + d_1 + \dots + d_d = m.$$

在这族子系统中,每一个系统 I_λ 对应的状态流形 S_λ 是原大系统的状态流形 M 的全测地子流形,并且在局部 M 微分同胚于 $S_0 \times S_1 \times \dots \times S_d$. 由此可见,状态流形的局部几何结构直接影响和制约着非线性控制系统本身的结构.

同理,也可以证明非线性系统(2.1)状态反馈级联解耦定理.

4.3 仿射非线性控制系统的局部干扰解耦问题

(The local disturbance decoupling problem of affine nonlinear control system)

作为建立在黎曼流形上的非线性系统状态反馈解耦的一种应用,下面,我们讨论建立在黎曼流形上的仿射非线性控制系统的局部干扰解耦问题.

考虑建立在 M 上的仿射非线性控制系统

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = f(X(t)) + \sum_{\lambda=1}^n g_\lambda(X(t)) u_\lambda(t) + \\ \sum_{i=1}^s p_i(X(t)) w_i(t), \\ Y(t) = h(X(t)). \end{cases} \quad (4.1)$$

其中,状态向量场 $X(t)$ 是 M 上的光滑切向量场, $X(t) \in \Gamma(TM)$, $f, g_\lambda, p_i: \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$, $\lambda = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, s$ 和 $h: \Gamma(TM) \rightarrow \mathbb{R}^r$ 都是光滑映射,所以 $f(X(t), g_\lambda(X(t)), p_i(X(t))) \in \Gamma(TM)$. $u_\lambda(t) (\lambda = 1, 2, \dots, n)$ 是系统(4.1)的控制输入, $w_i(t) (i = 1, 2, \dots, s)$ 是系统(4.1)的干扰输入. 仿射非线性控制系统(4.1)的局部干扰解耦问题可定义如下:

定义 4.1 对于仿射非线性控制系统(4.1),如果存在某点 $p \in M$ 的一个局部坐标邻域 (U, x^A) 以及状态反馈 $u(t) = \alpha(t) + \beta(t)v(t)$, 其中 $\alpha(t)$, $v(t)$ 是光滑向量函数, $\beta(t)$ 是一个 $n \times n$ 阶可逆光滑函数矩阵,使得非线性系统(4.1)具有如下的局部坐标表示

$$\frac{dX_0^{j_0}}{dt} + \sum_{i_0, j_0=1}^{d_0} \Gamma_{i_0 j_0}^{j_0}(\gamma(t)) X_0^{i_0}(t) \frac{d\gamma_{j_0}^{j_0}}{dt} = \tilde{f}_{\tilde{\varphi}_0}^{j_0}(X_0(t)),$$

$$\frac{dX_1^{j_1}}{dt} + \sum_{i_1, j_1=1}^{d_1} \Gamma_{i_1 j_1}^{j_1}(\gamma(t)) X_1^{i_1}(t) \frac{d\gamma_{j_1}^{j_1}}{dt} =$$

$$\tilde{f}_{\tilde{\varphi}_1}^{j_1}(X_1(t)) + \sum_{j=1}^n \tilde{g}_j^{j_1}(X_1(t)) v_j(t),$$

$$\frac{dX_2^{j_2}}{dt} + \sum_{i_2, j_2=1}^{d_2} \Gamma_{i_2 j_2}^{j_2}(\gamma(t)) X_2^{i_2}(t) \frac{d\gamma_{j_2}^{j_2}}{dt} =$$

$$\tilde{f}_{\tilde{\varphi}_2}^{j_2}(X_2(t)) + \sum_{i=1}^s p_i^{j_2}(X_2(t)) w_i(t).$$

其中

$$X(t) = X_0(t) + X_1(t) + X_2(t),$$

$$X_\lambda(t) = (0, \dots, 0, X_\lambda^1, \dots, X_\lambda^{d_\lambda}, 0, \dots, 0),$$

$$\tilde{f} = f + g\alpha = \tilde{f}_0 + \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2,$$

$$\tilde{f}_\lambda = (0, \dots, 0, \tilde{f}_\lambda^1, \dots, \tilde{f}_\lambda^{d_\lambda}, 0, \dots, 0),$$

$$\lambda = 0, 1, 2, k_\lambda = 1, 2, \dots, d, d_0 + d_1 + d_2 = m,$$

$$\tilde{g}_j = (g\beta)_j, j = 1, 2, \dots, n, g = (g_1, g_2, \dots, g_n).$$

则称仿射非线性制系统(4.1)在 p 点具有局部干扰解耦,从上式可见,给出的反馈控制使得干扰 $w(t)$ 不影响输出 $Y(t)$.

对于仿射非线性控制系统(4.1),定义 $\Delta_g = \text{sp}\{g_\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, n\}$ 是由光滑切向量场 $g_\lambda(X(t)) (\lambda = 1, 2, \dots, n)$ 生成的非奇异最小对合分布, $\dim \Delta_g = d_1$. $\Delta_p = \text{sp}\{p_i, i = 1, 2, \dots, s\}$ 是由光滑切向量场 $p_i(X(t)) (i = 1, 2, \dots, s)$ 生成的包含在 $\text{Ker}(h)$ 中的最大非奇异对合分布, $\dim \Delta_p = d_2$. 如果 Δ_g 与 Δ_p 是正交的,记 Δ_0 是 $\Delta_g + \Delta_p$ 的正交补分布,那么 Δ_0 也是对合的, $\dim \Delta_0 = d_0 = m - d_1 - d_2$. 若对某点 $p \in M$, 存在一个局部坐标邻域 (U, x^A) , 仿射非线性控制系统(4.1)具有状态反馈 $u(t) = \alpha(t) + \beta(t)v(t)$, 其中 $\alpha(t)$, $v(t)$ 是光滑函数, $\beta(t)$ 是一个 $n \times n$ 阶可逆的光滑函数矩阵,使得分布 Δ_g, Δ_0 和 Δ_p 是局部相容 $\tilde{f}$ -不变的正交分布. 并且对任意一点 $p \in M$, 过 p 点的 Δ_g, Δ_0 和 Δ_p 的积分流形 S_g, S_0 和 S_p 在 M 的诱导联络下都是 M 的全测地子流形. 那么,可以证明建立在黎曼流形 M 上的仿射非线性系统(4.1)在 p 点具有局部干扰解耦.

5 结论(Conclusion)

本文研究了建立在黎曼流形上的非线性控制系统的几何理论. 为了研究黎曼流形的几何结构对非线性控制系统的影响,我们从整体化的观点出发,定义了一种建立在黎曼流形上的非线性控制系统,给出了在黎曼流形的局部坐标系下非线性控制系统状

态方程的表达式,这就将非线性控制系统的状态方程与黎曼流形的几何结构之间建立了直接的联系.由此出发,我们从非线性系统的能控性、能观测性、能控、能观结构分解以及控制系统的各种解耦问题等几个方面,研究了状态空间的黎曼流形结构、联络结构、曲率结构和子流形结构对非线性控制系统的影响.这些理论上的研究使我们对非线性控制系统的整体有更深刻的理解和认识.我们知道一般的有限维微分流形总是以欧氏空间为背景建立起来的,而著名的 Whitney 定理告诉我们一个微分流形总可以嵌入到充分高维的欧氏空间内作为子流形.这种始于欧氏空间又汇归于欧氏空间的微分流形为整体微分几何学和大范围分析学的研究提供了广泛的市场.因此,对于建立在一般的微分流形上的非线性控制系统的理论框架,各种算法和设计的深入研究将是现代控制理论发展的重要方面之一.

参考文献(References)

- [1] Chen H F and Guo L. Some developments and perspective of modern control theory [J]. Science Bulletin, 1998, 43(1): 1-7 (in Chinese)
- [2] Wonham W M. Linear Multivariable Control: A Geometric Approach [M]. New York: Springer Verlag, 1974
- [3] Brockett R W. Nonlinear systems and differential geometry [J]. Proc. of IEEE, 1976, 12(3): 371-393
- [4] Isidori A. Nonlinear Control Systems (2nd) [M]. Berlin: Springer Verlag, 1989
- [5] Nijmeijer H and Van der Schaft A J. Nonlinear Dynamical Control Systems [M]. New York: Springer Verlag, 1990
- [6] Sussmann H J. Nonlinear Controllability and Optimal Control [M]. New York: Marcel Dekker, 1990
- [7] Chen D Z. Geometric Theory of Nonlinear Systems [M]. Beijing: Science Press, 1987 (in Chinese)
- [8] Feng B C and Fei S M. Analysis and Design of Nonlinear Control Systems (2nd) [M]. Beijing: Electronic Industrial Press, 1998 (in Chinese)
- [9] Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics (2nd) [M]. New York: Springer Verlag, 1989
- [10] Lewis A D and Murray R M. Controllability of simple mechanical control systems [J]. SIAM J. Contr. Optimiz, 1997, 35(3): 766-790
- [11] Lewis A D and Murray R M. Decompositions for control systems on manifolds with an affine connection [J]. Systems and Control Letters, 1997, 31(2): 199-205
- [12] Bullo F and Murray R M. Tracking for fully actuated mechanical systems: A geometric framework [J]. Automatica, 1999, 35(1): 17-34
- [13] Bullo F. A series describing the evolution of mechanical control systems [A]. Proc. 14th Triennial World Congress, International Federation of Automatic Control (IFAC) [C], Beijing, 1999, E: 479-485
- [14] Reyhanoglu M, Van der Schaft A J, Mc Clamroch N H and Kolmanovsky I. Dynamics and control of a class of underactuated mechanical systems [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1999, 44(8): 1663-1671
- [15] Rathnam M and Murray R M. Configuration flatness of lagrangian systems underactuated by one control [J]. SIAM J. Contr. Optimiz, 1998, 36(1): 164-179
- [16] Sussmann H J. Existence and uniqueness of minimal realizations of nonlinear systems [J]. Math. Syst. Theory, 1977, 10(2): 263-284
- [17] Sussmann H J. Lie brackets, real analyticity and geometric control [A]. Progress in Math. Differential Geometric Control Theory [C], MA: Birkhauser, 1983
- [18] Mu X W. Geometric framework and minimal realizations of nonlinear systems on fibre bundle [J]. J. Applied Mathematics and Mechanics, 1996, 17(10): 939-950 (in Chinese)
- [19] Wang H and Du Y W. Sphere, cylindroid, cone and nonlinear control systems [J]. J. Syst. Sci. and Math. Scis., 2001, 21(2): 163-171 (in Chinese)
- [20] Xia X H and Gao W B. Control and Decoupling of Nonlinear Systems [M]. Beijing: Science Press, 1993 (in Chinese)
- [21] Xia X H. On the solution and its uniqueness of nonlinear decoupling problems [J]. J. Syst. Sci. and Math. Scis., 1993, 13(4): 289-296 (in Chinese)
- [22] Grizzle J W and Isidori A. Block noninteracting control with stability via static feedback [J]. Math. Contr. Signals Syst., 1989, 12(2): 315-341 (in Chinese)
- [23] Van der Wegen L L M. Local disturbance decoupling with stability for nonlinear systems [D]. The Netherlands. Twente University, 1990
- [24] Chen S S and Chen W H. Lecture of Differential Geometry [M]. Beijing: Peking University Press, 1983 (in Chinese)
- [25] Chen W H. Introduction of Differential Manifold [M]. Beijing: Advanced Education Press, 1998 (in Chinese)
- [26] Wu H X, Shen C L and Yu Y L. Introduction of Riemannian Geometry [M]. Beijing: Peking University Press, 1989 (in Chinese)
- [27] Arnold V I. Ordinary Differential Equations [M]. Beijing: Science Press, 1985 (in Chinese)
- [28] Arnold V I. Geometric Approach of Ordinary Differential Equations [M]. Beijing: Science Press, 1989 (in Chinese)

本文作者简介

王红女, 1962年生, 1992年7月毕业于复旦大学数学研究所获理学博士学位. 现为西北工业大学数学与信息科学系教授、南开大学数学科学院教授、博士生导师. 主要研究方向: 微分几何理论及其应用, 非线性控制系统的几何理论