

有交易费的折算资产优化性质和可达性*

许世蒙¹ 张玉忠²

(1. 装甲兵工程学院数学室·北京, 100072; 2. 曲阜师范大学运筹研究所·山东曲阜, 273165)

摘要: 针对有交易费的多股票资产模型, 引入了资产折算函数, 并利用辅助鞅和凸分析方法, 讨论了该模型下折算资产优化性质和优化的可达性。

关键词: 交易费; 辅助鞅; 折算资产; 资产优化性质; 可达性

文献标识码: A

Reachability and Properties of Discount Asset Optimization under Transaction Costs

XU Shimeng¹ and ZHANG Yuzhong²

(1. Mathematics Section, Armored Force Engineering Institute · Beijing, 100072, P. R. China;

2. Institute of Operations Research, Qufu Normal University · Shandong Qufu, 273165, P. R. China)

Abstract: We introduce the discount asset function for the given market model under transaction costs, and discuss the reachability and properties of the asset optimization by using the methods of auxiliary martingales and convex analysis.

Key words: transaction costs; discount asset; properties of asset optimization; reachability

1 引言(Introduction)

资产优化及相关问题历来是数理金融领域的重要问题,而在有交易费的市场模型下进行讨论还是近些年的学科研究的热点^[1-5]. 本文在多种风险资产参与的有交易费市场模型下,引入折算函数衡量交易终端时刻资产、刻画套期保值策略,结合辅助鞅方法和凸分析方法,讨论了在某种效用函数下,投资者在投资终端时刻资产优化的一些性质和可达性。

2 资产模型(Asset model)

假定市场有 d 种股票和 1 种债券交易,仅是债券和股票之间存在交易,交易费率是常值. 交易时间区间为 $[0, T]$, $T \in (0, \infty)$. 记 (Ω, F, P) 为完备概率空间, $F = (F_t, 0 \leq t \leq T)$ 是一族上升的子 σ 域,满足所谓的通常条件^[6]. 设债券的单位价值量方程和第 i 种股票的单位价值量方程分别为

$$dB(t) = B(t)r(t)dt, B(0) = 1, 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

$$dS_i(t) = S_i(t)[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)dW_j(t)], \\ S_i(0) = p_i, i = 1, 2, \dots, d. \quad (2)$$

其中利率 $r(t)$ 为 F -循序可测和关于 (t, ω) 非负一致有界的. $\{W(t), 0 \leq t \leq T\}$ 是一个定义在 (Ω, F, P) 上的 d 维标准布朗运动, $W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))^T$, $b_i(t)$ 一致有界, $b_i(t), \sigma_{ij}(t)$ 分别为第 i 种股票的增值率系数和波动系数, $i, j = 1, \dots, d$.

$\|\sigma(t)\|^2 = \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}^2(t)$ 有上下界. 记投资策略为 $(L, M): (L_1(t), M_1(t), \dots, L_d(t), M_d(t)), 0 \leq t \leq T$, 并是左连续非减的 F -适应过程, $L_i(0) = M_i = 0$. 对投资策略 (L, M) 的资产持有价值量方程组如下

$$X(t) = x - (1+\lambda) \sum_{i=1}^d L_i(t) + (1-\mu) \sum_{i=1}^d M_i(t) + \\ \int_0^t X(u)r(u)du, 0 \leq t \leq T, X(0) = x, \quad (3)$$

$$Y_i(t) = y_i + L_i(t) - M_i(t) + \\ \int_0^t Y_i(u)[b_i(u) + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(u)]dW_j(u), \\ 0 \leq t \leq T, Y_i(0) = y_i. \quad (4)$$

* 基金项目: 国家自然科学基金(19871049)和山东省自然科学基金(Q98A06114)资助课题.
收稿日期: 1999-11-23; 收修改稿日期: 2001-01-15.

3 基本定义(Basic definition)

定义 1 对 $u = (u_1, \dots, u_d)$, 称 $f(u) = \sum_{i=1}^d \{ (1 - \mu) I_{[u_i \geq 0]} + (1 + \lambda) u_i I_{[u_i < 0]} \}$ 为折算函数^[7].

定义 2 未定权益(contingent claims)为一组 F_T -可测的随机变量 $(C_0, C_1, \dots, C_d)$.

设投资者的初始资产为 $(x, y_1, \dots, y_d)$, 其中依次为初始债券资本, d 种初始股票资本, 投资策略为 (L, M) , 则这个投资者在终端时刻的净资产为 $X(T) - C_0 + f(Y(T) - C)$.

定义 3 称投资策略 (L, M) 以 $x, y, \dots, y_d$ 为初始资本, 套期保值(hedge)上述未定权益, 如果 (3), (4) 式中的 $X(T), Y_i(T)$ 满足

$$\begin{cases} X(T) + f(Y(T) - C) \geq C_0, & C = (C_1, \dots, C_d), \\ Y(T) = (Y_1(T), \dots, Y_d(T)), \end{cases} \quad (5)$$

并称满足 (5) 式的投资策略为套期保值策略(hedging strategy).

定义 4 辅助鞅^[7,8]的定义如下

$D = \{ (Z_0(\cdot), Z_1(\cdot), \dots, Z_d(\cdot)) \mid Z_i(\cdot) \text{ 是严格 } F\text{-正鞅},$

$0 \leq t \leq T, \text{ 且满足下述 1), 2) } \}.$ (6)

1) $Z_0(0) = 1; Z_i(0) = z_i \in [(1 - \mu)p_i, (1 + \lambda)p_i], i = 1, 2, \dots, d;$

2) $1 - \mu \leq R_i(t) = \frac{z_i(t)B(t)}{Z_0(t)S_i(t)} \leq 1 + \lambda, 0 \leq t \leq T, i = 1, 2, \dots, d.$

定义 5 给定初始资本 $(x, y_1, \dots, y_d)$, 称套期保值策略是可允许的, 如果相应的资产满足

$$(X(\cdot) + \sum_{i=1}^d R_i(\cdot)Y_i(\cdot))/B(\cdot), 0 \leq t \leq T \quad (7)$$

是一个 P_0 -上鞅, 全体可允许投资策略记为 $A(x, y_1, \dots, y_d) \triangleq A.$

4 资产优化的可达性(Reachability of asset optimization)

定义 6 效用函数 $U(\cdot): (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. 这里 $U(\cdot)$ 是严格凹、严格增和连续可微的, 且满足

$$U'(0^+) = \lim_{x \downarrow 0} U'(x) = \infty,$$

$$U'(\infty) = \lim_{x \uparrow \infty} U'(x) = 0.$$

规定 $U(x) = -\infty$, 对任意 $x < 0$. 设 $U'(x)$ 连续且严格递减的, 记其连续逆为 $I(\cdot)$, 且 $I(0^+) = \infty$, $I(\infty) = 0$. 显然, $I(\cdot)$ 与 $U(\cdot)$ 具有相同的性质, 均为 $(0, \infty)$ 到 $(0, \infty)$ 的双射. 为讨论需要, 对 $U(\cdot)$ 还

补充假定: 对适当选取的 $a \geq 0, 0 \leq b < 1$, 有

$$xU'(x) \geq a + (1 - b)U(x), \forall x \in (0, \infty).$$

给定初始资本 $(x, y_1, y_2, \dots, y_d)$, 对 $0 \leq t \leq T$, 投资者的净资产最优化问题是找到一个可容许投资策略:

$$(L^*, M^*) = (L_1^*(t), M_1^*(t), \dots, L_d^*(t), M_d^*(t)) \in A_+(x, y_1, \dots, y_d) =: A_+, \quad (8)$$

使其终端时刻净资产的效用期望达最大, 亦即有

$$\begin{aligned} V(x, y_1, \dots, y_d) = \\ \sup_{(L, M) \in A_+} E[U(X(T) - C_0 + f(Y(T) - C))] = \\ EU(X^*(T) - C_0 + f(Y^*(t) - C)) < \\ + \infty, (L^*, M^*) \in A_+. \end{aligned} \quad (9)$$

这里, X 和 Y 为 (5) 式中初始资产 $(x, y_1, \dots, y_d)$, 且投资策略为 (L, M) 的资助过程. 记

$$A_+ = \{ (L, M) \in A \mid \text{使得 } X - C_0 + f(Y(T) - C) \geq 0 \}. \quad (10)$$

定理 1 若 $C_0 + f(C) \geq -k$ 及 $E_0^*[C_0^2 + \dots + C_d^2] < +\infty$, 其中 k 为确定的正数, 则存在 $(L^*, M^*) \in A_+$, 使得式 (9) 成立.

证 不妨取 $p_i = 1, i = 1, \dots, d, r(\cdot) \equiv 0, 0 \leq t \leq T$. 并引入记号

$$A_1 = \{ H \in L_2^* \mid \exists (L, M) \in A_+ \text{ 套期保值 } (C_0 + H, C_1, \dots, C_d), H \geq 0, \text{ a.s. } \}. \quad (11)$$

往证 A_1 是 L_2^* 中有界闭凸子集. 其中凸性和闭性的证明见文献 [7, 8]. 这里, 仅证明 A_1 的有界性. 由条件 $E_0^*[C_0^2 + \dots + C_d^2] < \infty$, 可知 $E_0^*X^2(T)$ 和 $\sum_{i=1}^d EY_i^2$ 均有界^[8]. 而对 $H \in A_1$, 有

$$X(T) - C_0 + f(Y(T) - C) \geq H,$$

故

$$X(T) + f(Y(T) - C) \geq C_0.$$

从而

$$E_0^*[X(T) - C_0 + f(Y(T) - C)]^2 < +\infty, \quad (12)$$

亦即 $H \in A_1$ 在 L_2^* 中有界. 记 $J(H) = -EU(H), H \in L_2^*$. 显然, $J: L_2^* \rightarrow R \cup \{\infty\}$ 是凸的, 且取有限值. 当满足补充假定时, J 是 L_2^* 上拓扑的凸下半连续函数^[1]. 这样, 只需证明 $J(H)$ 在 A_1 上可达到极小值. 而由凸分析的基本定理^[9], 可知 $-V(x, y_1, \dots, y_d)$ 在 A_1 上达到最小值, 亦即存在 $(L^*, M^*) \in A_+$ 和 $H^* \in A_1$, 使得相应的终端时刻净资产满足

$$X^*(T) - C_0 + f(Y^*(T) - C) \geq H^* (\text{套期保值}) \quad \text{a.s.} \quad (13)$$

于是,一定有

$$X^*(T) - C_0 + f(Y^*(T) - C) = H^* \quad \text{a.s.} \quad (14)$$

若不然,当 $P^* \mid X^*(T) - C_0 + f(Y^*(T) - C) > H^* \mid > 0$, 则有 $(L, M) \in A_+$, 并套期保值 $(C_0 + X^*(T) + f(Y^*(T) - C), C_1, \dots, C_d)$, 但这与 U 的严格递增性相矛盾. 故定理得到证明.

5 折算资产优化的性质 (Properties of discount asset optimization)

取 $C_i = 0, i = 1, \dots, d$. 这时投资者终端时刻财富的效用函数为 $U[X(T) + f(Y(T))]$, 最优投资策略 $(\hat{L}, \hat{M}) \in A^+$ 为对应给定的初始资本, 使得

$$V = \sup_{(L, M) \in A^+} E[U(X(T) + f(Y(T)))] = E[U(\hat{X}(T) + f(\hat{Y}(T)))]. \quad (15)$$

这里 $\hat{X}(T), \hat{Y}(T)$ 是相应于 $(\hat{L}, \hat{M})$ 的资产终端值, $A^+ \subset A$, 满足 $X(T) + f(Y(T)) \geq 0, \text{ a.s.}$

假设 1 $\tilde{U}$ 为 U 的凹对偶, $0 < \xi < \infty$, 存在一组元 $\hat{Z} \in D$, 使得下式达到最小, 亦即

$$\tilde{V} = \inf_{Z \in D} E[\tilde{U}(\xi \frac{Z_0(T)}{B(T)}) + \sum_{i=1}^d \frac{Y_i}{P_i} \xi Z_i(T)] = E[\tilde{U}(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)}) + \sum_{i=1}^d \frac{Y_i}{P_i} \xi \hat{Z}_i(T)]. \quad (16)$$

引理 1^[7] 在定义 6 和补充假设条件下, 对每一组元 $Z \in D$, 有

$$E[\frac{Z_0(T)}{B(T)} I(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)}) - \sum_{i=1}^d \frac{Y_i}{P_i} Z_i(T)] \leq E[\frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)} I(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)}) - \sum_{i=1}^d \frac{Y_i}{P_i} \hat{Z}_i(T)] < \infty.$$

定理 2 (优化性质) 存在: $(\hat{L}, \hat{M}) \in A^+$, 使得 (15) 成立, 并满足

- i) $\hat{X}(T) + f(\hat{Y}(T)) = I(\hat{\xi} \hat{Z}_0(T)/B(T));$
- ii) $\hat{L}_i$ 在集 $\{0 \leq t \leq T/R_i(T) = 1 + \lambda\}$ 外为零, $\hat{M}_i$ 在集 $\{0 \leq t \leq T/R_i(T) = 1 - \mu\}$ 外为零;

$$\text{iii) } [\hat{X}(t) + \sum_{i=1}^d \hat{R}_i(t) Y_i(t)]/B(t) = E[I(\hat{\xi}(\frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)}) \mid F_t)].$$

证 注意到 $f(\xi) = E[\frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)} I(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)})]$ 是

严格递减的. 取 $\hat{C}_0 = I(\hat{\xi} \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)})$, 可得

$$\sup_{Z \in D} E[Z_0(T) \frac{\hat{C}_0}{B(T)} - \frac{Y_i}{P_i} Z_i(T)] =$$

$$E[\hat{Z}_0 \frac{\hat{C}_0}{B(T)} - \sum_{i=1}^d \frac{Y_i}{P_i} \hat{Z}_i(T)] \triangleq x. \quad (17)$$

由可允许策略的性质有

$$\hat{X}(T) + \sum_{i=1}^d \hat{R}_i(T) \hat{Y}_i(T) \geq \hat{C}_0.$$

于是

$$\hat{X}(T) + f(\hat{X}(T)) \geq \hat{C}_0,$$

以及 $[\hat{X}(\cdot) + \sum_{i=1}^d \hat{R}_i(\cdot) \hat{Y}_i(\cdot)]/B(\cdot)$

是一个 P_0 -上鞅, 可得

$$\hat{X}(T) + \sum_{i=1}^d \hat{R}_i(T) \hat{Y}_i(T) = \hat{C}_0.$$

即也得出 iii) 成立. 由

$$\inf_{\substack{1-\mu \leq \hat{R}_i \leq 1+\lambda \\ i=1,2,\dots,d}} (\hat{X}(T) + \sum_{i=1}^d \hat{R}_i(T) \hat{Y}_i(T)) = \hat{C}_0,$$

可得

$$\hat{X}(T) + f(\hat{Y}(T)) = \hat{C}_0.$$

亦即 $\hat{R}_i(T) = 1 - \mu$, 当 $\{Y_i(T) > 0\}$; $\hat{R}_i(T) = 1 + \lambda$, 当 $\{Y_i(T) \leq 0\}$, 于是可知 ii) 成立.

最后, 对 $(\hat{L}, \hat{M}) \in A^+$, 可有

$$EU(\hat{X}(t) + f(\hat{Y}(T))) = V + x \hat{\xi},$$

再注意到, 对任何 $(L, M) \in A^+$,

$$\tilde{U}(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)} + \hat{\xi} \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)} [X(T) + f(Y(T))]) \geq U(X(T) + f(Y(T))).$$

这样便得

$$\begin{aligned} E[UX(T) + f(Y(T))] &\leq \\ E\tilde{U}(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)} + \hat{\xi} E_0[\hat{X}(T) + \sum_{i=1}^d \hat{R}_i(T) Y_i(T)]/B(T)) &\leq \\ E\tilde{U}(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)} + \hat{\xi}(x + \sum_{i=1}^d \frac{Y_i}{P_i} E\hat{Z}_i(T))) &= \tilde{V} + x \hat{\xi}. \end{aligned}$$

参考文献 (References)

- [1] Cvitanic J and Karatzas I. Hedging and portfolio optimization under transaction costs [J]. Mathematics Finance, 1996, 6(2): 133-165
- [2] Shreve E and Soner H. Optimal investment and consumption with transaction costs [J]. The Annual of Applied Probability, 1994, 4(3): 609-692
- [3] Zariphopoulou T. Investment-consumption models with transaction fees and Markov-chain parameters [J]. SIAM Journal of Control and Optimization, 1992, 30(3): 613-636

(下转第 52 页)

- controllers using different fuzzy reasoning methods [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1998, 12(3): 85 - 92 (in Chinese)
- [6] Li Ning and Zhang Naiyao. Structure analysis of typical fuzzy controllers with unevenly distributed input membership functions [J]. J. of Tsinghua University (Sci. & Tech.), 2000, 40(1): 120 - 123 (in Chinese)
- [7] Li Ning and Zhang Naiyao. Analytical expression and systematic design method of typical fuzzy controllers [J]. Control and Decision, 2000, 15(1): 79 - 82 (in Chinese)
- [8] Zeng Ke, Zhang Naiyao and Xu Wenli. Structure analysis of fuzzy

controllers using pseudo-trapezoid shaped membership functions [J]. Science in China, 2000, 43(3): 263 - 274

本文作者简介

范醒哲 1976 年生, 2000 年清华大学自动化系获硕士学位, 现在美国攻读博士学位, 研究领域包括: 模糊控制理论及应用。

张乃尧 1946 年生, 1970 年清华大学电机系毕业, 现为清华大学自动化系教授, 研究领域包括: 模糊控制理论及应用, 自适应预报与控制, CIMS 应用等。 Email: zlh@mail.tsinghua.edu.cn

(上接第 46 页)

- [4] Davis M H, Panas V G and Zarphopoulou T. European option pricing with transaction costs [J]. SIAM Journal of Control and Optimization, 1993, 31(2): 470 - 493
- [5] Xu G L and Shreve S E. A duality method for optimal consumption and investment under short-selling prohibition, Part I: General market coefficients [J]. The Annual of Applied Probability, 1992, 1(1): 87 - 112
- [6] Karatzas I and Shreve S E. Brownian Motion and Stochastic Calculus [M]. New York: Springer-Verlag, 1991
- [7] Xu Shimeng. Hedging price of contingent claims and optimization of asset under transaction costs [D]. Beijing: Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, 1997 (in Chinese)
- [8] Xu Shimeng, Zhang Yu-zhong. The pricing of preferred hedging contingent claims under transaction costs [J]. Applied Mathematics

Journal of Chinese Universities, 1998, 13(4): 414 - 420 (in Chinese)

- [9] Shu Shuzhong. Convex Analysis [M]. Shanghai: Science and Technology Publication of Shanghai, 1991 (in Chinese)

本文作者简介

许世蒙 1958 年生, 副教授, 1981 年获吉林大学数学专业学士学位, 1989 年获黑龙江大学自动控制理论及应用专业硕士学位, 1997 年获中国科学院应用数学所概率统计专业博士学位, 主要研究兴趣为数理金融, 统计分析与计算, 系统辨识与自适应控制, 军事运筹与仿真模型计算。 Email: xushimeng 38 @ sohu.com

张玉忠 1962 年生, 教授, 1997 年获中国科学院应用数学所运筹学专业博士学位, 现任曲阜师范大学运筹所所长, 主要研究兴趣为运筹学理论与应用, 数理经济和数理金融, 系统工程和可持续发展问题。