

$$X^*(T) - C_0 + f(Y^*(T) - C) \geq H^* (\text{套期保值}) \quad \text{a.s.} \quad (13)$$

于是,一定有

$$X^*(T) - C_0 + f(Y^*(T) - C) = H^* \quad \text{a.s.} \quad (14)$$

若不然,当 $P^* | X^*(T) - C_0 + f(Y^*(T) - C) > H^* | > 0$, 则有 $(L, M) \in A_+$, 并套期保值 $(C_0 + X^*(T) + f(Y^*(T) - C), C_1, \dots, C_d)$, 但这与 U 的严格递增性相矛盾, 故定理得到证明.

5 折算资产优化的性质 (Properties of discount asset optimization)

取 $C_i = 0, i = 1, \dots, d$. 这时投资者终端时刻财富的效用函数为 $U[X(T) + f(Y(T))]$, 最优投资策略 $(\hat{L}, \hat{M}) \in A^+$ 为对应给定的初始资本, 使得

$$V = \sup_{(L, M) \in A^+} E[U(X(T) + f(Y(T)))] = E[U(\hat{X}(T) + f(\hat{Y}(T)))] \quad (15)$$

这里 $\hat{X}(T), \hat{Y}(T)$ 是相应于 $(\hat{L}, \hat{M})$ 的资产终端值, $A^+ \subset A$, 满足 $X(T) + f(Y(T)) \geq 0, \text{ a.s.}$

假设 1 $\tilde{U}$ 为 U 的凹对偶, $0 < \xi < \infty$, 存在一组元 $\hat{Z} \in D$, 使得下式达到最小, 亦即

$$\bar{V} = \inf_{Z \in D} E[\tilde{U}(\xi \frac{Z_0(T)}{B(T)}) + \sum_{i=1}^d \frac{Y_i}{P_i} \xi Z_i(T)] = E[\tilde{U}(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)}) + \sum_{i=1}^d \frac{Y_i}{P_i} \xi \hat{Z}_i(T)] \quad (16)$$

引理 1^[7] 在定义 6 和补充假设条件下, 对每一组元 $Z \in D$, 有

$$E[\frac{Z_0(T)}{B(T)} I(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)}) - \sum_{i=1}^d \frac{Y_i}{P_i} Z_i(T)] \leq E[\frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)} I(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)}) - \sum_{i=1}^d \frac{Y_i}{P_i} \hat{Z}_i(T)] < \infty.$$

定理 2(优化性质) 存在: $(\hat{L}, \hat{M}) \in A^+$, 使得 (15) 成立, 并满足

- i) $\hat{X}(T) + f(\hat{Y}(T)) = I(\xi \hat{Z}_0(T)/B(T))$;
- ii) $\hat{L}_i$ 在集 $\{0 \leq t \leq T/R_i(T) = 1 + \lambda\}$ 外为零, $\hat{M}_i$ 在集 $\{0 \leq t \leq T/R_i(T) = 1 - \mu\}$ 外为零;

$$\text{iii) } [\hat{X}(t) + \sum_{i=1}^d \hat{R}_i(t) \hat{Y}_i(t)]/B(t) = \hat{E}[I(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)}) | F_t].$$

证 注意到 $f(\xi) = E[\frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)} I(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)})]$ 是

严格递减的, 取 $\hat{C}_0 = I(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)})$, 可得

$$\sup_{Z \in D} E[Z_0(T) \frac{\hat{C}_0}{B(T)} - \frac{Y_i}{P_i} Z_i(T)] = E[\hat{Z}_0 \frac{\hat{C}_0}{B(T)} - \sum_{i=1}^d \frac{Y_i}{P_i} \hat{Z}_i(T)] \triangleq x. \quad (17)$$

由可允许策略的性质有

$$\hat{X}(T) + \sum_{i=1}^d \hat{R}_i(T) \hat{Y}_i(T) \geq \hat{C}_0.$$

于是

$$\hat{X}(T) + f(\hat{X}(T)) \geq \hat{C}_0,$$

以及 $[\hat{X}(\cdot) + \sum_{i=1}^d \hat{R}_i(\cdot) \hat{Y}_i(\cdot)]/B(\cdot)$ 是一个 P_0 -上鞅, 可得

$$\hat{X}(T) + \sum_{i=1}^d \hat{R}_i(T) \hat{Y}_i(T) = \hat{C}_0.$$

即也得出 iii) 成立, 由

$$\inf_{\substack{1-\mu \leq \hat{R}_i \leq 1+\lambda \\ i=1,2,\dots,d}} (\hat{X}(T) + \sum_{i=1}^d \hat{R}_i(T) \hat{Y}_i(T)) = \hat{C}_0,$$

可得

$$\hat{X}(T) + f(\hat{Y}(T)) = \hat{C}_0.$$

亦即 $\hat{R}_i(T) = 1 - \mu$, 当 $\{Y_i(T) > 0\}$; $\hat{R}_i(T) = 1 + \lambda$, 当 $\{Y_i(T) \leq 0\}$, 于是可知 ii) 成立.

最后, 对 $(\hat{L}, \hat{M}) \in A^+$, 可有

$$EU(\hat{X}(t) + f(\hat{Y}(T))) = V + x \hat{\xi},$$

再注意到, 对任何 $(L, M) \in A^+$,

$$\tilde{U}(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)} + \xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)} [X(T) + f(Y(T))]) \geq U(X(T) + f(Y(T))).$$

这样便得

$$\begin{aligned} E[UX(T) + f(Y(T))] &\leq \\ E\tilde{U}(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)} + \xi E_0[\hat{X}(T) + \sum_{i=1}^d \hat{R}_i(T) Y_i(T)]/B(T)) &\leq \\ E\tilde{U}(\xi \frac{\hat{Z}_0(T)}{B(T)} + \xi(x + \sum_{i=1}^d \frac{Y_i}{P_i} E\hat{Z}_i(T))) &= \bar{V} + x \hat{\xi}. \end{aligned}$$

参考文献 (References)

- [1] Cvitanic J and Karatzas I. Hedging and portfolio optimization under transaction costs [J]. Mathematics Finance, 1996, 6(2): 133-165
- [2] Shreve E and Soner H. Optimal investment and consumption with transaction costs [J]. The Annual of Applied Probability, 1994, 4(3): 609-692
- [3] Zariphopoulou T. Investment-consumption models with transaction fees and Markov-chain parameters [J]. SIAM Journal of Control and Optimization, 1992, 30(3): 613-636

(下转第 52 页)

采用非线性规则和不均匀分布的输入输出隶属函数时
典型模糊控制器的结构分析*

范醒哲 张乃尧

(清华大学自动化系·北京, 100084)

摘要: 针对两输入($e, \Delta e$)—输出(Δu)的典型模糊控制器, 其输入变量采用三角形、全交迭、对称、不均匀分布的隶属函数, 输出变量采用对称、不均匀分布的单点隶属函数, 当采用非线性控制规则和 Sum-Product 推理方法时, 推导了输出的解析表达式, 分析了其结构特性和极限特性, 证明了此类模糊控制器具有通用逼近性, 并讨论了典型模糊控制系统的局部稳定性。

关键词: 模糊控制; 结构分析; 通用逼近性; 稳定性

文献标识码: A

Structure Analysis of Typical Fuzzy Controllers
with Nonlinear Rules and Unevenly Distributed Membership Functions
for Input and Output Variables

FAN Xingzhe and ZHANG Naiyao

(Department of Automation, Tsinghua University · Beijing, 100084, P. R. China)

Abstract: A class of typical fuzzy controllers with two inputs and one output is defined in terms of nonlinear control rules, unevenly distributed input and output membership functions, Sum-Product reasoning method, and weighted mean method for de-fuzzification. It is proved that the output of the controller is a combination of a global two-dimensional multilevel relay and a local nonlinear controller. On this basis, the structure characteristics and limit characteristics of the typical fuzzy controllers are studied, the universal approximation capability of the typical fuzzy controllers is constructively proved. Finally, the local stability of typical fuzzy control systems is also discussed.

Key words: fuzzy control; structure analysis; universal approximation; stability

1989 年美国伯明翰 Kemp-Carraway 心脏研究所的 Ying, Siler 和阿拉巴马大学的 Buckley 开始采用解析分析的方法研究模糊控制的本质^[1,2]。Ying 在 1993 年证明了^[3], 对于两输入($e, \Delta e$)—输出(Δu)的典型模糊控制器, 当输入隶属函数为三角形、全交迭、均匀分布, 输出隶属函数为均匀分布的单点, 采用线性控制规则和 Sum-Min 推理方法时, 其结构是全局性的二维多值继电器与局部的非线性 PI 控制器的和; 当控制规则无穷多时, 局部控制将消失, 而全局控制将成为线性 PI 控制器。

我们从 1996 年开始这方面的研究, 文[4]用统一的形式系统地总结了典型模糊控制器结构分析方面的主要研究成果; 文[5]对采用四种不同推理方法

的典型模糊控制器推导了其解析表达式, 证明采用 Sum-Product 推理方法时典型模糊控制器的解析表达式最简洁; 沿着这个方向, 文[6]对输入隶属函数为三角形、全交迭、对称、不均匀分布的典型模糊控制器推导了其解析表达式; 在以上研究成果的基础上, 文[7]提出了一种典型模糊控制器的系统化设计方法; 文[8]讨论了输入隶属函数为伪梯形时的情况, 本文继续这一研究方向, 在输入变量采用三角形、全交迭、对称、不均匀分布的隶属函数, 输出变量采用对称、不均匀分布的单点隶属函数, 并且采用非线性控制规则的更一般的情形下, 推导了典型模糊控制器的解析表达式, 分析了其结构特性和极限特性, 并证明了此类模糊控制器具有通用逼近性。

* 基金项目: 国家自然科学基金(60174015)和清华大学基础研究基金资助项目。

收稿日期: 2000-06-02; 收修改稿日期: 2001-02-27。

1 本文讨论的典型模糊控制器的定义(Definition of typical fuzzy controllers discussed)

考虑单输入单输出的被控对象 P , 设输入为 u_i , 输出为 y_i , 控制系统的参考输入为 s_i ; 模糊控制器 FC 的输入为误差 e_i 及误差的差分 r_i (即 Δe_i), 输出为 Δu_i ; t 为离散时间变量, 采样周期为 T . 引入比例因子 G_e, G_r, G_u , 使模糊控制器的输入输出变量归一化, 即:

$$\begin{cases} e_t = s_t - y_t, & e^* = G_e \cdot e_t, \\ r_t \equiv \Delta e_t = e_t - e_{t-1}, & r^* = G_r \cdot r_t, \\ u_t = u_{t-1} + \Delta u_t, & \Delta u_t = G_u \cdot \Delta u^*. \end{cases} \quad (1)$$

其中, $e^*, r^*, \Delta u^* \in [-1, 1]$. 典型模糊控制系统结构如图 1 所示, 图中 z^{-1} 为滞后算子, 即 $z^{-1}(e_t) = e_{t-1}$.

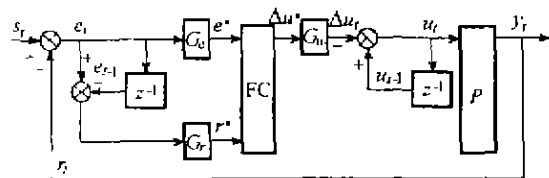


图 1 典型模糊控制系统结构框图

Fig 1 Block diagram of typical fuzzy control systems

对于本文所研究的典型模糊控制器, 其设计参数规定如下:

1) 输入变量 e^*, r^* 均采用三角形、全交迭、对称、不均匀分布的隶属函数, 如图 2(a), (b) 所示. 输出变量 Δu^* 采用对称、不均匀分布的单点隶属函数, 如图 3 所示.

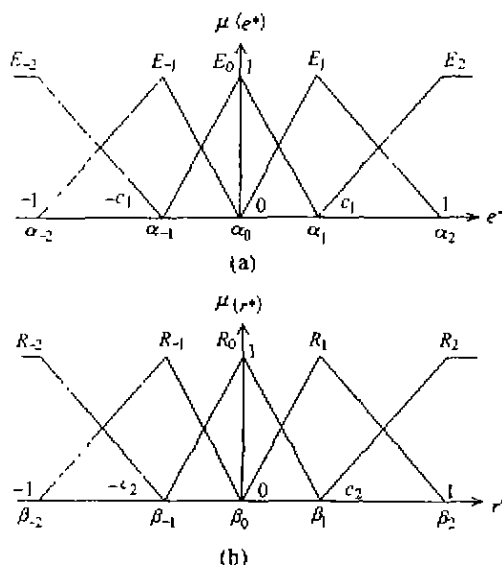


图 2 三角形、全交迭、对称、不均匀分布的输入隶属函数

Fig 2 Triangular, full-overlapped, symmetric, unevenly distributed membership functions for input variables, $J=2$

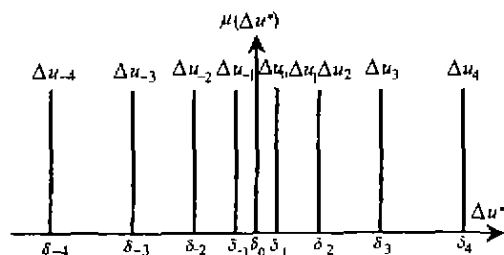


图 3 对称、不均匀分布的单点输出隶属函数

Fig. 3 Symmetric, unevenly distributed, singleton membership functions for output variable, $K=4$

设输入变量 e^*, r^* 各取 $2J+1 \geq 3$ 个模糊集, 其中 J 个为正, J 个为负, 一个为零, 分别用 E_i 和 R_j 表示, $i, j = -J, -J+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, J-1, J$. 设输出变量 Δu^* 取 $4J+1$ 个模糊集, 用 ΔU_k 代表, $k = -2J, -2J+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, 2J-1, 2J, \Delta U_k$ 的横坐标值为 $\delta_k \in [-1, 1]$, 且 $\delta_{k_1} \leq \delta_{k_2}, k_1 < k_2$.

2) 采用具有一般性的非线性模糊控制规则. 由于两个输入各有 $2J+1$ 个模糊集, 所以共有 $(2J+1)^2$ 条模糊控制规则, 其一般形式为:

$$\text{If } e^* \text{ is } E_i \text{ and } r^* \text{ is } R_j, \text{ Then } \Delta u^* = \delta_k. \quad (2)$$

非线性模糊控制规则是指 i, j, k 之间有如下关系:

$$k = f(i, j), \quad -2J \leq f(i, j) \leq 2J. \quad (3)$$

3) 采用 Sum-Product 模糊推理方法, 其中算子的定义如下:

- Sum(有界和): $x \oplus y = \min\{1, x + y\}$;
- Product(积): $x \cdot y = xy$.

4) 清晰化采用重心法, 由于输出隶属函数为单点, 故可简化为加权平均法:

$$\Delta u^* = \frac{\sum_{i,j=-J}^J w(i,j) \cdot \delta_k}{\sum_{i,j=-J}^J w(i,j)}. \quad (4)$$

其中, $w(i, j) = \mu_i(e^*) \cdot \mu_j(r^*)$ 是规则的激活度.

2 典型模糊控制器的结构分析 (Structure analysis of typical fuzzy controllers)

定理 1 对于上节定义的典型模糊控制器, 其解析结构为全局二维多值继电器 $\Phi_G(i, j)$ 与局部非线性控制器 $\Phi_L(i, j)$ 之和, 即:

$$\Delta u^* = \Phi_G(i, j) + \Phi_L(i, j), \quad (5)$$

$$\Phi_G(i, j) = 0.25(\delta_{f(i,j)} + \delta_{f(i,j+1)} + \delta_{f(i+1,j)} + \delta_{f(i+1,j+1)}),$$

$$\Phi_L(i, j) = \frac{0.5}{\Delta \alpha_i} (\delta_{f(i,j)} - \delta_{f(i+1,j)} + \delta_{f(i,j+1)} - \delta_{f(i+1,j+1)}) L_{\alpha_i} +$$

$$\frac{0.5}{\Delta \beta_j} (\delta_{f(i,j)} + \delta_{f(i+1,j)} - \delta_{f(i,j+1)} - \delta_{f(i+1,j+1)}) L_{\beta_j} -$$

$$0.25(\delta_{f(i,j)} - \delta_{f(i+1,j)} - \delta_{f(i,j+1)} + \delta_{f(i+1,j+1)})l_{\alpha_i}l_{\beta_j}.$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_i &= \alpha_{i+1} - \alpha_i, \Delta\beta_j = \beta_{j+1} - \beta_j, \\ \alpha_{i\perp} &= \alpha_i + 0.5\Delta\alpha_i, \beta_{j\perp} = \beta_j + 0.5\Delta\beta_j, \\ l_{\alpha_i} &= \alpha_{i\perp} - e^*, l_{\beta_j} = \beta_{j\perp} - r^*.\end{aligned}$$

证 设 $\alpha_i \leq e^* \leq \alpha_{i+1}, \beta_j \leq r^* \leq \beta_{j+1}, -J \leq i, j \leq J-1$, 则 e^* 对模糊集 E_i 和 E_{i+1} , r^* 对模糊集 R_j 和 R_{j+1} 的隶属度分别为

$$\begin{cases} \mu_{i+1}(e^*) = \frac{e^* - \alpha_i}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}, \mu_i(e^*) = \frac{\alpha_{i+1} - e^*}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}, \\ \mu_{j+1}(r^*) = \frac{r^* - \beta_j}{\beta_{j+1} - \beta_j}, \mu_j(r^*) = \frac{\beta_{j+1} - r^*}{\beta_{j+1} - \beta_j}. \end{cases} \quad (6)$$

而 e^*, r^* 对其它模糊集的隶属度都为 0. 所以此时输入 e^* 和 r^* 只激活以下四条控制规则:

- r_1 : If $e^* = E_{i+1}$ and $r^* = R_{j+1}$, then $\Delta u^* = \delta_{f(i+1,j+1)}$;
 r_2 : If $e^* = E_{i+1}$ and $r^* = R_j$, then $\Delta u^* = \delta_{f(i+1,j)}$;
 r_3 : If $e^* = E_i$ and $r^* = R_{j+1}$, then $\Delta u^* = \delta_{f(i,j+1)}$;
 r_4 : If $e^* = E_i$ and $r^* = R_j$, then $\Delta u^* = \delta_{f(i,j)}$.

$$\begin{aligned}& \ominus \frac{e^* - \alpha_i}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \frac{r^* - \beta_j}{\beta_{j+1} - \beta_j} + \frac{e^* - \alpha_i}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \frac{\beta_{j+1} - r^*}{\beta_{j+1} - \beta_j} + \\ & \frac{\alpha_{i+1} - e^*}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \frac{r^* - \beta_j}{\beta_{j+1} - \beta_j} + \frac{\alpha_{i+1} - e^*}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \frac{\beta_{j+1} - r^*}{\beta_{j+1} - \beta_j} \leq 1,\end{aligned} \quad (7)$$

因此,有界和可用普通和代替.由于输入隶属函数是全交叠的,有:

$$\mu_i(e^*) + \mu_{i+1}(e^*) = 1, \mu_j(r^*) + \mu_{j+1}(r^*) = 1. \quad (8)$$

因此 Δu^* 的分母部分

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=-J}^J w(i,j) &= \sum_{i,j=-J}^J \mu_i(e^*) \cdot \mu_j(r^*) = \\ (\mu_i(e^*) + \mu_{i+1}(e^*))(\mu_j(r^*) + \mu_{j+1}(r^*)) &= 1.\end{aligned} \quad (9)$$

Δu^* 的表达式可简化为:

$$\begin{aligned}\Delta u^* &= \sum_{i,j=-J}^J w(i,j) \cdot \delta_{f(i,j)} = \\ \frac{1}{\Delta\alpha_i\Delta\beta_j} &[(e^* - \alpha_i)(r^* - \beta_j)\delta_{f(i+1,j+1)} + (e^* - \alpha_i)(\beta_{j+1} - r^*)\delta_{f(i+1,j)} + (\alpha_{i+1} - e^*)(r^* - \beta_j)\delta_{f(i,j+1)} + (\alpha_{i+1} - e^*)(\beta_{j+1} - r^*)\delta_{f(i,j)}].\end{aligned} \quad (10)$$

记:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_i &= \alpha_{i+1} - \alpha_i, \Delta\beta_j = \beta_{j+1} - \beta_j, \\ \alpha_{i\perp} &= \alpha_i + 0.5\Delta\alpha_i, \beta_{j\perp} = \beta_j + 0.5\Delta\beta_j, \\ l_{\alpha_i} &= \alpha_{i\perp} - e^*, l_{\beta_j} = \beta_{j\perp} - r^*, \\ \Delta u^* &= \\ \frac{1}{\Delta\alpha_i\Delta\beta_j} &[(l_{\alpha_i} - 0.5\Delta\alpha_i)(l_{\beta_j} - 0.5\Delta\beta_j)\delta_{f(i+1,j+1)} - \\ (l_{\alpha_i} - 0.5\Delta\alpha_i)(l_{\beta_j} + 0.5\Delta\beta_j)\delta_{f(i+1,j)} - \\ (l_{\alpha_i} + 0.5\Delta\alpha_i)(l_{\beta_j} - 0.5\Delta\beta_j)\delta_{f(i,j+1)} + \\ (l_{\alpha_i} + 0.5\Delta\alpha_i)(l_{\beta_j} + 0.5\Delta\beta_j)\delta_{f(i,j)}] &= \\ 0.25(\delta_{f(i,j)} + \delta_{f(i,j+1)} + \delta_{f(i+1,j)} + \delta_{f(i+1,j+1)}) &+ \\ \frac{1}{\Delta\alpha_i\Delta\beta_j}(\delta_{f(i,j)} - \delta_{f(i,j+1)} - \delta_{f(i+1,j)} + \\ \delta_{f(i+1,j+1)})l_{\alpha_i}l_{\beta_j} &+ \frac{0.5}{\Delta\alpha_i}(\delta_{f(i,j)} - \delta_{f(i+1,j)} + \\ \delta_{f(i,j+1)} - \delta_{f(i+1,j+1)})l_{\alpha_i} &+ \frac{0.5}{\Delta\beta_j}(\delta_{f(i,j)} + \\ \delta_{f(i+1,j)} - \delta_{f(i,j+1)} - \delta_{f(i+1,j+1)})l_{\beta_j}.\end{aligned} \quad (11)$$

整理后即可得到定理 1 的表达式.

注释 1 由 5 式可以看出, $\Phi_G(i,j)$ 只取决于 $\delta_{f(i,j)}$ 而与输入状态 (e^*, r^*) 无关,其作用是全局性的,故称为全局的二维多值继电器.而 $\Phi_L(i,j)$ 则取决于输入状态 (e^*, r^*) 与其所在区域中心 $[(\alpha_i + 0.5\Delta\alpha_i), (\beta_j + 0.5\Delta\beta_j)]$ 的相对位置,其作用是局部性的,故称为局部非线性控制器.

定理 2 对于上节定义的典型模糊控制器,当 $J \rightarrow \infty$ 时,若 $\forall J \geq i, j \geq -J$ 都有 $|\delta_{f(i,j)} - \delta_{f(i,j+1)}| \rightarrow 0$ 和 $|\delta_{f(i+1,j)} - \delta_{f(i,j)}| \rightarrow 0$, 则 $\lim_{J \rightarrow \infty} \Phi_L(i,j) = 0$.

推论 1 对于上节定义的典型模糊控制器,若改用线性控制规则,则一定有 $\lim_{J \rightarrow \infty} \Phi_L(i,j) = 0$.

3 典型模糊控制器的通用逼近性(Universal approximation of typical fuzzy controllers)

定理 3 对于上节定义的典型模糊控制器,当 $J \rightarrow \infty$ 时, Δu^* 可以以任意精度一致逼近 $[-1, 1]^2$ 上的任意连续实函数 $-1 \leq g(x, y) \leq 1$.

证 任意连续实函数 $g(x, y) \in C[-1, 1]^2$, 必有一致连续性,因而 $\forall (x_0, y_0) \in [-1, 1]^2$ 和 $\epsilon > 0$, $\exists \Delta x > 0, \Delta y > 0$, 使得 $|g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - g(x_0, y_0)| < \epsilon$.

令

$$M = \left\lceil \frac{2}{\min(\Delta x, \Delta y)} \right\rceil + 1, \quad g_{i,j} = g\left(\frac{i}{M}, \frac{j}{M}\right), \quad (12)$$

则 $\forall i, j = -M, -M+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, M-1, M$, 有以下两式成立:

$$|g_{i+1,j} - g_{i,j}| = \left| g\left(\frac{i+1}{M}, \frac{j}{M}\right) - g\left(\frac{i}{M}, \frac{j}{M}\right) \right| < \varepsilon,$$

$$|g_{i,j+1} - g_{i,j}| = \left| g\left(\frac{i}{M}, \frac{j+1}{M}\right) - g\left(\frac{i}{M}, \frac{j}{M}\right) \right| < \varepsilon.$$

令 $\delta_{f(i,j)} = g_{i,j}, i, j = -M, -M+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, M-1, M$,

$$|\Phi_L(i, j)| =$$

$$\left| \frac{0.5}{\Delta\alpha_i} (\delta_{f(i,j)} - \delta_{f(i+1,j)} + \delta_{f(i,j+1)} - \delta_{f(i+1,j+1)}) l_{\alpha_i} + \right.$$

$$\left. \frac{0.5}{\Delta\beta_j} (\delta_{f(i,j)} + \delta_{f(i+1,j)} - \delta_{f(i,j+1)} - \delta_{f(i+1,j+1)}) l_{\beta_j} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{\Delta\alpha_i \Delta\beta_j} (\delta_{f(i,j)} - \delta_{f(i,j+1)} - \delta_{f(i+1,j)} + \delta_{f(i+1,j+1)}) l_{\alpha_i} l_{\beta_j} \right| \leq$$

$$|0.25(\delta_{f(i,j)} + \delta_{f(i,j+1)} - \delta_{f(i+1,j)} - \delta_{f(i+1,j+1)})| +$$

$$|0.25(\delta_{f(i,j)} + \delta_{f(i+1,j)} - \delta_{f(i,j+1)} - \delta_{f(i+1,j+1)})| +$$

$$|0.25(\delta_{f(i,j)} - \delta_{f(i,j+1)} - \delta_{f(i+1,j)} + \delta_{f(i+1,j+1)})| \leq$$

$$0.25(\varepsilon + \varepsilon) + 0.25(\varepsilon + \varepsilon) + 0.25(\varepsilon + \varepsilon) = 1.5\varepsilon, \quad (13)$$

$$|\Phi_C(i, j) - g(x, y)| =$$

$$|0.25(\delta_{f(i,j)} + \delta_{f(i,j+1)} + \delta_{f(i+1,j)} + \delta_{f(i+1,j+1)}) - g(x, y)| =$$

$$|0.25(g_{i,j} + g_{i,j+1} + g_{i+1,j} + g_{i+1,j+1}) - g(x, y)| \leq \varepsilon, \quad (14)$$

$$|\Delta u^* - g(x, y)| =$$

$$|\Phi_C(i, j) + \Phi_L(i, j) - g(x, y)| \leq$$

$$|\Phi_C(i, j) - g(x, y)| + |\Phi_L(i, j)| \leq \varepsilon + 1.5\varepsilon = 2.5\varepsilon. \quad (15)$$

推论 2 对于上节定义的典型模糊控制器,若改用线性控制规则,则有:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta u^* = g^{\infty}(f_{\alpha}^{\infty-1}(e^*) + f_{\beta}^{\infty-1}(r^*)).$$

其中 $f_{\alpha}^{\infty-1}(\cdot)$ 和 $f_{\beta}^{\infty-1}(\cdot)$ 由输入变量模糊集的分布来决定, $g^{\infty}(\cdot)$ 由输出变量模糊集的分布来决定.

证 由推论 1 知 $\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_L(i, j) = 0$.

设输入变量 e^* 和 r^* 各取 $N = 2J + 1 \geq 3$ 个模糊子集, 分别用 E_i (其模糊集的中心为 α_i) 和 R_j (其模糊集的中心为 β_j) 代表, $(i, j = -J, -J+1, \dots, 0, \dots, J-1, J)$. 定义离散函数 $f_{\alpha}(x)$ 和 $f_{\beta}(x)$, 其定义域为集合

$$\left\{ -1, \frac{-J+1}{J}, \dots, \frac{-k}{J}, \dots, \frac{-1}{J}, 0, \frac{1}{J}, \dots, \frac{k}{J}, \dots, \frac{J-1}{J}, 1 \right\},$$

函数对应关系分别如表 1 和表 2 所示.

表 1 离散函数 $f_{\alpha}(x)$ 的定义

Table 1 Definition of $f_{\alpha}(x)$

x	-1	$\dots$	$\frac{-i}{J}$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{i}{J}$	$\dots$	1
$f_{\alpha}(x)$	α_{-J}	$\dots$	α_{-i}	$\dots$	α_0	$\dots$	α_i	$\dots$	α_J

表 2 离散函数 $f_{\beta}(x)$ 的定义

Table 1 Definition of $f_{\beta}(x)$

x	-1	$\dots$	$\frac{-j}{J}$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{j}{J}$	$\dots$	1
$f_{\beta}(x)$	β_{-J}	$\dots$	β_{-i}	$\dots$	β_0	$\dots$	β_i	$\dots$	β_J

对输出变量 Δu^* 定义 $2N - 1 = 4J + 1 \geq 5$ 个模糊集 (为了满足线性控制规则), 用 ΔU_k 代表 ($k = -2J, -2J+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, 2J-1, 2, J$), ΔU_k 的中心为 δ_k . 定义离散函数 $g(x)$, 定义域为集合

$$\left\{ -2, \frac{2(-N+2)}{N-1}, \dots, \frac{2 \times (-k)}{N-1}, \dots, \frac{2 \times (-1)}{N-1}, 0, \frac{2 \times 1}{N-1}, \dots, \frac{2 \times k}{N-1}, \dots, \frac{2(N-2)}{N-1}, 2 \right\}.$$

函数对应关系如表 3 所示.

表 3 离散函数 $g(x)$ 的定义

Table 3 Definition of $g(x)$

x	-2	$\dots$	$\frac{2 \times (-k)}{N-1}$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{2 \times k}{N-1}$	$\dots$	2
$g(x)$	δ_{-N+1}	$\dots$	δ_{-k}	$\dots$	δ_0	$\dots$	δ_k	$\dots$	δ_{N-1}

当 $N \rightarrow \infty$ 时, $f_{\alpha}(x)$ 和 $f_{\beta}(x)$ 及 $g(x)$ 趋向于连续函数, 其定义域也分别趋向于连续区间 $[-1, 1]$ 或 $[-2, 2]$, 记 $N \rightarrow \infty$ 时的 $f_{\alpha}(x)$, $f_{\beta}(x)$ 和 $g(x)$ 分别为 $f_{\alpha}^{\infty}(x)$, $f_{\beta}^{\infty}(x)$ 和 $g^{\infty}(x)$.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 0.25(\delta_{f(i,j)} + \delta_{f(i,j+1)} + \delta_{f(i+1,j)} + \delta_{f(i+1,j+1)}) =$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 0.25(\delta_{i+j} + 2\delta_{i+j+1} + \delta_{i+j+2}) =$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\delta_{i+j+1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} g\left(\frac{2(i+j+1)}{N-1}\right) =$$

$$g^{\infty}\left(\frac{2(i+j+1)}{N-1}\right) = g^{\infty}\left(\frac{i}{J} + \frac{j+1}{J}\right).$$

$$\Theta \alpha_i \leq e^* \leq \alpha_{i+1}, \beta_j \leq r^* \leq \beta_{j+1},$$

$$f_{\alpha}\left(\frac{i}{J}\right) \leq e^* \leq f_{\alpha}\left(\frac{i+1}{J}\right), f_{\beta}\left(\frac{j}{J}\right) \leq r^* \leq f_{\beta}\left(\frac{j+1}{J}\right),$$

$$\frac{i}{J} \leq f_{\alpha}^{-1}(e^*) \leq \frac{i+1}{J}, \frac{j}{J} \leq f_{\beta}^{-1}(r^*) \leq \frac{j+1}{J},$$

所以

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta u^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_G(i, j) =$$

$$0.25(\delta_{f(i,j)} + \delta_{f(i,j+1)} + \delta_{f(i+1,j)} + \delta_{f(i+1,j+1)}) =$$

$$g^{\infty}\left(\frac{i}{J} + \frac{j+1}{J}\right) = g^{\infty}(f_a^{-1}(e^*) + f_b^{-1}(r^*)).$$

4 典型模糊控制系统的局部稳定性(Local stability of typical fuzzy control systems)

定理 4 对于图 1 所示的典型模糊控制系统, 在 $J \rightarrow \infty$ 时, 若 $\forall J \geq i, j \geq -J$ 都有 $|\delta_{f(i,j)} - \delta_{f(i,j+1)}| \rightarrow 0$ 和 $|\delta_{f(i+1,j)} - \delta_{f(i,j)}| \rightarrow 0$, 则本文定义的典型模糊控制器和线性 PI 控制器 $\frac{\partial g^{\infty}(x,y)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} e^* + \frac{\partial g^{\infty}(x,y)}{\partial y} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} r^*$ 在平衡点 $(e^* = r^* = 0)$ 附近具有相同的局部稳定性, 其中 $g^{\infty}(\cdot)$ 由输入、输出变量模糊集的分布来决定.

证 由推论 1 知, $\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_L(i, j) = 0$.

定义函数 $g(x, y) \in C[-1, 1]^2$, $g(x, y) = \delta_{f(i,j)}$, $x \in [a_i, a_{i+1}]$, $y \in [\beta_j, \beta_{j+1}]$.

由于在 $J \rightarrow \infty$ 时, $\forall J \geq i, j \geq -J$ 都有 $|\delta_{f(i,j)} - \delta_{f(i,j+1)}| \rightarrow 0$ 和 $|\delta_{f(i+1,j)} - \delta_{f(i,j)}| \rightarrow 0$, 所以 $g(x, y)$ 趋向于连续函数 $g^{\infty}(x, y)$, 因此有:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta u^* =$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} 0.25(\delta_{f(i,j)} + \delta_{f(i,j+1)} + \delta_{f(i+1,j)} + \delta_{f(i+1,j+1)}) =$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\delta_{f(i,j)}) = g^{\infty}(x, y).$$

$\Theta a_i \leq e^* \leq a_{i+1}$, $\beta_j \leq r^* \leq \beta_{j+1}$, 所以 $J \rightarrow \infty$ 时, 在平衡点 $(e^* = r^* = 0)$ 附近: $x \approx e^* \approx 0$, $y \approx r^* \approx 0$, 忽略高阶无穷小量得:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta u^* \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = g^{\infty}(x, y) \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} =$$

$$\frac{\partial g^{\infty}(x, y)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} x + \frac{\partial g^{\infty}(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} y \approx$$

$$\frac{\partial g^{\infty}(x, y)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} e^* + \frac{\partial g^{\infty}(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} r^*.$$

推论 3 对于图 1 所示的典型模糊控制系统, 改用线性控制规则的典型模糊控制器和线性 PI 控制器 $\delta_1\left(\frac{1}{\Delta\alpha_0}e^* + \frac{1}{\Delta\beta_0}r^*\right)$ 在平衡点 $(e^* = r^* = 0)$ 附近具有相同的局部稳定性.

证 在平衡点 $(e^* = r^* = 0)$ 附近有四个区域:

- i) $e^* > 0$ 且 $r^* > 0$, 对应 $i = j = 0$;
- ii) $e^* > 0$ 且 $r^* < 0$, 对应 $i = 0, j = -1$;
- iii) $e^* < 0$ 且 $r^* > 0$, 对应 $i = -1, j = 0$;
- iv) $e^* < 0$ 且 $r^* < 0$, 对应 $i = j = -1$.

当 $i = j = 0$ 时,

$$\Delta u^* \cong \frac{\beta_1 \delta_1}{\Delta\alpha_0 \Delta\beta_0} e^* + \frac{\alpha_1 \beta_1}{\Delta\alpha_0 \Delta\beta_0} r^* =$$

$$\delta_1\left(\frac{1}{\Delta\alpha_0} e^* + \frac{1}{\Delta\beta_0} r^*\right),$$

当 $i = 0, j = -1$ 时,

$$\Delta u^* \cong \frac{\beta_{-1} \delta_1}{\Delta\alpha_0 \Delta\beta_{-1}} e^* + \frac{-\alpha_{-1} \delta_1}{\Delta\alpha_0 \Delta\beta_{-1}} r^* =$$

$$\delta_1\left(\frac{1}{\Delta\alpha_0} e^* + \frac{1}{\Delta\beta_0} r^*\right),$$

当 $i = -1, j = 0$ 时,

$$\Delta u^* \cong \frac{-\beta_1 \delta_{-1}}{\Delta\alpha_{-1} \Delta\beta_0} e^* + \frac{-\alpha_{-1} \delta_{-1}}{\Delta\alpha_{-1} \Delta\beta_0} r^* =$$

$$\delta_1\left(\frac{1}{\Delta\alpha_0} e^* + \frac{1}{\Delta\beta_0} r^*\right),$$

当 $i = j = -1$ 时,

$$\Delta u^* \cong \frac{\beta_{-1} \delta_{-1}}{\Delta\alpha_{-1} \Delta\beta_{-1}} e^* + \frac{-\alpha_{-1} \delta_{-1}}{\Delta\alpha_{-1} \Delta\beta_{-1}} r^* =$$

$$\delta_1\left(\frac{1}{\Delta\alpha_0} e^* + \frac{1}{\Delta\beta_0} r^*\right).$$

因此, 根据李雅普诺夫稳定性的线性化定理, 在平衡点 $e^* = r^* = 0$ 附近, 典型模糊控制系统渐进稳定的充要条件是线性 PI 控制系统渐进稳定.

5 结论(Conclusion)

本文对采用非线性控制规则, 三角形、全交迭、对称、不均匀分布的输入隶属函数, 对称、不均匀分布的单点输出隶属函数, Sum-Product 推理方法和加权平均法解模糊的典型模糊控制器, 推导了其解析表达式, 讨论了其结构特性与极限特性, 证明了此类典型模糊控制器具有通用逼近性, 分析了典型模糊控制系统的局部稳定性. 这些研究成果进一步揭示了模糊控制内在的非线性特性及其与传统 PID 控制的关系.

参考文献(References)

- [1] Siler W and Ying H. Fuzzy control theory; The linear case [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33: 275 - 290
- [2] Ying H, Siler W and Buckley J J. Fuzzy control theory: A nonlinear case [J]. Automatica, 1990, 26(3): 513 - 520
- [3] Ying H. A nonlinear fuzzy controller with linear control rules is the sum of a global two-dimensional multilevel relay and a local nonlinear proportional-integral controller [J]. Automatica, 1993, 29(2): 499 - 505
- [4] Zhang Naiyao. Structure analysis of typical fuzzy controllers [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1997, 11(2): 10 - 21 (in Chinese)
- [5] Li Ning and Zhang Naiyao. Structure analysis of typical fuzzy con-

- controllers using different fuzzy reasoning methods [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1998, 12(3): 85-92 (in Chinese)
- [6] Li Ning and Zhang Naiyao. Structure analysis of typical fuzzy controllers with unevenly distributed input membership functions [J]. J of Tsinghua University (Sci. & Tech.), 2000, 40(1): 120-123 (in Chinese)
- [7] Li Ning and Zhang Naiyao. Analytical expression and systematic design method of typical fuzzy controllers [J]. Control and Decision, 2000, 15(1): 79-82 (in Chinese)
- [8] Zeng Ke, Zhang Naiyao and Xu Wenli. Structure analysis of fuzzy

controllers using pseudo-trapezoid shaped membership functions [J]. Science in China, 2000, 43(3): 263-274

本文作者简介

范醒哲 1976 年生, 2000 年清华大学自动化系获硕士学位, 现在美国攻读博士学位, 研究领域包括: 模糊控制理论及应用。

张乃尧 1946 年生, 1970 年清华大学电机系毕业, 现为清华大学自动化系教授, 研究领域包括: 模糊控制理论及应用, 自适应预报与控制, CIMS 应用等。 Email: znh@mails.tsinghua.edu.cn

(上接第 46 页)

- [4] Davis M H, Panas V G and Zarphopoulou T. European option pricing with transaction costs [J]. SIAM Journal of Control and Optimization, 1993, 31(2): 470-493
- [5] Xu G L and Shreve S E. A duality method for optimal consumption and investment under short-selling prohibition. Part I: General market coefficients [J]. The Annals of Applied Probability, 1992, 1(1): 87-112
- [6] Karatzas I and Shreve S E. Brownian Motion and Stochastic Calculus [M]. New York: Springer-Verlag, 1991
- [7] Xu Shimeng. Hedging price of contingent claims and optimization of asset under transaction costs [D]. Beijing: Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, 1997 (in Chinese)
- [8] Xu Shimeng, Zhang Yu-zhong. The pricing of preferred hedging contingent claims under transaction costs [J]. Applied Mathematics

Journal of Chinese Universities, 1998, 13(4): 414-420 (in Chinese)

- [9] Shu Shuzhong. Convex Analysis [M]. Shanghai: Science and Technology Publication of Shanghai, 1991 (in Chinese)

本文作者简介

许世蒙 1958 年生, 副教授, 1981 年获吉林大学数学专业学士学位, 1989 年获黑龙江大学自动控制理论及应用专业硕士学位, 1997 年获中国科学院应用数学所概率统计专业博士学位, 主要研究兴趣为数理金融, 统计分析与计算, 系统辨识与自适应控制, 军事运筹与仿真模型计算。 Email: xushimeng 38 @ sohu.com

张玉忠 1962 年生, 教授, 1997 年获中国科学院应用数学所运筹学专业博士学位, 现任曲阜师范大学运筹所所长, 主要研究兴趣为运筹学理论与应用, 数理经济和数理金融, 系统工程和可持续发展问题。