

降阶正实控制器设计*

曾建平^{1,2} 程 鹏²

(1. 华北工学院自动控制系统·太原, 030051; 2. 北京航空航天大学自动控制系统·北京, 100083)

摘要: 基于线性矩阵不等式(LMI)方法, 考虑了连续和离散对象的降阶正实控制器设计问题. 通过一阶对象的分析表明, 广义对象阶是最小阶正实控制器阶的可达上界, 因此降阶正实控制器的存在性依赖于具体对象参数. 给出了一个新的降阶正实控制器阶的上界, 该上界蕴涵了已有结果. 上界的估计是构造性的, 可以给出这种降阶正实控制器的设计算法. 文中给出了简单的算例, 说明本文方法的可行性.

关键词: 正实控制; 降阶控制器; LMI; 连续系统; 离散系统

文献标识码: A

An Approach to the Design of Positive Real Reduced-Order Controllers

ZENG Jianping^{1,2} and CHENG Peng²

(1. Department of Automatic Control, North China Institute of Technology · Taiyuan, 030051, P. R. China;

2. Department of Automatic Control, Beijing University of Aeronautics & Astronautics · Beijing, 100083, P. R. China)

Abstract: The problem to design reduced-order positive real (PR) controller with order not greater than that of generalized plants is studied based on LMI for both continuous and discrete time plants. By analyzing the problem for first order plants, it is illustrated that generalized plant order is an achievable upper bound of PR controllers with minimal order for general PR control problem. Hence, the existence of reduced-order PR controllers depends on special plants structure parameters. Moreover, a new upper bound of order for reduced-order PR controllers is proposed, and the bound is not greater than the previous one. Furthermore, an algorithm to construct the controllers can be obtained due to the constructive proofs. Simple example is also given to show the approach is practicable.

Key words: positive real control (PRC); reduced-order controller; LMI (linear matrix inequality); continuous-time systems; discrete-time systems

1 引言(Introduction)

考虑 n_p 阶广义被控对象:

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ y \end{bmatrix} = P(\delta) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}. \quad (1)$$

其中 δ 在连续和离散情形下分别表示拉氏变换算子和 Z -变换算子, $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} := C(\delta I - A)^{-1}B + D$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ ($n_w = n_z$) 和 $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ 分别表示广义对象的控制输出、测量、外部输入和控制信号. 各矩阵具有相容的维数. 所谓正实控制问题 (PR) 是指, 给定对象 (1), 构造内稳的控制器, 使得闭环系统为扩展严正实的 (extended strictly positive realness, 简称 ESPR)^[1,2]. 假定: A1) (A, B_2, C_2) 为可稳可检对.

近年来, 在时域中研究 PRC 问题方法受到重视. 文 [1] 基于 Riccati 不等式 (algebraic Riccati inequality, 简称 ARI) 给出了 PRC 问题的可解条件, 为避免求解 ARI 的困难, 文 [1] 将 ARI 转化为 Riccati 方程 (algebraic Riccati equation, 简称 ARE), 给出了阶数为广义对象 McMillan 阶的正实控制器构造方法. 由于 ARE 方法的限制, 文 [1] 对广义对象的限制较多. 实际上文 [1] 可解条件的 ARI 含不定二次项和半正定常数项, 可以转化为 LMI. 文 [2] 放宽了对广义对象的限制, 给出了基于 LMI 的 PRC 问题可解条件, 并研究了降阶控制器的构造问题. 对一类被控对象, 文 [2] 降阶控制器设计方法退化为全阶控制器的平凡情形, 具有一定的保守性.

对一般的 PRC 问题, 一个令人感兴趣的问题是, 是否一定存在阶数小于广义对象阶的降阶控制

* 基金项目: 国家自然科学基金 (69574013), 航空基金 (99E51002) 和山西省青年基金 (19991018) 资助项目.

收稿日期: 1999-12-13; 收修改稿日期: 2000-09-12.

器.本文在文[2]的基础上,通过一阶对象的分析表明, n_p 是最小阶正实控制器阶的可达上界,降阶正实控制器的存在性决定于具体对象的结构和参数.基于这一事实,给出了一个基于对象参数的降阶正实控制器阶的上界,并将连续情形的部分结果推广到离散情形.

2 基本引理(The basic lemmas)

引理 1^[2] 对连续对象(1),如下陈述等价:

i) 存在正则 PR 控制器;

ii) 存在 $n_c \leq \min(n_p - \text{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} + \text{rank} D_{12}, n_p - \text{rank} \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix} + \text{rank} D_{21})$ 的降阶控制器;

iii) $L_D \neq \emptyset$, 其中

$$L_D := \left\{ (X, Y) : X \in L_B, Y \in L_C, \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \right\}, \quad (2)$$

$$L_B := \{ X \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p} : X > 0,$$

$$\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} AX + XA^T & XC_1^T - B_1 \\ C_1 X - B_1^T & -(D_{11} + D_{11}^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^{-T} < 0 \}, \quad (3)$$

$$L_C := \{ Y \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p} : Y > 0,$$

$$\begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} YA + A^T Y & YB_1 - C_1^T \\ B_1^T Y - C_1 & -(D_{11} + D_{11}^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^{-T} < 0 \}. \quad (4)$$

若 $L_D \neq \emptyset$, 则存在阶数 $n_c \leq \text{rank}(X - Y^{-1})$ 的正则 PR 控制器.

由于 $\text{rank}(X - Y^{-1}) \leq n_p$ 平凡满足, 故当正实控制问题可解时, 总可以得到 n_p 阶的控制器. 对 D_{12} 列满列和 D_{21} 行满秩的一类广义对象, 引理 1 之 ii) 的上界退化为 n_p 这一平凡情形.

引理 2^[6] 对离散对象(1), 如下陈述等价:

i) 存在正则 PR 控制器;

ii) $L_G \neq \emptyset$, 其中:

$$L_G := \left\{ (R, S) : R \in L_E, S \in L_F, \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \right\}, \quad (5)$$

$$L_E := \{ R \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p} : R > 0, \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp$$

$$\begin{bmatrix} ARA^T - R & ARC_1^T - B_1 \\ C_1 RA^T - B_1^T & C_1 RC_1^T - (D_{11} + D_{11}^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^{-T} < 0 \}, \quad (6)$$

$$L_F := \{ S \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p} : S > 0, \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^\perp$$

$$\begin{bmatrix} A^T SA - S & A^T SB_1 - C_1^T \\ B_1^T SA - C_1 & B_1^T SB_1 - (D_{11} + D_{11}^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^{-T} < 0 \}. \quad (7)$$

若 $L_G \neq \emptyset$, 则存在阶数 $n_c \leq \text{rank}(R - S^{-1})$ 的正则 PR 控制器.

式(6)与文[6]略有区别, 不难验证两者的等价性.

3 一阶对象的正实控制问题(The PRC problem for first order plants)

由引理 1 可得静态正实控制器的存在条件:

推论 1 对连续对象(1), 如下陈述等价:

i) 存在静态的正则 PR 控制器;

ii) 存在 $X > 0$, 使得 $X \in L_B, X^{-1} \in L_C$.

当 $n_p = 1$ 时, 连续广义对象(1)中各矩阵均为标量, 则集合(3)和(4)退化为:

$$L_B = \{ X > 0 : \Delta_{11}X + \Delta_{12} < 0 \}, \quad (8)$$

$$L_C = \{ Y > 0 : \Delta_{21}Y + \Delta_{22} < 0 \}, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} (AD_{12} - B_2C_1)D_{12} & B_2(B_1D_{12} - B_2D_{11}) \\ (AD_{21} - B_1C_2)D_{21} & C_2(C_1D_{21} - C_2D_{11}) \end{bmatrix}.$$

根据式(8)和式(9)非空的各种情形, 由引理 1 及推论 1 可以验证如下结论成立:

定理 1 对一阶连续对象, 存在一阶正则 PR 控制器但不存在静态控制器, 当且仅当

$$\Delta_{11} < 0, \Delta_{12} > 0, \Delta_{11}\Delta_{21} \leq \Delta_{21}\Delta_{12}. \quad (10)$$

定理 1 表明, 最小阶的正实控制器的阶可达到 n_p . 如广义对象 $A = C_2 = D_{11} = 2, B_1 = B_2 = C_1 = D_{12} = 1, D_{21} = 3$, 由引理 1 及推论 1 可验证其正实控制问题可解(即存在一阶正实控制器), 但不存在静态正实的控制器, 根据定理 1 可得相同结论.

对一阶离散对象, 式(6)和(7)分别具有式(8)和(9)的形式, 仅其参数定义不同, 即在离散情形下有:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} (AD_{12} - B_2C_1)^2 - D_{12}^2 & 2(B_1B_2D_{12} - B_2^2D_{11}) \\ (AD_{21} - B_1C_2)^2 - D_{21}^2 & 2(C_1C_2D_{21} - C_2^2D_{11}) \end{bmatrix}.$$

故定理 1 可推广到离散情形. 因此, 对一般的正实控制问题, n_p 是最小阶正实控制器阶的可达上界.

4 降阶控制器的设计:连续情形(Design reduced-order controllers for continuous-time case)

记

$$\begin{aligned} [E \mid F^T] &:= \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} A \mid I \\ C_1 \mid 0 \end{bmatrix}, \\ Q &:= - \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^T & D_{11}^T + D_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp. \end{aligned}$$

显然 $\text{rank } F \leq n_p$, 进行奇异值分解 $F = U \begin{bmatrix} \Sigma_F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$,

记 $\bar{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} := U^T X U$, 其中 X_{11} 与 Σ_F 同维,

则集合(3)中的 LMI 等价于:

$$\text{sym} \left(EU, \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{12}^T \end{bmatrix}, [\Sigma_F \ 0] V^T \right) + Q < 0. \quad (11)$$

其中 $\text{sym}(E, X, F) := EXF + (EXF)^T$. 容易验证:

定理 2 如下陈述是等价的:

i) 正实控制问题可解;

ii) $\bar{L}_D \neq \emptyset$, 其中:

$$\bar{L}_D := \left\{ (\bar{X}, Y) : \bar{X} \in \bar{L}_B, Y \in L_C, \begin{bmatrix} X & U^T \\ U & Y \end{bmatrix} \geq 0 \right\}, \quad (12)$$

$$\bar{L}_B := \{ \bar{X} : \bar{X} > 0, X_{11}, X_{12} \text{ 满足 LMI(11)} \}. \quad (13)$$

类似于文[4]引理 3 的思路,可以证明:

引理 3 $\forall (\bar{X}, Y) \in \bar{L}_D, \exists \hat{X}$, 使得:

$$(\hat{X}, Y) \in \bar{L}_D, \text{rank}(\hat{X} - U^T Y^{-1} U) \leq \text{rank } F.$$

$$\text{证 记 } Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^T & Z_{22} \end{bmatrix} := \bar{X} - U^T Y^{-1} U \geq 0,$$

Z 按 $\bar{X}$ 进行分块. 令

$$\bar{X}_{22} := X_{22} - Z_{22} + Z_{12}^T Z_{11}^+ Z_{12}, \hat{X} := \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & \bar{X}_{22} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

其中 Z_{11}^+ 表示 Z_{11} 的 Moore-Penrose 逆. 可以验证上式定义的 $\hat{X}$ 可使得结论成立.

结合定理 2 即得本部分的一个主要结论:

定理 3 对连续对象(1),若正实控制问题可解,则存在一个 $n_c \leq \text{Rank } F$ 的降阶控制器.

定理 3 给出了降阶控制器的构造算法:求出式(12)中 3LMI 的任意一对可行解 $(\bar{X}, Y)$;由式(14)构造 $(\hat{X}, Y) \in \bar{L}_D$;由 $(U\hat{X}U^T, Y) \in L_D$ 构造阶数为 $\text{rank}(U\hat{X}U^T - Y^{-1}) \leq \text{rank } F$ 的降阶控制器的方法是标准的,可参考文[3,5]给出,限于篇幅,略.

对 E 进行奇异值分解,沿定理 3 思路可证明存在 $n_c \leq \text{rank } E$ 的降阶控制器.对偶的,考虑(4)中 LMI,可得到平行的结果.综上所述,即得本节主要结论:

定理 4 对连续对象(1),如下陈述等价:

i) 正实控制问题可解;

ii) 存在 $n_c \leq N_{\text{PRC}}$ 的降阶 PR 控制器,其中

$$\begin{aligned} N_{\text{PRC}} &:= \min \left(\text{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix}, \text{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \text{rank} \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} A^T \\ B_1^T \end{bmatrix}, \text{rank} \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

对引理 1 和定理 4 给出的降阶控制器,可以证明如下关系:

命题 1 如下秩等式成立:

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} &= n_p - \text{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} + \text{rank } D_{12}, \\ \text{rank} \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} &= n_p - \text{rank} \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix} + \text{rank } D_{21}. \end{aligned}$$

证 通过一个适当的输入变换,总可使 B_2 列满秩,故不失一般性,可设 B_2 列满秩(无冗余执行机构).则存在非奇异矩阵 T 和 W ,使得 $TB_2W = [I \ 0]^T$.进行状态变换 $\tilde{x} = Tx$ 和输入变换 $u = Wu$,则广义对象(1)的一个等价实现中 $\bar{B}_2 = TB_2W = [I \ 0]^T$.故可设 $B_2 = [I \ 0]^T$,经直接计算可证第一个秩等式成立.同理可证第二个等式成立,略.

证毕.

因此,定理 4 给出的降阶正实控制器阶的上界蕴涵了引理 1 的结果,可给出一个简单的例子予以说明.

例 广义对象为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, [B_1 \ B_2] =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, D_{11} = D_{12} = D_{21} = 1. \text{ 由引}$$

理 1 可验证正实控制问题可解,但不能得到降阶正实控制器,因 $\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的秩为 1,故本方法可以得到 1 阶的降阶控制器.

5 降阶控制器的设计:离散情形(Design reduced-order controllers for discrete-time case)

连续情形降阶控制器设计的结果部分可推广到离散情形:

定理 5 对离散对象(1),如下陈述等价:

- i) 正实控制问题可解;
- ii) 存在阶数

$$n_r \leq \min \left(\text{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \text{rank} \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

的降阶正实控制器.

证 参照定理 3 和文[4],不难给出证明,略.

另外,可以证明命题 1 在离散情形下保持,故定理 5 也可改写为引理 1 的等价形式.

6 结论(Conclusion)

降阶 PR 控制器设计问题,在理论和应用上都具有重要的意义.本文通过一阶对象 PR 控制问题的分析表明,广义对象阶是最小阶 PR 控制器阶的可达上界.因此,不超过广义对象阶的降阶 PR 控制器的构造,依赖于广义对象的结构参数.文中给出了一个新的降阶正实控制器阶的上界,与已有结果相比,该上界较少保守性.证明是构造性的,可以得到这种降阶控制器的设计算法.另外,连续对象降阶正实控制器设计的部分结果,也可推广到离散情形.

参考文献(References)

[1] Sun W, Khargonekar P P and Shm D. Solution to the positive real

control problem for linear time-invariant systems [J]. IEEE Trans Automatic Control, 1994, 39(10):2034-2046

- [2] Guo Lei, Xin Xin and Feng Chunbo. The positive real control problem for generalized linear plants [J]. Acta Automatica Sinica, 1997, 23(5):577-583 (in Chinese)
- [3] Iwasaki T and Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. Automatica, 1994, 30(8):1307-1317
- [4] Xin X, Guo L and Feng C B. Reduced-order controllers for continuous and discrete-time singular H_∞ control problems based on LMI [J]. Automatica, 1996, 32(11):1581-1585
- [5] Guo Lei, Xin Xin and Feng Chunbo. A linear-matrix-inequality based design method of reduced-order controllers for singular H_∞ control problem [J]. Control Theory & Applications, 1996, 13(6):622-630 (in Chinese)
- [6] Cao Yongyan and Sun Youxian. Synthesis of the strongly positive real controller with output feedback for discrete-time systems [J]. Acta Automatica Sinica, 1998, 24(1):85-89 (in Chinese)

本文作者简介

曾建平 1966 年生,现为北京航空航天大学博士生.感兴趣的领域有: H_∞ 控制理论,线性系统等. Email: jpzeng@mech.pku.edu.cn

程 鹏 1938 年生,1962 年毕业于北京大学数学力学系,现任北京航空航天大学自动控制系教授,博士生导师.研究领域为:线性系统理论,多变量系统理论,鲁棒控制和运动稳定性等.