文章编号：1000－8152(2002)01－0146－03

线性定常系统的输入-输出能量解耦*

毛维杰 褚 健
(浙江大学工业控制技术国家重点实验室，先进控制研究所·杭州，310027)

摘要：提出一种介于动态解耦与静态解耦之间的能量解耦方法，即从输入-输出的能量关系上实现解耦，使得任何一个输入的能量主要控制对应的一个输出的能量，对其它输出能量的影响尽可能小．所给实例表明，该方法具有良好的解耦效果．

关键词：线性定常系统；解耦控制；近似解耦
文献标识码：A

Input-Output Energy Decoupling of Linear Time-Invariant Systems

MAO Weijie and CHU Jian
(National Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Advanced Process Control,
Zhejiang University · Hangzhou, 310027, P. R. China)

Abstract: This paper presents an input-output energy decoupling method, which is between the dynamic decoupling and the static decoupling method. It is an approximate decoupling method, under which the energy of every input controls mainly the energy of a corresponding output and influences the energy of the other outputs as weakly as possible. The illustrative example shows that this method is of satisfactory decoupling performance.

Key words: linear time-invariant systems; non-interacting control; approximate decoupling

1 引言(Introduction)

解耦控制是多变量系统控制的有效手段．解耦控制从解耦程度上的不同一般可分为全解耦与近似解耦．围绕 Morgan 问题的一系列状态空间方法，如 Morgan[1]，Falb 和 Wolovich[2]，Wonham 和 Morse[3]等方法均属于全解耦方法．这种基于精确对消的解耦方法，遇到被控对象的任何一点摄动，都会导致解耦性的破坏，这是上述方法的主要缺陷．以 Rosenbrock 为代表的现代频域法[4,5]则属于近似解耦方法，其设计目标是被控对象的对角优势化而非对角化，从而可以在很大程度上避免全解耦方法的缺陷．

从解耦的时间特性上来看，解耦控制又能分为动态解耦与静态解耦．静态解耦的设计与实现均非常简单，但只适用于输入为阶跃信号的情况．从控制效果上来看，当然动态解耦比较理想，但其设计与实现的代价也比较高．本文试图寻找一种折衷的方法，即从输入-输出的能量关系上实现近似解耦，使得任何一个输入的能量主要控制对应的一个输出的能量，对其它输出能量的影响尽可能小，因此称之为输入-输出能量解耦方法．这种方法参照了 Rosenbrock 的对角优势化方法的近似解耦思想，但是一种状态空间方法，设计过程更为直接．所给实例表明，该方法具有良好的解耦效果．

2 问题的提出(Problem formulation)

考虑如下线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为系统输入，$y(t) \in \mathbb{R}^m$ 为系统输出，同时满足 $m \leqslant n$，A，B，C，D 分别为具有相应维数的定常矩阵，且 $\det D \neq 0$．寻求状态反馈与输入变换控制率

$$u(t) = Fx(t) + Gv(t), \tag{2}$$

使得闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BF)x(t) + BGv(t), \\ y(t) &= (C + DF)x(t) + DGv(t) \end{aligned} \tag{3}$$

的任何一个输入的能量主要控制对应的一个输出的能量、而对其它输出能量的影响尽可能小，其中 $v(t) \in \mathbb{R}^m$ 为变换后新的系统输入，F，G 分别为具有相应维数的定常矩阵．上述输入－输出能量解耦过程可归纳为：寻求 $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$G \in \mathbb{R}^{m\times m}$，满足

* 基金项目：国家自然科学基金(60004002，69934030)资助项目．
收稿日期：1999－06－09；收修改稿日期：2000－07－17．

$$\begin{cases}\int_0^\tau y_i(t)v_i(t)\mathrm{d}t \geqslant \alpha_i\int_0^\tau v_i^2(t)\mathrm{d}t, \forall\,\tau \geqslant 0,\\ v_j = 0(j \neq i),\ i = 1,2,\cdots,m,\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases}\int_0^\tau \hat{y}_i^{\mathrm{T}}(t)\hat{y}_i(t)\mathrm{d}t \leqslant \beta_i\int_0^\tau v_i^2(t)\mathrm{d}t, \forall\,\tau \geqslant 0,\\ v_j = 0(j \neq i),\ i = 1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{5}$$

其中 $\hat{y}_i(t) \in \mathbb{R}^{m-1}$ 表示 $y(t)$ 中除 $y_i(t)$ 分量外的所有其它分量组成的向量，α_i、β_i 为给定的正常数.

本文的输入-输出能量解耦思想参照了 Rosenbrock 的对角优势化方法的近似解耦思想，具体的求解过程可归纳为对条件(4)，(5)的求解.考虑到系统的稳定性是系统设计中的首要目标，因此本文的能量解耦条件将同时保证闭环系统的渐近稳定性.

定义 1　对于线性定常系统(1)，如果存在矩阵 F，G，满足条件(4)，(5)，且闭环系统渐近稳定，则称该系统为输入 - 输出能量$(\alpha,\beta \mid F,G)$解耦的.

3　主要结果(Main results)

对于线性定常系统(1)，如果其本身是稳定的，则(2)式可简化为仅具输入变换部分，即

$$u(t) = Gv(t). \tag{6}$$

此时，系统(1)变为

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + BGv(t),\\ y(t) &= Cx(t) + DGv(t).\end{aligned} \tag{7}$$

定理 1　线性定常系统(1)为输入-输出能量$(\alpha,\beta \mid 0,G)$解耦的，如果存在矩阵 X_i、$Y_i > 0$，$i = 1,2,\cdots,m$，满足

$$\begin{bmatrix}X_iA^{\mathrm{T}} + AX_i & Bg_i - X_iC_i^{\mathrm{T}}\\ g_i^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} - C_iX_i & 2\alpha_iI - (D_ig_i + g_i^{\mathrm{T}}D_i^{\mathrm{T}})\end{bmatrix} < 0, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix}Y_iA^{\mathrm{T}} + AY_i & Bg_i & Y_i\hat{C}_i^{\mathrm{T}}\\ g_i^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & -\beta_i^{\frac{1}{2}}I & g_i^{\mathrm{T}}\hat{D}_i^{\mathrm{T}}\\ \hat{C}_iY_i & \hat{D}_ig_i & -\beta_i^{\frac{1}{2}}I\end{bmatrix} < 0. \tag{9}$$

其中 $g_i \in \mathbb{R}^m$ 表示 G 的 i 列，$\hat{C}_i \in \mathbb{R}^{(m-1)\times n}$ 表示 C 中除 C_i 行外的所有其它行向量组成的矩阵，$\hat{D}_i \in \mathbb{R}^{(m-1)\times m}$ 表示 D 中除 D_i 行外的所有其它行向量组成的矩阵.

证　基于系统(7)的每一个输入 $v_i(t)$，系统(7)可分解为

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bg_iv_i(t),\\ y(t) &= Cx(t) + Dg_iv_i(t),\end{aligned}\quad i = 1,2,\cdots,m.$$

针对上述子系统，构造二次函数 $V_i(t,x) = x^{\mathrm{T}}(t)P_ix(t)$，$W_i(t,x) = x^{\mathrm{T}}(t)Q_ix(t)$，$P_i,Q_i > 0$，$i = 1,2,\cdots,m$. 对其求时间导数有

$$M_i(t) = \dot{V}_i(t,x) - 2\gamma_iv_i + 2\alpha_iv_i^2 =$$

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ v_i(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}P_i + P_iA & P_iBg_i - C_i^{\mathrm{T}}\\ g_i^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P_i - C_i & 2\alpha_iI - (D_ig_i + g_i^{\mathrm{T}}D_i^{\mathrm{T}})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ v_i(t)\end{bmatrix},$$

$$N_i(t) = \dot{W}_i(t,x) - \beta_i^{\frac{1}{2}}v_i^2 + \beta_i^{\frac{1}{2}}\hat{y}_i^{\mathrm{T}}\hat{y}_i =$$

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ v_i(t)\\ \beta_i^{-\frac{1}{2}}\hat{y}_i\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}Q_i + Q_iA & Q_iBg_i & \hat{C}_i^{\mathrm{T}}\\ g_i^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Q_i & -\beta_i^{\frac{1}{2}}I & g_i^{\mathrm{T}}\hat{D}_i^{\mathrm{T}}\\ \hat{C}_i & \hat{D}_ig_i & -\beta_i^{\frac{1}{2}}I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ v_i(t)\\ \beta_i^{-\frac{1}{2}}\hat{y}_i\end{bmatrix}.$$

令 $X_i = P_i^{-1}$，$Y_i = Q_i^{-1}$ 则当条件(8)，(9)成立时，显然有 $M_i(t) \leqslant 0$，$N_i(t) \leqslant 0$，对其分别从0到 τ 积分，利用初始条件 $x(0) = 0$，可以得到

$$\int_0^\tau M_i(t)\mathrm{d}t = V_i(\tau,x(\tau)) - \int_0^\tau(2\gamma_iv_i - 2\alpha_iv_i^2)\mathrm{d}t \leqslant 0,$$

$$\int_0^\tau N_i(t)\mathrm{d}t = W_i(\tau,x(\tau)) + \int_0^\tau(\beta_i^{-\frac{1}{2}}\hat{y}_i^{\mathrm{T}}\hat{y}_i - \beta_i^{\frac{1}{2}}v_i^2)\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

因此，对所有 $\tau \geqslant 0$，总有

$$\int_0^\tau y_iv_i\mathrm{d}t \geqslant \alpha_i\int_0^\tau v_i^2\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^\tau \hat{y}_i^{\mathrm{T}}\hat{y}_i\mathrm{d}t \leqslant \beta\int_0^\tau v_i^2\mathrm{d}t.$$

另外，把二次函数 $V_i(t,x)$ 或 $W_i(t,x)$ 作为 Lyapunov 函数，很容易验证当 $v(t) = 0$ 时，有

$$\dot{V}_i(t,x) < 0,\ \dot{W}_i(t,x) < 0,$$

即条件(8)或(9)可保证系统渐近稳定.定理得证.

对于线性定常系统(1)，如果其本身是不稳定的，则需考虑同时具有状态反馈和输入变换的能量解耦问题.

定理 2　线性定常系统(1)为输入-输出能量$(\alpha,\beta \mid F,G)$解耦的，如果存在矩阵 Z 及 $X > 0$，满足

$$\begin{bmatrix}XA^{\mathrm{T}} + AX + Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + BZ & Bg_i - XC_i^{\mathrm{T}} - Z^{\mathrm{T}}D_i^{\mathrm{T}}\\ g_i^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} - C_iX - D_iZ & 2\alpha_iI - (D_ig_i + g_i^{\mathrm{T}}D_i^{\mathrm{T}})\end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix}XA^{\mathrm{T}} + AX + Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + BZ & Bg_i & X\hat{C}_i^{\mathrm{T}} + Z^{\mathrm{T}}\hat{D}_i^{\mathrm{T}}\\ g_i^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & -\beta_i^{\frac{1}{2}}I & g_i^{\mathrm{T}}\hat{D}_i^{\mathrm{T}}\\ \hat{C}_iX + \hat{D}_iZ & \hat{D}_ig_i & -\beta_i^{\frac{1}{2}}I\end{bmatrix} < 0. \tag{11}$$

其中 $g_i \in \mathbb{R}^m$ 表示 G 的 i 列，$\hat{C}_i \in \mathbb{R}^{(m-1)\times n}$ 表示 C 中除 C_i 行外的所有其它行向量组成的矩阵，$\hat{D}_i \in \mathbb{R}^{(m-1)\times m}$ 表示 D 中除 D_i 行外的所有其它行向量组成的矩阵.且状态反馈矩阵为

$$F = ZX^{-1}. \tag{12}$$

4 实例(Illustrative example)

考虑线性定常系统(1),其中

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\2&3&0\\1&1&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0.2&-0.1\\0&0.3\end{bmatrix}.$$

本例中系统矩阵 A 不稳定,可利用定理2结论求解.取 $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=1$,求得状态反馈与输入变换矩阵分别为

$$F=\begin{bmatrix}-4.8491&-4.7838&-1.4899\\0.0267&0.0617&-3.1452\end{bmatrix},$$

$$G=\begin{bmatrix}10.3341&3.0465\\-1.3931&10.1216\end{bmatrix}.$$

系统经状态反馈和输入变换后的阶跃响应如图1所示.

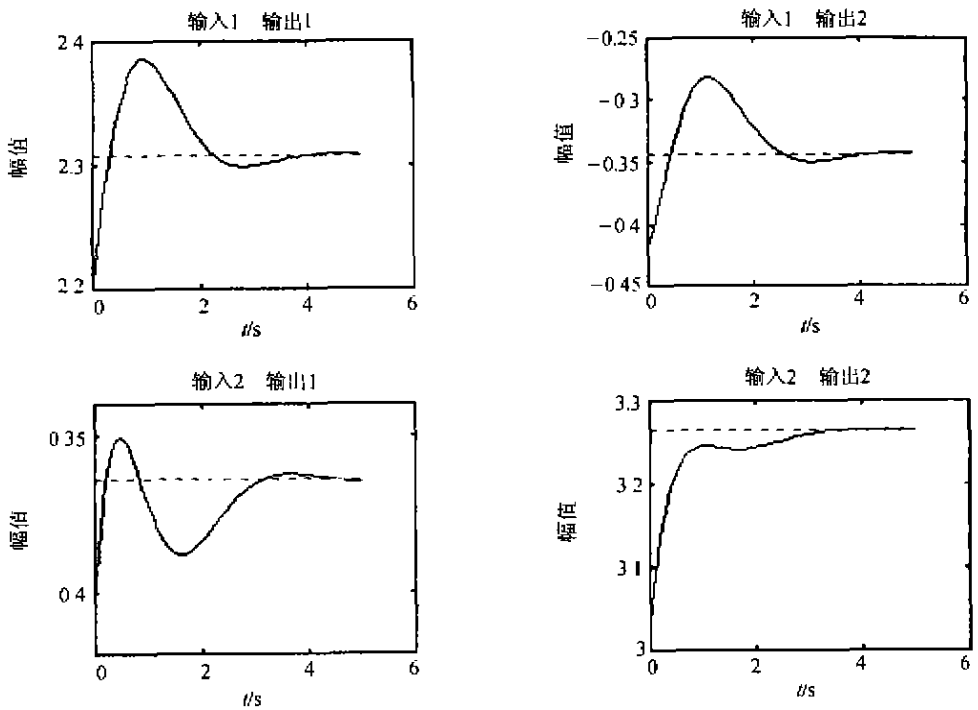

图1 实例系统经状态反馈和输入变换后的阶跃响应

Fig. 1 Step response of example with state feedback and input transformation

5 结论(Conclusions)

本文提出了线性定常系统的输入-输出能量解耦方法,该解耦方法把降低系统的输入-输出能量关联性作为首要目标,不但克服了传统的精确解耦方法对模型摄动的敏感性,而且物理概念清楚,易于为现场工程师理解和接受,是一种具有广泛应用前景的控制方法.

参考文献(References)

[1] Morgan B S. The synthesis of linear multivariable systems by state feedback [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1964, 9(5):405 - 411

[2] Falb P L and Wolovich W A. Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1967, 12(6):651 - 659

[3] Morse A S and Wonham W M. Status of noninteracting control [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1971, 16(6):568 - 581

[4] Rosenbrock H H. The stability of multivariable systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1972, 17(1):105 - 107

[5] Rosenbrock H H. Computer Aided Control System Design [M]. New York: Academic Press, 1974

本文作者简介

毛维杰 1969年生.1991年毕业于浙江大学,1996年获得浙江大学工学博士学位.现在为浙江大学副教授.主要研究方向为电气传动与控制.时滞系统控制,解耦控制,鲁棒控制等理论与应用. Email: wjmao@iipc.zju.edu.cn

褚 健 见本刊2002年第1期第108页.

换函数设计方法，当切换函数为零时，对应的等效系统是渐近稳定的，当切换函数有界时，对应的等效系统将一致终结有界．进一步利用变结构控制设计方法设计控制器，由它保证系统满足滑模运动到达条件．在此基础上，结合参数在线估计方法，提出了一种自适应变结构控制器，其保证闭环系统是一致终结有界的．

参考文献(References)

[1] Gao Weibing. Theory and Design Approach for Variable Structure Control [M]. Beijing: Science Press, 1996

[2] Kim K S and Park Y. Robust sliding hyperplane design for parametric uncertain systems by Riccati approach [A]. Proceedings of the American Control Conference [C], Philadelphia, Pennsylvania, 1998,579 - 583

[3] Kwan C M. Sliding mode control of linear systems with mismatched uncertainties [J]. Automatica, 1995,31(2):303 - 307

[4] Boyd S, Ghaoui L E and Feron E. Linear matrix inequalities in system and control theory [A]. SIAM Studies in Applied Mathematics [M]. Philadelphia, PA: SIAM Publishing House, 1995,15:24 - 29

[5] Corless M J and Leitmann G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimateboundness for uncertain dynamic systems [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1981,26(5):1139 - 1144

[6] Wu Hansheng. A class of state feedback controllers with simple structures for uncertain nonlinear dynamical systems [J]. Trans of Society of Instrument and Control Engineers, 1996,32(4):477 - 485

[7] Wang Leng. Stability Theory [M]. Beijing: Beijing University Publication, 1992,12 - 44

本文作者简介

胡剑波 西安空军工程大学副教授．主要研究领域：过程自动化和智能化系统． Email: zjhjb@263.net

褚 健 1963年生．1982年毕业于浙江大学，1986 ~ 1989年留学日本京都大学，1989年获工学博士学位．现为浙江大学教授，博士生导师，"长江学者奖励计划"特聘教授．

(上接第 104 页)

参考文献(References)

[1] Zhong Shouming and Huang Tingzhu. Robust stabilization of uncertain multivariable feedback systems with multiple time delays [J]. Acta Automatica Sinica, 1998,24(6):837 - 839 (in Chinese)

[2] Lu H C and Chen B S Stabilization of multivariable feedback systems with multiple time delays [J]. Int. J. Systems Science, 1988, 19(6):953 - 966

[3] Wu H and Mizukami K. Robust stabilization of uncertain linear dynamical systems [J] Int. J. Systems Science, 1993,24(2):265 - 276

[4] Sun Jitao and Zhang Yinping. On the stability of linear differential equation with varying coefficients [J]. Control Theory and Applications, 1998,15(4):642 - 645 (in Chinese)

[5] Sun Jitao. Stability and decay rate of interval time-varying dynamical system with multidelay [J]. Chinese J of Automation, 1996,8(3): 243 - 247

[6] Silviu I N, Souza C E and Luc D, et al. Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1998,43(5):743 - 748

本文作者简介

孙继涛 1963年生．同济大学应用数学系教授，美国数学学会会员，《数学评论》评论员，华南理工大学自动控制工程系在职博士生．对常微分方程理论与应用感兴趣，在国内外发表学术论文70余篇，获科技进步奖四项． Email: sunjt @ sh163.net

邓飞其 1962年生．1983年，1987年分别于湖南大学，华南理工大学获理学学士学位，工学博士学位，现为华南理工大学自动控制工程系教授，博士生导师．主要研究方向为时滞系统，随机系统，大系统的控制理论．

刘永清 1930年生．华南理工大学电子与信息学院教授，博士生导师．主要研究方向为复杂系统及系统工程．

张银萍 女．1962年生．硕士，同济大学应用数学系副教授．对常微分方程理论与应用感兴趣．在国内外发表学术论文30余篇，获科技进步奖三项．