

基于进化规划的区间系统卡尔曼滤波

翁志黔¹ 谢两叁² 陈关荣²

(1. 西北工业大学第 365 研究所·西安, 710072; 2. 休士顿大学电子计算机工程系·休士顿, TX77204)

摘要: 对不确定系统的最优鲁棒滤波问题, 提出了一种新的方法——进化规划(EP)卡尔曼滤波。该方法采用 EP 全局寻优技术, 搜索最优估计区间; 也采用 EP 全局最优技术, 确定工程中可实现的最优估计标称值。这种新方法的假设条件与标准的卡尔曼滤波完全相同, 并具有标准的卡尔曼滤波相同的递推结构、相同的最优性。最后, 给出计算仿真的例子, 并与文[1]的仿真结果进行了比较, 结果表明, 本文提出的新方法更精确, 有较少的保守性。

关键词: 区间系统; 进化规划; Kalman 滤波

文献标识码: A

Kalman Filtering for Interval System Using Evolutionary Programming

WENG Zhiqian¹, XIE Liangsan² and CHEN Guanrong²

(1. 365th Institute, Northwestern Polytechnical University · Xi'an, 710072, P.R. China;

2. Department of Electrical and Computer, University of Houston · Houston, TX77204, U.S.A.)

Abstract: This paper develops a robust Kalman filtering algorithm by incorporating with the evolutionary programming (EP) technique for interval systems containing uncertainties. Based on the global optima-searching capability of EP, the new filtering algorithm is able to find the optimal Kalman filtering results at every iteration. The upper and lower boundaries and the nominal trajectory of the optimal estimates of the system state vectors are computed by the new algorithm, under the same statistical conditions while yielding the same optimal estimates as the conventional Kalman filtering scheme. A typical computer simulation example is included for comparison with the interval Kalman filtering method, which shows that the new algorithm is more accurate and less conservative.

Key words: interval systems; evolutionary programming; Kalman filtering

1 引言(Introduction)

在工程实际问题中, 由于存在各种不确定因素(如参数变化、建模误差等), 系统变得不确定, 从而标准的卡尔曼滤波不能直接应用, 因为它不能克服系统的参数摄动问题。因此, 鲁棒滤波问题的研究就显得十分重要。

近年来, 许多学者对不确定线性系统的鲁棒滤波问题进行了研究, 已给出几种鲁棒滤波的方法, 如使用不确定系统分析(uncertain systems analysis)^[2,3], 集合值(set-valued)估计^[4,5]和 H_∞ 准则^[6,7]。但是, 这些方法都是近似的估计, 或多或少地失去了标准卡尔曼滤波的最优估计的基本特性(例如线性无偏特性)。

G. Chen 等基于区间数学理论(interval arithmetic)提出一种精确、优化的卡尔曼滤波方法——区间卡尔曼滤波(interval kalman filtering, IKF)算

法^[1]。这种 IKF 方法完全保留了标准卡尔曼滤波的特性, 在相同的假设条件下, 有相同的递推结构和相同的最优性。但是, 由于区间数学固有的保守性^[1], IKF 方法经常会得到比较保守的估计结果。

本文提出了一种新的鲁棒滤波方法——进化规划卡尔曼滤波(evolutionary programming Kalman filtering, EPKF)。遗传算法(GA)是用字符串表达问题, 这就限制了它的应用, 进化规划(EP)是用函数表达问题, 所以它更灵活、更有效、更便于解决复杂的问题。EP 也是仿效生物的进化与遗传, 根据“保优除劣”的原则, 借助复制(reproduction)、突变(mutation)等操作, 使所要解决的问题一步步地逼近最优解。EPKF 方法就是采用 EP 全局寻优技术, 对于不确定系统在参数受到干扰时, 搜索每次滤波循环中的最优估计区间(lower and upper bounds)。本文也提出用 EP 并行全局寻优技术确定工程中可实现的最

优估计标称值(optimal nominal estimation)的方法,使得最大的估计误差达到最小. EPKF方法不需额外的数学计算和分析,它象文[1]中的 IKF方法一样,也保留了标准卡尔曼滤波的假设条件,最优性和递推结构. 仿真结果表明:用 EPKF方法得到最优估计区间和最优滤波估计标称值更精确,有较少的保守性.

2 EP 卡尔曼滤波(EP Kalman filtering)

首先考虑标称(nominal)离散线性时变系统:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k \xi_k, \\ y_k = C_k x_k + \eta_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

这里, $x_k \in \mathbb{R}^n$ 为状态矢量; $y_k \in \mathbb{R}^m$ 为测量输出矢量; $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_k \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 和 $C_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为已知的常数矩阵; ξ_k 和 η_k 分别为系统噪声和测量噪声,它们满足:

$$E[\xi_k] = 0, E[\eta_k] = 0, E[\xi_k \eta_l^T] = 0,$$

$$E[\xi_k \xi_l^T] = Q_k \delta_{kl}, E[\eta_k \eta_l^T] = R_k \delta_{kl}.$$

其中, $k, l = 0, 1, 2, \dots$. 如果 $k = l$, $\delta_{kl} = 1$; $k \neq l$, $\delta_{kl} = 0$. 设系统(1)的初始状态 x_0 是已知的高斯分布随机矢量,其均值和均方差阵分别为: $E[x_0] = \mu_0$, $V[x_0] = P_0$, 如果所有的常数矩阵 A_k, B_k, C_k 和输出观测数据 $y(0), y(1), \dots, y(k)$ 都已知,就可以由下列的卡尔曼滤波基本方程确定系统(1)的状态矢量 $\{x_k\}$ 的最优估计值.

卡尔曼滤波的基本方程:

$$\begin{cases} \hat{x}_{k/k} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} + K_k (y_k - C_k \hat{x}_{k-1/k-1}), \\ P_{k/k-1} = A_{k-1} P_{k-1/k-1} A_{k-1}^T + B_{k-1} Q_{k-1} B_{k-1}^T, \\ K_k = P_{k/k-1} C_k^T (C_k P_{k/k-1} C_k^T + R_k)^{-1}, \\ P_{k/k} = (I - K_k C_k) P_{k/k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2)$$

现在讨论系统(1)加扰动后的不确定系统的情况. 不确定离散线性时变系统:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k^l x_k + B_k^l \xi_k, \\ y_k = C_k^l x_k + \eta_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

这里把不确定矩阵用区间矩阵形式来表示:

$$A_k^l = A_k + \Delta A_k = [A_k - |\Delta A_k|, A_k + |\Delta A_k|],$$

$$B_k^l = B_k + \Delta B_k = [B_k - |\Delta B_k|, B_k + |\Delta B_k|],$$

$$C_k^l = C_k + \Delta C_k = [C_k - |\Delta C_k|, C_k + |\Delta C_k|],$$

ξ_k 和 η_k 与(1)式相同, 分别为系统噪声和测量噪声.

$$Q_k^l = Q_k + \Delta Q_k = [Q_k - |\Delta Q_k|, Q_k + |\Delta Q_k|],$$

$$R_k^l = R_k + \Delta R_k = [R_k - |\Delta R_k|, R_k + |\Delta R_k|],$$

这里 $|\Delta A_k|, |\Delta B_k|, |\Delta C_k|, |\Delta Q_k|$ 和 $|\Delta R_k|$ 表示不确定的参数区间. 定义区间矩阵 $A_k^l, B_k^l, C_k^l,$

Q_k^l 和 R_k^l 的实际出现矩阵为 $A_{k,r}, B_{k,r}, C_{k,r}, Q_{k,r}$ 和 $R_{k,r}$, 其中 $A_{k,r} \in A_k^l, B_{k,r} \in B_k^l, C_{k,r} \in C_k^l, Q_{k,r} \in Q_k^l$ 和 $R_{k,r} \in R_k^l$. 相应地定义最优估计 $\hat{x}_{k/k}$, 最优估计均方差 $P_{k/k-1}, P_{k/k}$, 滤波增益 K_k 和观测值 y_k 的实际出现矩阵为 $\hat{x}_{k/k,r}, P_{k/k-1,r}, P_{k/k,r}, K_{k,r}$ 和 $y_{k,r}$. 这里 $\hat{x}_{k/k,r} \in \hat{x}_{k/k}^l, P_{k/k-1,r} \in P_{k/k-1}^l, P_{k/k,r} \in P_{k/k}^l, K_{k,r} \in K_k^l$ 和 $y_{k,r} \in y_k^l$.

基于方程(3)和上面的定义及假设, 可知在不确定系统中每个实际出现的系统都服从标准的卡尔曼滤波方程, 从而得 EPKF 滤波方程:

$$\begin{cases} \hat{x}_{k/k,r} = A_{k-1,r} \hat{x}_{k-1/k-1,r} + K_{k,r} (y_{k,r} - C_{k,r} \hat{x}_{k-1/k-1,r}), \\ P_{k/k-1,r} = A_{k-1,r} P_{k-1/k-1,r} A_{k-1,r}^T + B_{k-1,r} Q_{k-1,r} B_{k-1,r}^T, \\ K_{k,r} = P_{k/k-1,r} C_{k,r}^T (C_{k,r} P_{k/k-1,r} C_{k,r}^T + R_{k,r})^{-1}, \\ P_{k/k,r} = (I - K_{k,r} C_{k,r}) P_{k/k-1,r}, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4)$$

该方程的其它假设条件与方程(2)相同.

3 基于 EP 的全局最优估计(Global optimal estimates using EP)

在这部分, 将给出采用 EP 全局最优技术, 搜索不确定系统(3)的最优估计区间和最优估计标称值的方法.

3.1 搜索最优估计区间(Search for interval of optimal estimates)

EP 搜索最优估计区间的方法: 首先由方程(4)搜索每次滤波循环的最优估计均方差区间 $[P_{k/k,r}, \bar{P}_{k/k,r}]$. 一旦搜索到均方差区间, 那么用相应的 $A_{k,r}, B_{k,r}, C_{k,r}, Q_{k,r}$ 和 $R_{k,r}$, 就可得到最优估计的区间 $[\hat{x}_{k/k,r}, \bar{\hat{x}}_{k/k,r}]$. 为了简化起见, 令: $\Phi^l = \{\phi_{i,j} \in \phi_y^l = [\underline{\phi}_y, \bar{\phi}_y], i, j = 1, 2, \dots\}$. Φ^l 表示不确定系统(3)中的所有的不确定矩阵 $(A_k^l, B_k^l, C_k^l, Q_k^l, R_k^l)$, $\phi_y^l(\phi_{i,j})$ 是 Φ^l 中随时实际出现的不确定元素. 同样, 令: $\Psi^l = \{\psi_{i,j} \in \psi_y^l = [\underline{\psi}_y, \bar{\psi}_y], i, j = 1, 2, \dots\}$, Ψ^l 表示均方差 $P_{k/k}^l$, 而 $\psi_y^l(\psi_{i,j})$ 是 Ψ^l 中的随时实际出现的不确定元素.

采用 EP 全局最优技术^[8,9] 搜索最优估计区间的步骤如下(一次滤波循环):

1) 基于准随机序列(quasi-random sequence), 随机产生 N 个第零代的个体(individual), $Z(0) = [z_1, z_2, \dots, z_N]$, 为初始族群(initial population). 初始族群中的每个个体由 n 个元素组成, 用 $z_{l,m}(0)$ ($l = 1, 2, \dots, N, m = 1, 2, \dots, n$) 表示, l 表示族群中个体的个数, m 表示第 l 个体的元素个数. 那么不确定系统中

实际出现的矩阵元素 ϕ_y^l 的扰动区间可用下式表示:

$$\begin{cases} \phi_{r,y}^{(l,m)} = \phi_y + z_{l,m}(0)(\phi_y - \bar{\phi}_y), \\ 0 \leq z_{l,m}(0) \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

2) 对初始族群中的每个个体元素 $z_{l,m}(0)$, $l = 1, 2, \dots, N$, $m = 1, 2, \dots, n$. 由方程(5) 计算实际出现的矩阵元素值 $\phi_{r,y}^{(l,m)}$, 进而计算均方差 $\phi_{r,y}^{(l)}(P_{k/k,r}^{(l)}) \in \Psi$, $i, j = 1, 2, \dots$, 并搜索区间. 记下限值为 $\phi_y^{(l)}$, 上限值为 $\bar{\phi}_y^{(l)}$.

3) 对每个个体 $z_l(t)$, $l = 1, 2, \dots, N$, 这里 t 为代数 (generation number), 计算适应度 $f^{(l)}(t)$ (fitness score), 建议选取如下适应函数:

i) 搜索 $\phi_y^{(l)}$ 时

$$f_1^{(l)}(t) = \phi_y^{(l)}(t) - \phi_y^{(l)} + b. \quad (6)$$

ii) 搜索 $\bar{\phi}_y^{(l)}$ 时

$$f_2^{(l)}(t) = \bar{\phi}_y^{(l)}(t) - \phi_y^{(l)} + b. \quad (7)$$

其中 $l = 1, 2, \dots, N$. $\phi_y^{(l)} = \phi_{r,y}^{(l)} \in \Psi_y^l$, $ij = 1, 2, \dots$. 这里 b 是常数, 选择合适的 b 使方程(6), (7) 大于 0.

4) 基于统计学理论, 突变 $z_{l,m}(t)$, $l = 1, 2, \dots, N$, $m = 1, 2, \dots, n$, $t = 1, 2, \dots$, 使族群的大小从 N 增到 $2N$, 用 $z_{l+N,m}(t)$ 表示. $z_{l+N,m}(t)$ 由下列公式产生:

$$\begin{cases} z_{l+N,m}(t+1) = z_{l,m}(t) + N \left(0, \beta \frac{f^{(l)}(t)}{f_{\Sigma}(t)} \right), \\ 0 \leq z_{l+N,m}(t) \leq 1. \end{cases} \quad (8)$$

其中 $N \left(0, \beta \frac{f^{(l)}(t)}{f_{\Sigma}(t)} \right)$ 表示均值为 0, 均方差 $\beta \frac{f^{(l)}(t)}{f_{\Sigma}(t)}$ 的高斯随机变量 $f^{(l)}(t)$ ($l = 1, 2, \dots, N$) 表示上一代 (old generation) 的适应函数值, $f_{\Sigma}(t)$ 为上一代适应函数值的总和.

5) 对每个个体 $z_{l+N}(t)$, $l = 1, 2, \dots, N$, 根据公式(6), (7) 计算适应度 $f^{(l+N)}(t)$, $l = 1, 2, \dots, N$.

6) 族群中的 $2N$ 个个体进行随机竞争, 赢者保存, 劣者淘汰. 竞争过程如下:

i) 搜索 ϕ_y 时, 如果 $f^{(l+N)}(t) < f^{(l)}(t)$, 那么对应的个体 $z_{l+N}(t)$ 是赢者, 否则 $z_l(t)$ 是赢者;

ii) 搜索 $\bar{\phi}_y$ 时, 如果 $f^{(l+N)}(t) > f^{(l)}(t)$, 那么对应的个体 $z_{l+N}(t)$ 是赢者, 否则 $z_l(t)$ 是赢者.

竞争过程完成后, 有 N 个个体保存下来, 参与下一代 (new generation) 的竞争.

7) 返回到 4), 直到满足下列条件:

$$f_1(t) - f_1(t-1) \leq \rho, (\text{搜索 } \phi_y^{(l)} \text{ 时})$$

或

$$f_2(t) - f_2(t-1) \leq \rho, (\text{搜索 } \bar{\phi}_y^{(l)} \text{ 时})$$

ρ 是足够小的数, 且 $\rho > 0$. 此时就认为搜索到了最优估计均方差区间 $[\phi_{k/r}, \bar{\phi}_{k/r}]$, 即 $[P_{k/k,r}, \bar{P}_{k/k,r}]$, 进而可得到最优估计的区间 $[\hat{x}_{k/k,r}, \bar{\hat{x}}_{k/k,r}]$.

说明 i) 对最优估计均方差 P_y^l 中的每个实际出现的不确定元素要分开搜索, 而不是同时搜索, 由此可获得较精确的区间.

ii) 在 EP 的寻优过程中, 族群的大小 N 和公式(8) 中的比例系数 β 可以调整. N 的选取原则是视问题的复杂程度而定, 一般而言, 越复杂的问题需要族群的规模越大; 比例系数 β 的选取应使收敛速度尽可能快.

3.2 搜索最优估计的标称值 (Search for nominal value of optimal estimation)

在工程实际应用中, 通常希望从最优估计区间

$[\hat{x}_{k/k,r}, \bar{\hat{x}}_{k/k,r}]$ 中获得最优估计的标称值 $\hat{x}_{k/k,r}$, $k = 1, 2, \dots$. 确定最优估计的标称值是基于 3.1 节搜索最优估计区间的方法, 在每次的滤波循环中搜索最优均方差 $P_{k,k/r}$, 从而获得滤波增益矩阵值 $K_{k,r}$, 并使得最大的估计均方差达到最小, 即 $\min[\max J_p(\phi_{r,y})]$. $J_p(\phi_{r,y})$ 是目标函数, 定义 $J_p(\phi_{r,y})$ 为

$$J_p(\phi_{r,y}^{(l)}) = (I - K_{k,r}^{(l)} C_{k,r}^{(l)}) P_{k/k-1,r}^{(l)}, \quad (9)$$

$l = 1, 2, \dots, N$. 一旦获得 $\min[\max J_p(\phi_{r,y})]$, 那么用相应的 $\phi_{r,y}(A_{k,r,y}, B_{k,r,y}, C_{k,r,y}, Q_{k,r,y}, R_{k,r,y})$, $ij = 1, 2, \dots$. 由公式(4) 可确定最优估计的标称值 $\hat{x}_{k/k,r}$.

4 仿真例子 (A simulation example)

在这部分, 我们考虑与文[1] 相同的例子. 在这个例子中, 采用 EPKF 的方法计算最优估计区间, 并与 IKF 的仿真结果进行比较. 然后, 用 EPKF 的方法给出了最优估计的标称值. 一个简化的雷达跟踪系统方程:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & h^l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \xi_k, \\ y_k = [1 \quad 0] x_k + \eta_k. \end{cases}$$

设

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & h^l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_k = [1 \quad 0].$$

这里的假设条件与系统(3) 相同.

$$h^l = [h_0 - \Delta h \quad h_0 + \Delta h],$$

取 $h_0 = 0.01$, $\Delta h = 0.001$, 其它的仿真数据为:

$$E\{x_0\} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$V\{x_0\} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$R_k = r = 0.1.$$

采用 EPKF 方法, 区间矩阵 A_k 表示形式如下:

$$A_k(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0.009 + 0.002p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 0 \leq p \leq 1.$$

采用第 3.1 节的 EPKF 方法, 搜索最优估计区间. 这里初始族群的大小和公式(8)中的比例系数 β 分别取 50 和 0.2. 对于这个例子, 在滤波的每次循环中平均 4 次迭代后就可收敛, 因此可实时获得全局最优估计区间.

EPKF 的仿真结果和 IKF 仿真结果同时显示在图 1 中. 为了节省空间, 这里仅显示 $\hat{x}_{2,k/k}$.

图 1 中虚线(外区间)表示用 IKF 方法获得的最优估计区间, 实线(内区间)表示用 EPKF 方法获得的最优估计区间. 可以看出, 随着滤波循环次数的增加, IKF 的仿真曲线区间发生扩展, 且扩展速度非常快, 详见文[1]. EPKF 的仿真曲线区间随着滤波循环次数的增加则几乎不变. 因此, EPKF 方法更精确, 有更少的保守性.

用第 3.2 节介绍的方法确定出最优估计的标称值, 如图 2 所示.

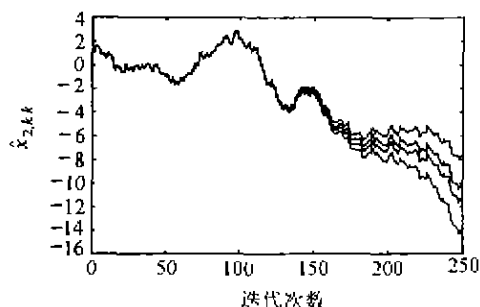


图 1 最优估计区间曲线

Fig 1 The two boundary estimates of IKF and EPKF

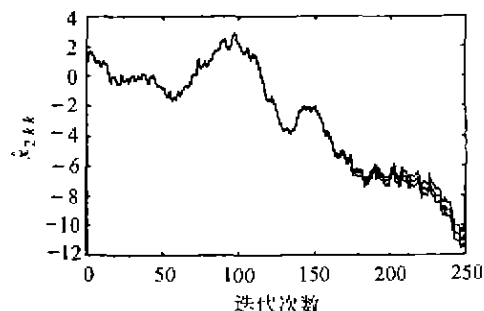


图 2 最优估计标称值曲线

Fig. 2 The two boundary estimates of EPKF and the nominal estimate

图 2 中虚线(外区间)表示用 EPKF 方法获得的最优估计区间, 实线(中间线)是最优估计的标称值曲线. 在搜索最优估计标称值时, 由于计算量较大, 因此难以实时获得.

5 结论(Conclusion)

对由区间系统表示的不确定线性系统, 我们基于 EP 全局寻优技术, 提出进化规划卡尔曼滤波的新方法. 这种新的方法, 在标准卡尔曼滤波相同的假设条件下, 具有相同的递推结构和相同的最优性. 采用这种方法可以在每次滤波循环中, 搜索所有不确定系统最优估计区间和确定最优估计的标称值. 计算机仿真表明, 这种新的方法与文[1]的方法是一致的, 且更精确, 有更少保守性.

参考文献(References)

- [1] Chen G, Wang J W and Shieh L S. Interval Kalman filtering [J]. IEEE Trans. Aerospace Electron. Systems, 1997, 33(1): 232 - 240
- [2] Zhang X F, Heemink A W and Van Eijkeren J C H. Performance robustness analysis of Kalman filter for linear discrete-time systems under plant and noise uncertainty [J]. Int. J. of Systems Science, 1995, 26(2): 257 - 275
- [3] Xie L, Soh Y C and Desouza C M. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(3): 1310 - 1314
- [4] Hong L. Distributed filtering using set models for systems with non-Gaussian [A]. Chen G, ed. Approximate Kalman Filtering [M]. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1993, 161 - 176
- [5] Morrel D. Distributed Kalman filtering [A]. Chen G, ed. Approximate Kalman Filtering [M]. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1993, 139 - 160
- [6] Nagpal K M and Khargonekar P. Filtering and smoothing an H_∞ setting [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, 36(2): 152 - 166
- [7] Xie L, Souza C E de and Fu M. H_∞ estimation for discrete-time linear uncertain systems [J]. Int. J. of Robust Nonlinear Control, 1991, 1(6): 111 - 123
- [8] Cao Y J. Eigenvalue optimization problems via evolutionary programming [J]. Electronics Letters, 1997, 33(2): 642 - 643
- [9] Eiben A E, Hinterding R and Michalewicz Z. Parameter control in evolutionary algorithms [J]. IEEE Trans. Evolutionary Computation, 1999, 7(7): 124 - 141

本文作者简介

翁志黔 1956 年生 西北工业大学教授, 现为美国休士顿大学访问学者. 研究方向为大系统综合与优化, 鲁棒控制与估计及遗传算法. 曾作为主要研究者获国家科技进步一等奖和部级科技进步一、二等奖. Email: zhiqianweng@hotmail.com

谢两叁 1978 年起任美国休士顿大学教授, 现任休士顿大学计算机与系统工程学术主任. 研究方向为数字控制, 最优控制, 自适应和鲁棒控制. 发表论文 200 余篇.

陈关荣 1948 年生, 美国休士顿大学教授 IEEE Fellow. 研究方向为非线性系统动力分析、控制与滤波. 获美国工程教育协会颁发的一项 1998 年年度最佳学术杂志论文奖.