文章编号：1000－8152(2002)02－0197－06

一类非线性参数系统的鲁棒自适应控制*

王强德[1]　魏春玲[2]　王化建[1]
(1. 曲阜师范大学自动化研究所·山东曲阜，273165；2. 曲阜师范大学体育系·山东曲阜，273165)

摘要：针对一类具有非线性参数和未知非线性的非线性系统，提出了一种鲁棒自适应控制设计方法，该方法能保证所有信号全局一致有界，并且使所研究的非线性系统的范围大大扩大.

关键词：非线性参数化；非线性系统；鲁棒自适应控制
文献标识码：A

Robust Adaptive Controller of a Class of Nonlinear Parameterization Systems

WANG Qiangde[1], WEI Chunling[2] and WANG huajian[1]
(1 Insitute of Automation, Qufu Normal University · Shandong Qufu, 273165, P.R.China;
2. Department of Physical Education, Qufu Normal University · Shandong Qufu, 273165, P.R.China)

Abstract: This paper presents a robust adaptive controller for a class of nonlinear systems with nonlinear parameterization and unknown nonlinearities. The proposed design expands the class of nonlinear systems for which global adaptive stabilization methods can be applied. The overall adaptive scheme is shown to guarantee global uniform ultimate boundedness.

Key words: nonlinear parameterization; nonlinear systems; robust adaptive control

1 引言(Introduction)

具有参数不确定性的非线性系统的跟踪问题，通常是采用鲁棒控制或自适应控制来解决.对自适应控制来说，一些关于状态和输入是非线性，而对参数是线性的非线性系统，已经被很好的解决.其研究方法主要可以分为两种.一种是对对象非线性引入增长条件[1]或对李雅普诺夫函数加上增长条件[2].另一种是使系统具有规范形式和限定参数的范围[3~6].

Taylor 等人引入严格匹配条件以限制系统中的参数，从而能控制一类具有未建模动态的非线性系统.文献[4]中研究了一类满足扩展匹配条件的系统.Kanellakopoulos 等人[3]利用自适应方法研究了一类更广泛的具有三角结构的系统，然而需要过参数估计(over parameterization). Krstic[5]利用校正函数把这一要求去掉.

但在实际应用中一个物理模型常常不能被线性参数化，因此 Karsenti 等人在[7]中把[5]的算法扩展到具有非线性参数化的非线性系统，但他只研究了调节问题，对参考信号的跟踪问题却没研究.[8]研究了这类系统的跟踪问题，但没考虑非线性函数不确定性.目前对具有非线性参数不确定性和非线性函数不确定性的系统的研究还不多见.

本文将针对一类具有非线性参数不确定性和未知非线性函数不确定性的系统，采用 Backstepping 方法设计了一种鲁棒自适应控制器.这里说的未知非线性可能是建模误差，外部干扰，系统的时变或这些因素的综合.该设计方法能保证所有信号全局一致有界.

2 一维情形(One dimension case)

考虑下面的非线性系统：

$$\dot{x} = f(x,\theta) + u + \Delta(x,t), \tag{1}$$

输出 $x \in \mathbb{R}$，控制 $u \in \mathbb{R}$，未知常参数向量 $\theta \in \mathbb{R}^p$，$f(x,\theta)$ 是 θ 的非线性函数且关于 θ 二次连续可导，$\Delta(x,t)$ 是未知光滑函数. θ 属于一个凸集 Θ，其直径为

$$d = \max\{\|\theta_1 - \theta_2\|, \theta_1, \theta_2 \in \Theta\}.$$

$\Delta(x,t)$ 代表测量噪声，模型误差或外部干扰，假设

$$|\Delta(x,t)| < \Psi p(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{2}$$

* 基金项目：山东省自然科学基金(Q99G04)资助项目.
收稿日期：2000－01－20；收修改稿日期：2001－03－05.

其中 $p(x)$ 是一已知非负光滑函数，$\Psi \geqslant 0$ 是一个常参数，可以未知. 因为满足(2)式的 Ψ 不是唯一的，所以不失一般性，我们定义 Ψ 是满足(2)式的最小值(非负).

控制目标是使 x 跟踪一个连续有界的参考轨线 $y_r(t)$. 更明确地，如果给定 $\delta_x > 0, \delta_\theta > \sqrt{2}d$，定义:

$$B(t) = B_{\delta_x}(y_r(t)) \times B_{\delta_\theta}(\theta) =$$

$$\{x : |x - y_r(t)| < \delta_x\} \times \{\hat\theta : \|\hat\theta - \theta\| < \delta_\theta\}.$$

其中 $\hat\theta$ 是 θ 的估计. 将给出一种自适应控制策略使 $B(t)$ 为闭环系统的正不变域，即若 $(x(t_0),\hat\theta(t_0)) \in B(t_0)$ 则 $(x(t),\hat\theta(t)) \in B(t), \forall t \geqslant t_0$. 并且存在一个 $B(t)$ 的适当子集 $\Omega_s(t)$，它包含 $(y_r(t),\theta)$，对闭环系统是吸引的，也就是正不变的，即当 $(x(t_0),\hat\theta(t_0)) \in B(t_0)$ 时有

$$\mathrm{dist}(\Omega_s(t),(x(t),\hat\theta(t))) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

令跟踪误差为 $z = x - y_r$，参数误差为 $\tilde\theta = \theta - \hat\theta$.

引理 1 a) 对 $\hat\theta \in \mathbb{R}^p$ 设 $pr(\hat\theta)$ 是 $\hat\theta$ 在 Θ 上的投影(投影定义为 $pr\hat\theta \in \Theta$，且 $\|pr(\hat\theta) - \hat\theta\| = \min\limits_{\rho\in\Theta}\|\rho - \hat\theta\|$)，$l(\hat\theta) = pr(\hat\theta) - \hat\theta, 0 < \lambda < 1, \kappa \geqslant 1 + \lambda^{-2}$. 则有下面的不等式成立:

$$\kappa l(\hat\theta)^{\mathrm T}\tilde\theta \geqslant \|\tilde\theta\|^2 - (1+\lambda)^2 d^2. \tag{3}$$

b) 设 c, Γ 为正常数，则存在一个 C^∞ 函数，$L:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ 满足

$$-\tilde\theta^{\mathrm T} L(\hat\theta) \leqslant -\frac{c}{2\Gamma}\|\tilde\theta\|^2 + \frac{cd^2}{\Gamma}. \tag{4}$$

证 见参考文献[2].

对系统(1)采用下面的参数自适应律和控制律

$$\beta(x,\hat\Psi) = \hat\Psi\omega(x), \tag{5}$$

$$\dot{\hat\Psi} = r[z\omega(x) - \sigma(\hat\Psi - \Psi^0)], \tag{6}$$

$$\dot{\hat\theta} = \Gamma\Big[z\frac{\partial f}{\partial\theta}\Big|_{(x,\hat\theta)} + L(\hat\theta)\Big], \tag{7}$$

$$\omega(x) = p(x)\tanh\left(\frac{zp(x)}{\varepsilon}\right), \tag{8}$$

$$u = -cz - f(x,\hat\theta) - \beta(x,\hat\Psi) + \dot y_r. \tag{9}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为常数，$\sigma > 0, \Psi^0 \geqslant 0$ 为设计常数，r, Γ 是正自适应增益，c 为正控制器常数，$\hat\Psi$ 是 Ψ 的估计.

选取李雅普诺夫函数

$$V(z,\tilde\theta,\tilde\Psi) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2\Gamma}\|\tilde\theta\|^2 + \frac{1}{2r}\tilde\Psi^2.$$

其中 $\tilde\Psi = \hat\Psi - \Psi^M, \Psi^M = \max(\Psi,\Psi^0)$(在很多实际情况下，$\Psi$ 并不是完全未知，设计者可以事先估计它，然后选择 Ψ^0 等于或大于这个估计值). 下面将证明适当选取 r, Γ 和 c 的值可以使 $B(t)$ 成为正不变的，且给出一个正值 V_s 使

$$\Omega_s(t) = \{(x,\hat\theta) : V(x - y_r(t),\tilde\theta,\tilde\Psi) \leqslant V_s\} \tag{10}$$

是一个吸引域，且 $\Omega_s(t) \subset B(t)$.

利用(5)~(9)，并由引理1得

$$\dot V = z\dot z - \frac{1}{\Gamma}\tilde\theta^{\mathrm T}\dot{\hat\theta} + \frac{1}{r}\tilde\Psi\dot{\hat\Psi} =$$

$$z(f + u + \Delta - \dot y_r) - \frac{1}{\Gamma}\tilde\theta^{\mathrm T}\dot{\hat\theta} + \frac{1}{r}\tilde\Psi\dot{\hat\Psi} =$$

$$z(f - cz - f(x,\hat\theta) - \beta + \Delta) -$$

$$\tilde\theta^{\mathrm T}\Big[z\frac{\partial f}{\partial\theta}\Big|_{(x,\hat\theta)} + L(\hat\theta)\Big] + \tilde\Psi[z\omega - \sigma(\hat\Psi - \Psi^0)] \leqslant$$

$$-cz^2 + z(f - f(x,\hat\theta) - \beta + \Psi p(x)) - \tilde\theta^{\mathrm T}z\frac{\partial f}{\partial\theta}\Big|_{(x,\hat\theta)} -$$

$$\frac{c}{2\Gamma}\|\tilde\theta\|^2 + \frac{cd^2}{\Gamma} + z\tilde\Psi\omega - \sigma\tilde\Psi(\hat\Psi - \Psi^0) =$$

$$-cz^2 + z\Big(f - f(x,\hat\theta) - \tilde\theta^{\mathrm T}\frac{\partial f}{\partial\theta}\Big|_{(x,\hat\theta)}\Big) +$$

$$z[\Psi p - \Psi^M\omega] - \frac{c}{2\Gamma}\|\tilde\theta\|^2 + \frac{cd^2}{\Gamma} - \sigma\tilde\Psi(\hat\Psi - \Psi^0).$$

令

$$\mu = \sup_{t\in[0,+\infty)}\Big(\max_{(x,\hat\theta)\in B(t)}\Big\|\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}(x,\hat\theta)\Big\|_2\Big),$$

对 $\forall(x,\hat\theta) \in B(t)$，有(此不等式的证明见[2]):

$$\dot V \leqslant -cz^2 - \frac{c}{2\Gamma}\|\tilde\theta\|^2 + \frac{1}{2}\mu\delta_x\|\tilde\theta\|^2 + \frac{cd^2}{\Gamma} +$$

$$\Psi^M\Big[|z|p - zp\tanh\Big(\frac{zp}{\varepsilon}\Big)\Big] - \sigma\tilde\Psi(\hat\Psi - \Psi^0).$$

因为对 $\forall\varepsilon > 0, \forall y \in \mathbb{R}$ 有 $0 \leqslant |y| - y\tanh\Big(\frac{y}{\varepsilon}\Big) \leqslant \delta\varepsilon$，其中 $\delta = \mathrm e^{-(\delta+1)}$，即 $\delta = 0.2785$，所以

$$\Psi^M\Big(|z|p - zp\tanh\Big(\frac{zp}{\varepsilon}\Big)\Big) \leqslant \delta\Psi^M\varepsilon \leqslant \frac{1}{3}\Psi^M\varepsilon.$$

又因为

$$-\sigma\tilde\Psi(\hat\Psi - \Psi^0) =$$

$$-\frac{\sigma}{2}\tilde\Psi^2 - \frac{\sigma}{2}(\hat\Psi - \Psi^0)^2 + \frac{\sigma}{2}(\Psi^M - \Psi^0)^2,$$

所以

$$\dot V \leqslant -cz^2 - \frac{c}{2\Gamma}\|\tilde\theta\|^2 + \frac{1}{2}\mu\delta_x\|\tilde\theta\|^2 - \frac{\sigma}{2}\tilde\Psi^2 + \frac{cd^2}{\Gamma} + \lambda.$$

其中

$$\lambda = \frac{1}{3}\Psi^M\varepsilon + \frac{\sigma}{2}(\Psi^M - \Psi^0)^2.$$

假设 $\frac{c}{\Gamma} > \mu\delta_x$，令

$$k = \min\{2c, c - \mu\delta_x\Gamma, r\sigma\},$$

则

$$\dot{V} \leqslant -kV + \frac{cd^2}{\Gamma} + \lambda. \tag{11}$$

可以选择 σ, r 使

$$c - \mu\delta_x\Gamma \leqslant r\sigma, \tag{12}$$

则
$$k = c - \mu\delta_x\Gamma.$$

取

$$V_s = \frac{cd^2 + \Gamma\lambda}{\Gamma(c - \Gamma\mu\delta_x)}, \tag{13}$$

则对满足 $\frac{c}{\Gamma} > \mu\delta_x$ 和 $c - \Gamma\mu\delta_x \leqslant r\sigma$ 的任意的 c, Γ，当 $(x, \hat{\theta}) \in (B(t)/\Omega_s(t))$ 时有 $\dot{V} < 0$. 剩下的是如何选择 c, Γ 使 $\Omega_s(t) \subset B(t)$. 为此需要解不等式

$$\sqrt{2\Gamma V_s} < \delta_\theta \text{ 和 } \sqrt{2V_s} < \delta_x.$$

解这两个不等式，得

$$\frac{c}{\Gamma} > \frac{2\lambda + \mu\delta_x\delta_\theta^2}{\delta_\theta^2 - 2d^2}, \tag{14}$$

$$\Gamma > \frac{2(c/\Gamma d^2 + \lambda)}{\delta_x^2(c/\Gamma - \mu\delta_x)}. \tag{15}$$

注意到(14)式意味着 $\frac{c}{\Gamma} > \mu\delta_x$，(14) 式右端和 c, Γ 无关，而(15) 式右端依靠 c/Γ，另外可以适当选择参数 ϵ, Ψ^0 和 σ 使 λ 充分小，所以这两个不等式是可以求解的. 于是可得下面的定理：

定理 1　设 $\theta \in \Theta$ 是进入系统(1) 的一个未知常参数向量，$y_r(t) \in C^1$ 是一个有界的函数，给定 $\delta_x > 0, \delta_d > 2d$. 如果 c, Γ 满足不等式(12)，(14)，(15)，那么自适应律和控制律(5) ~ (9) 使 $B_{\delta_x}(y_r(t)) \times B_{\delta_\theta}(\theta)$ 是一个系统(1) 的正不变域，$\Omega_s(t)$ 是系统(1)的吸引域.

3　高维情形(High dimension case)

3.1　问题描述(Problem statement)

考虑下面的 n 维系统，其参数线性地进入前 $n-1$ 个方程，而非线性地进入第 n 个方程.

$$\dot{x}_i = x_{i+1} + \phi_i(x_1, \cdots, x_i)^{\mathrm{T}}\theta + \Delta_i(x, t),\ 1 \leqslant i \leqslant n-1, \tag{16a}$$

$$\dot{x}_n = u + f(x, \theta) + \Delta_n(x, t), \tag{16b}$$

$$y = x_1. \tag{16c}$$

其中 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 是状态向量，$\theta \in \mathbb{R}^p$ 是未知常参数向量，$\phi_i \in \mathbb{C}^{n-i}, i = 1, \cdots, n-1$. $\Delta_i(x, t)$ 是未知光滑函数.

对系统(16)作如下假设：

假设 1　θ 属于一个凸集 $\Theta \in \mathbb{R}^p$，其直径为

$$d = \max\{\|\theta_1 - \theta_2\|, \theta_1, \theta_2 \in \Theta\}.$$

假设 2　函数 f 关于 θ 二次可微，且对 $\forall \hat{\theta} \in \mathbb{R}^p$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(x, \hat{\theta})$ 是有界的.

假设 3　存在(可未知)参数 Ψ_i 和已知光滑函数 $p_i(x_1, \cdots, x_i)$ 是对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ 和 $\forall t \in \mathbb{R}^+$ 有

$$|\Delta(x, t)| \leqslant \Psi_i p(x_1, \cdots, x_i),\ i = 1, \cdots, n. \tag{17}$$

因为 Ψ_i 不是唯一的，定义 Ψ_i 是满足上述条件中的最小的，$\Psi_i \geqslant 0$.

控制目标是：使系统的输出 y 也即 x_1 跟踪一个参考轨线 $y_r(t)$，假设 $y_r(t)$ 是 n 次连续可导的，且各阶导数是有界的. 更明确地，取正数 $\delta_1, \cdots, \delta_n, \delta_\theta$，其中 $\delta_\theta > 2d$. 定义函数 $\alpha_i(x, \hat{\theta}, y_r, \cdots, y_r^{(i)}, \Psi_1, \cdots, \Psi_i)$，定义

$$B_{\delta_1}(y_r(t)) = \{x_1 : |x_1 - y_r| < \delta_1\},$$

$$B_{\delta_{i+1}}(\alpha_i(t)) = \{x_{i+1} : |x_{i+1} - \alpha_i| < \delta_{i+1}, i = 1, \cdots, n-1\},$$

$$B_{\delta_\theta}(\theta) = \{\hat{\theta} : |\theta - \hat{\theta}| < \delta_\theta\}.$$

设计自适应律和控制律 $\dot{\hat{\theta}}, u, \dot{\hat{\Psi}}_i$ 使

$$B(t) = B_{\delta_1}(y_r(t)) \times \cdots \times B_{\delta_n}(\alpha_{n-1}(t)) \times B_{\delta\theta}(\theta)$$

是系统(16)的正不变域，且存在一个 $B(t)$ 的子集 $\Omega_s(t)$，使 $\Omega_s(t)$ 是系统(16) 的吸引域.

3.2　递推设计(Recursive design)

下面用 Backstepping 方法，对系统进行设计. 首先作如下变换

$$z_1 = x_1 - y_r, \cdots, z_n = x_n - \alpha_{n-1}. \tag{18}$$

其中 α_i 是中间控制函数，通过 Backstepping 方法设计确定.

第一步：令

$$\Lambda_1 = \Delta_1,\ |\Lambda_1| \leqslant \bar{\Psi}_1 \bar{p}_1(x_1),$$

$$\bar{\Psi}_1 = \Psi_1,\ \bar{p}_1(x_1) = p_1(x_1),$$

由(16)，(18)式可得

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + \phi_1^{\mathrm{T}}\theta + \Lambda_1 - \dot{y}_r.$$

令 $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$，$\tilde{\Psi}_1 = \hat{\Psi}_1 - \Psi_1^M$，其中 $\Psi_1^M = \max(\bar{\Psi}_1, \Psi_1^0)$，$\Psi_1^0 \geqslant 0$ 为设计常数. 取李雅普诺夫函数

$$V_1 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2\Gamma}\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\tilde{\theta} + \frac{1}{2r_1}\tilde{\Psi}_1^2.$$

其中 $\Gamma > 0, r_1 > 0$ 是设计常数，则

$$\dot{V}_1 = z_1(z_2 + \alpha_1 + \phi_1^{\mathrm{T}}\theta + \Lambda_1 - \dot{y}_r) - \frac{1}{\Gamma}\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\dot{\hat{\theta}} + \frac{1}{r_1}\tilde{\Psi}\dot{\hat{\Psi}}_1.$$

取

$$\tau_1 = \Gamma z_1\phi_1,$$

$$\alpha_1 = -cz_1 - \phi_1^{\mathrm{T}}\hat{\theta} + \dot{y}_r - \beta_1(x_1,\hat{\Psi}_1),$$

$$\dot{\hat{\Psi}}_1(t) = r_1[z_1\omega_1(x_1) - \sigma_1(\hat{\Psi}_1 - \Psi_1^0)],$$

$$\beta_1(x_1,\hat{\Psi}_1) = \hat{\Psi}_1\omega_1(x_1),$$

$$\omega_1(x_1) = \bar{p}_1(x_1)\tanh(\frac{z_1\bar{p}(x_1)}{\epsilon_1}).$$

其中 c,ϵ_1,σ_1 是正的设计常数,推导同第二部分,则

$$\dot{V}_1 = -cz_1^2 + z_1z_2 + z_1\Lambda_1 - \Psi_1^M z_1\omega_1 - \frac{1}{\Gamma}\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}(\dot{\hat{\theta}} - \tau_1) - \tilde{\Psi}_1(\hat{\Psi}_1 - \Psi_1^0) \leqslant -cz_1^2 + z_1z_2 + z_1\Lambda_1 + \frac{1}{3}\epsilon_1\Psi_1^M - \frac{1}{2}\sigma_1\tilde{\Psi}_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_1(\Psi_1^M - \Psi_1^0)^2 - \frac{1}{\Gamma}\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}(\dot{\hat{\theta}} - \tau_1). \tag{19}$$

第 i 步: $1 < i < n$. 令 $\Lambda_i = \Delta_i - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\Delta_j$, 则 $|\Lambda_i| \leqslant \bar{\Psi}_i\bar{p}_i(x_1,\cdots,x_i)$. 取

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}z_i^2 + \frac{1}{2r_i}\tilde{\Psi}_i^2,$$

$$\tilde{\Psi}_i = \hat{\Psi}_i - \Psi_i^M,\ \Psi_i^M = \max(\bar{\Psi}_i,\Psi_i^0),$$

$$\tau_i = \tau_{i-1} + \Gamma z_i(\phi_i - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\phi_j),$$

$$\alpha_i = -z_{i-1} - cz_i - \hat{\theta}^{\mathrm{T}}(\phi_i - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\phi_j) + \sum_{j=1}^{i-1}\left[\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}x_{j+1} + \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\Psi}_j}\dot{\hat{\Psi}}\right] + \sum_{j=0}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(j)}}y_r^{(j+1)} + \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}}\tau_i + \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}}\Gamma L(\hat{\theta}) - \beta_i(x_1,\cdots,x_i,\hat{\Psi}_1,\cdots,\hat{\Psi}_i) + \sum_{j=1}^{i-2}\frac{\partial\alpha_j}{\partial\hat{\theta}}z_{j+1}\Gamma(\phi_i - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\phi_j),$$

$$\dot{\hat{\Psi}}_i = r_i[z_i\omega_i(x_1,\cdots,x_i,\hat{\theta},\hat{\Psi}_1,\cdots,\hat{\Psi}_i) - \sigma_i(\hat{\Psi}_i - \Psi_i^0)],$$

$$\beta_i(x_1,\cdots,x_i,\hat{\theta},\hat{\Psi}_1,\cdots,\hat{\Psi}_i) = \hat{\Psi}_i\omega_i(x_1,\cdots,x_i,\hat{\theta},\hat{\Psi}_1,\cdots,\hat{\Psi}_i),$$

$$\omega_i(x_1,\cdots,x_i,\hat{\theta},\hat{\Psi}_1,\cdots,\hat{\Psi}_i) = \bar{p}_i\tanh(\frac{z_i\bar{p}_i}{\epsilon_i}),$$

则

$$\dot{V}_i \leqslant -\sum_{j=1}^{i}(cz_j^2 + \frac{1}{2}\sigma_j\tilde{\Psi}_j^2) + \sum_{j=1}^{i}[\frac{1}{2}\epsilon_j\Psi_j^M + \frac{1}{2}\sigma_j(\Psi_j^M - \Psi_j^0)]^2 + z_iz_{i+1} + \sum z_{j+1}\frac{\partial\alpha_j}{\partial\hat{\theta}}\Gamma L(\hat{\theta}) - (\frac{1}{\Gamma}\tilde{\theta}^{\mathrm{T}} + \sum_{j=1}^{i-1}z_{j+1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}})(\dot{\hat{\theta}} - \tau_i). \tag{20}$$

第 n 步: 取 $V = V_{n-1} + \frac{1}{2}z_n^2 + \frac{1}{2r_n}\tilde{\Psi}_n^2$.

取

$$\tau_n = \tau_{n-1} + \Gamma z_n(\frac{\partial f}{\partial\theta}\Big|_{(x,\hat{\theta})} - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}),$$

$$\alpha = -z_{n-1} - cz_n - f(x,\hat{\theta}) + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}x_{j+1} + \hat{\theta}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}\phi_j + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial y_r^{(j)}}y_r^{(j+1)} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial\hat{\Psi}_j}\dot{\hat{\Psi}} + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{\partial\alpha_j}{\partial\hat{\theta}}z_{j+1}\Gamma(\frac{\partial f}{\partial\theta}\Big|_{(x,\hat{\theta})} - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}\phi_j) - \beta(x,\hat{\theta},\hat{\Psi}_1,\cdots,\hat{\Psi}_n) + \frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial\hat{\theta}}(\tau_n + \Gamma L(\hat{\theta})),$$

$$\dot{\hat{\Psi}}_n = r_n[z_n\omega_n(x,\hat{\theta},\hat{\Psi}_1,\cdots,\hat{\Psi}_n) - \sigma_n(\hat{\Psi}_n - \Psi_n^0)],$$

$$\beta_n(x,\hat{\theta},\hat{\Psi}_1,\cdots,\hat{\Psi}_i) = \hat{\Psi}_n\omega_n(x,\hat{\theta},\hat{\Psi}_1,\cdots,\hat{\Psi}_n),$$

$$\omega_n(x,\hat{\theta},\hat{\Psi}_1,\cdots,\hat{\Psi}_n) = \bar{p}_n\tanh(\frac{z_n\bar{p}_n}{\epsilon_n}),$$

则

$$\dot{V} \leqslant -\sum_{j=1}^{n}(cz_j^2 + \frac{1}{2}\sigma_j\tilde{\Psi}_j^2) + \sum_{j=1}^{n}[\frac{1}{2}\epsilon_j\Psi_j^M + \frac{1}{2}\sigma_j(\Psi_j^M - \Psi_j^0)^2] - (\frac{1}{\Gamma}\tilde{\theta}^{\mathrm{T}} + \sum_{j=1}^{n-1}z_{j+1}\frac{\partial\alpha_j}{\partial\hat{\theta}})(\dot{\hat{\theta}} - \tau_n) + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_j}{\partial\hat{\theta}}\Gamma L(\hat{\theta})z_{j+1} + z_n(f(x,\theta) - f(x,\hat{\theta}) - \frac{\partial f}{\partial\theta}\Big|_{(x,\hat{\theta})}\tilde{\theta}) + z_n(u - \alpha).$$

取

$$u = \alpha, \tag{21}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \tau_n + \Gamma L(\hat{\theta}), \tag{22}$$

令

$$\lambda_n = \sum_{j=1}^{n}[\frac{1}{2}\epsilon_j\Psi_j^M + \frac{1}{2}\sigma_j(\Psi_j^M - \Psi_j^0)^2],$$

则

$$\dot{V} \leqslant -\sum_{j=1}^{n}[cz_j^2 + \frac{1}{2}\sigma_j\tilde{\Psi}_j^2] + \lambda_n - \tilde{\theta}^T L(\hat{\theta}) +$$

$$z_n[f(x,\theta)-f(x,\hat{\theta})-\frac{\partial f}{\partial \theta}\bigg|_{(x,\hat{\theta})}\tilde{\theta}]\leqslant$$

$$-\sum_{j=1}^{n}[cz_j^2+\frac{1}{2}\sigma_j\widetilde{\Psi}_j^2]-\frac{c}{2\Gamma}\|\tilde{\theta}\|^2+\frac{cd^2}{\Gamma}+$$

$$\frac{1}{2}\mu\delta_n\|\tilde{\theta}\|^2+\lambda_n\leqslant$$

$$-\sum_{j=1}^{n}[cz_j^2+\frac{1}{2}\sigma_j\widetilde{\Psi}_j^2]-$$

$$\frac{1}{2\Gamma}(c-\Gamma\mu\delta_n)\|\tilde{\theta}\|^2+\frac{cd^2}{\Gamma}+\lambda_n.$$

其中

$$\mu=\sup_{t\in[0,+\infty)}(\max_{(x,\hat{\theta})\in B(t)}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(x,\hat{\theta})\right\|_2).$$

首先假设

$$\frac{c}{\Gamma}>\mu\delta_n, \tag{23}$$

令 $k=\min(2c,c-\Gamma\mu\delta_n,\sigma_1r_1,\cdots,\sigma_nr_n)$，则

$$\dot{V}\leqslant-kV+\frac{cd^2}{\Gamma}+\lambda_n. \tag{24}$$

可以选择 σ_i,r_i 使

$$c-\Gamma\mu\delta_n\leqslant\sigma_ir_i,\ i=1,\cdots,n, \tag{25}$$

则

$$k=c-\Gamma\mu\delta_n.$$

取

$$V_s=\frac{cd^2+\Gamma\lambda}{\Gamma(c-\Gamma\mu\delta_n)}, \tag{26}$$

定义

$$\Omega_s(t)=\{(x,\hat{\theta}):V(z,\tilde{\theta},\widetilde{\Psi})\leqslant V_s\}, \tag{27}$$

对任何满足式(23)和(25)的 Γ,c，由 $(x(t),\hat{\theta}(t))\in(B(t)/\Omega_s(t))$ 可得 $\dot{V}(t)\leqslant 0$. 剩下要做的是选择 Γ,c 使 $\Omega_s(t)\subset B(t)$，也即由 $V(t)\leqslant V_s$ 可得 $\|\tilde{\theta}\|<\delta_\theta$ 和 $|z_i|<\delta_i,i=1,\cdots,n$. 因为 $V(t)\leqslant V_s$ 意味着 $\|\tilde{\theta}\|\leqslant\sqrt{2\Gamma V_s}$ 和 $|z_i|\leqslant\sqrt{2V_s},i=1,\cdots,n$，所以下面的不等式是充分的：

$$\sqrt{2\Gamma V_s}<\delta_\theta,\ \sqrt{2V_s}<\delta_m,\ \delta_m=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\delta_i.$$

解这两个不等式可得

$$\frac{c}{\Gamma}>\frac{2\lambda_n+\mu\delta_n\delta_\theta^2}{\delta_\theta^2-2d^2}, \tag{28}$$

$$\Gamma>\frac{2(c/\Gamma d^2+\lambda_n)}{\delta_m^2(c/\Gamma-\mu\delta n)}. \tag{29}$$

注意到(29)式意味着(23)，(29)式右端和 c,Γ 无关，而(23)式右端依靠 c/Γ，另外可以适当选择参数 ϵ_i，Ψ_i^0 和 σ_i 使 λ_n 充分小，所以这两个不等式是可以求解的. 于是可得下面的定理：

定理 2　设 $\theta\in\Theta$ 是进入系统(16)的未知常参数向量，参考信号 $y_r(t)\in\mathbb{C}^n$，且各阶导数有界，$\delta_i>0,i=1,\cdots,n,\delta_\theta>\sqrt{2}d$. 如果 Γ,c 满足不等式(25)，(29) 和(23)，则自适应律(22) 和控制律(21) 使集合 $B_{\delta_1}(y_r(t))\times\cdots\times B_{\delta_n}(\alpha_{n-1}(t))\times B_{\delta_\theta}(\theta)$ 是系统(16) 的一个正不变域，且 $\Omega_s(t)$(由(28) 式定义，V_s 由(27)式定义)是系统(16)的吸引域.

4 仿真(Simulation)

考虑下面的二维系统

$$\dot{x}_1=x_2+0.5x_1^2\theta_1+d(t),$$

$$\dot{x}_2=u+\frac{\sin(x_2)}{x_1\theta_1+\theta_2},$$

仿真时取 $\theta_1=0.6,\theta_2=6.5,d(t)=0.6\sin(2t)$，令参考信号为 $\Omega_s(t)$，则

$$z_1=x_1-y_r,\ \alpha_1=-cz_1-0.5x_1^2\theta_1+\cos(t)-\beta_1,$$

$$\beta_1=\hat{\Psi}_1\omega_1,\ \omega_1=\bar{p}_1\tanh(\frac{z_1\bar{p}_1}{\epsilon_1}),\ \bar{p}=1,$$

$$\bar{p}_2=\left|\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\right|=\left|c+x_1\theta_1+\frac{\hat{\Psi}_1}{\epsilon_1}(1-\omega_1^2)\right|.$$

取 $\Psi_1^0=\Psi_2^0=1.1$，则 $\Psi_1^M=\Psi_2^M=1.1$. 取 $\epsilon_1=\epsilon_2=0.1,\delta_1=\delta_2=0.1,\delta_\theta=1.834$，可得 $\lambda_2=0.11$.

因 $\mu=\max\left\|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\frac{\sin(x_2)}{x_1\theta_1+\theta_2})\right\|=0.431$，由不等式(28)得 $\frac{c}{\Gamma}>0.423$，取 $\frac{c}{\Gamma}=0.425$. 由不等式(29)得 $\Gamma>335.8$，取 $\Gamma=337$，再由不等式(25)取 $\sigma_1=\sigma_2=10,r_1=r_2=13$. 初值 $x=[0,0]^{\mathrm{T}},\hat{\theta}=[0,0]^{\mathrm{T}}$，$\hat{\Psi}=[0,0]^{\mathrm{T}}$. 仿真是用 Matlab 语言做的，仿真结果由图 1 和图 2 给出. 仿真曲线表明，该文算法是有效的.

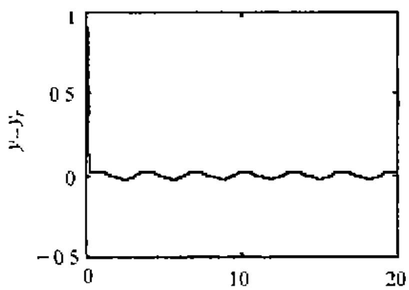

图 1　跟踪误差

Fig. 1　Tracking error

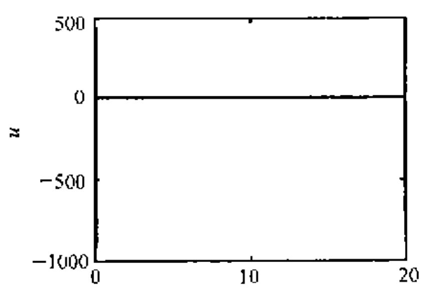

图 2　控制输入

Fig. 2　Control input

5 结论(Conclusion)

针对一类具有非线性参数和一般非线性扰动的非线性系统,设计了一种鲁棒自适应状态反馈控制.该控制算法保证所有信号全局一致有界.

参考文献(References)

[1] Sastry S and Isidori A. Adaptive control of linearizable systems [J]. IEEE Trans Automat Contr., 1989,34(10):1123-1131

[2] Paaly L, Bastin G, Pomet J B and Jiang Z P. Adaptive stabilization of nonlinear systems [A]. Kokotovic P V, ed. Foundations of Adaptive Control [M]. Berlin Germany: Springer, 1991,347-433

[3] Kanellakopoulos I, Kokotovic P V and Morse S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991,36(11):1241-1253

[4] Kanellakopoulos I, Kokotovic P V and Marino R. An extended direct scheme for robust adaptive nonlinear control [J]. Automatica, 1991, 27(2):247-255

[5] Krstic M and Kanellakopoulos I. Adaptive nonlinear control without over parameterization [J]. Syst. Contr. Lett., 1992,19(1):177-185

[6] Taylor D G, Kokotovic P V, Marino R and Kanellakopoulos I. Adaptive regulation of nonlinear systems with unmodeled dynamics [J]. IEEE Trans. Automa. Contr., 1989,34(4):405-412

[7] Karsenti L, Lamnabhi-Lagarrigue F and Bastin G. Backstepping technique extendes to nonlinear parameterization [J]. Syst Contr. Lett., 1996,27(1):87-97

[8] Richard Hotzel and Laurent Karsenti. Adaptive tracking strategy for a class of nonlinear systems [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1998, 43(9):1272-1279

[9] Krstic M, Kanellakopoulos I and Kokotovic P V. Nonlinear and Adaptive Control Design [M]. New York: Wiley, 1995

[10] Wang Qiangde, Wei Chunling and Chen Weitian. Robust output-feedback adaptive control of a class of nonlinear systems with uncertainties [J]. Control and Decision, 1999, 14(6):688-693 (in Chinese)

本文作者简介

王强德 1971年生.1997年毕业于曲阜师范大学自动化研究所,获得硕士学位.主要研究方向为非线性系统的鲁棒自适应控制及模糊变结构控制理论与应用. Email: wqd@qfnu.edu.cn

魏春玲 1970年生.1998年毕业于曲阜师范大学自动化研究所,获得硕士学位.主要研究方向为非线性系统的鲁棒自适应控制及模糊变结构控制理论与应用.

王化建 1972年生.目前在曲阜师范大学自动化研究所读硕士研究生.主要研究方向为模糊控制理论与应用.

下 期 要 目